

任意马赫数二维不定常激波的通解

程 盘 庆

(中国科学技术大学)

提要 采用 Whitham 规则, 本文给出了任意马赫数二维不定常激波的级数形式的通解。包括了强激波和弱激波的通解, 它可以用超几何级数来表达。

关键词 激波, 激波动力学, 气体动力学, 二维流动方程组。

1. 引言

采用 Whitham 方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A(M)} \frac{\partial M}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{A'(M)}{M} \frac{\partial M}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 α, β 是正交曲线坐标, $\alpha = \text{常数}$ 时表示激波波阵面; $\beta = \text{常数}$ 表示射线。 $\theta(\alpha, \beta)$ 是射线与某固定方向的夹角, 可称为射线转角。 D_i 是激波波速, a_0 是未扰动区的声速。 $A(M)$ 类似于流管截面积。 $D_i/a_0 = M(\alpha, \beta)$ 是激波马赫数。 气体的绝热指数 $\gamma = \text{常数}$ 。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A(M)}{A_0} &= \frac{f(M)}{f(M_0)} \\ \frac{A'(M)}{A(M)} &= \frac{f'(M)}{f(M)} = -g(M) = \frac{-M}{M^2 - 1} \lambda(M) \\ f(M) &= \exp \left\{ - \int \frac{M \lambda(M)}{M^2 - 1} dM \right\} \\ \lambda(M) &= \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) \left(1 + 2\mu + \frac{1}{M^2} \right) = \frac{2}{K(M)} \\ \mu^2(M) &= [(\gamma - 1)M^2 + 2] / [2\gamma M^2 - (\gamma - 1)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

下标 0 表示初值, A_0 可取为 1。

方程 (1) 是一阶齐次拟线性双曲型偏微分方程组, 先线性化, 再消去 α 或 β , 得到 α 或 β 的二阶方程, 再分离变量得到 θ 和 M 的常微分方程。由于原方程的系数只是 M 的函数, 所以 θ 的方程很容易求得, 而 M 的方程较难求解。因为方程的系数是 M 的较复杂的函数, 我们利用 $\lambda(M)$ 是慢变函数的性质来简化系数之后, 可用超几何级数表示通解。

本文于 1986 年 12 月 5 日收到, 1987 年 9 月 28 日收到修改稿。

2. 线性化和二阶方程

在非简单波区, 函数行列式 Jacobian

$$J \equiv \frac{1}{J_1} \equiv \frac{\partial(\theta, M)}{\partial(\alpha, \beta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \\ \frac{\partial M}{\partial \alpha} & \frac{\partial M}{\partial \beta} \end{vmatrix} \neq 0 \neq \infty$$

用 J_1 乘 (1) 式, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial M} + \frac{1}{A} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial M} - \frac{A'}{M} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

它们是线性的。上式分别对 M 和 θ 求导后, 消去 α 或消去 β , 求得单独对于 α 或 β 的二阶线性方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial M^2} + \left(\frac{1}{M} - \frac{A''}{A'} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial M} + \frac{A'}{M A} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} + \frac{A'}{A} \frac{\partial \beta}{\partial M} + \frac{A'}{M A} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

利用 (2) 式, 上式又可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial M^2} + \left[g(M) - \frac{g'(M)}{g(M)} + \frac{1}{M} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial M} - \frac{g(M)}{M} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} - g(M) \frac{\partial \beta}{\partial M} - \frac{g(M)}{M} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

观察 (2) 式中的 $\lambda(M) = 2/K(M)$ 可知它是慢变函数, 见表 1 和图 1。

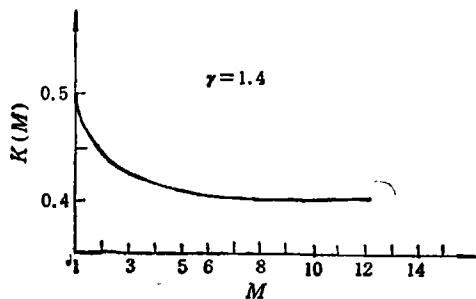


图 1

表 1

	$K(M)$	$\lambda(M)$
$M = 1$	0.5	4
$M = \infty$	0.4	5

所以在 M 值变化的不同区间内分别研究时, 例如在 $4 < M < \infty$ 时, 可取 $K(\bar{M}) = 0.4$ 或 $\lambda(\bar{M}) = 5$ 当 $\gamma = 1.4$ 。式中 $\bar{M}$ 是该区间内 M 的平均值(中值)。取 $\lambda(\bar{M}) = \text{常数}$ 则

$$g(M) + \frac{1}{M} - \frac{g'(M)}{g(M)} = \frac{M}{M^2 - 1} [\lambda(\bar{M}) + 2], \quad (6)$$

于是 (5) 式可写成

$$\left. \begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial M^2} - [\lambda(\bar{M}) + 2] M \frac{\partial \alpha}{\partial M} + \lambda(\bar{M}) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} &= 0 \\ (1 - M^2) \frac{\partial^2 \beta}{\partial M^2} + M \lambda(\bar{M}) \frac{\partial \beta}{\partial M} + \lambda(\bar{M}) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. 方程的求解

令 $\alpha = P_1(M)Q_1(\theta)$, $\beta = P(M)Q(\theta)$ 代入 (7) 式, 分离变量后得

$$(1 - M^2)P_1' - [\lambda(\bar{M}) + 2]MP_1' - m^2\lambda(\bar{M})P_1 = 0 \quad (8)$$

$$(1 - M^2)P'' + M\lambda(\bar{M})P' - m^2\lambda(\bar{M})P = 0 \quad (9)$$

$$Q'' + m^2Q = 0 \quad (10)$$

以及 $Q = Q_1$ 式中 $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ 于是

$$Q(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m e^{im\theta} + D_m e^{-im\theta}) \quad (11)$$

1) 强激波的解.

当 $M \gg 1$ 时, $(M^2 - 1) \rightarrow M^2$, $\lambda(\bar{M}) = \lambda(\infty) = h = 5.0743 \approx 5$ (8) 和 (9) 式写成欧拉方程

$$M^2 P_1' + [\lambda(\bar{M}) + 2]MP_1' + m^2\lambda(\bar{M})P_1 = 0 \quad (12)$$

$$M^2 P'' - M\lambda(\bar{M})P' + m^2\lambda(\bar{M})P = 0 \quad (13)$$

以 $P_1 = M^{y_1}$ 及 $P = M^y$ 代入, 得

$$y_1 = -y = \frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{-2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda(\bar{M})m^2}{[\lambda(\bar{M}) + 1]^2}} \right] \quad (14)$$

于是得到强激波的解:

$$\alpha(\theta, M) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m M^{y_1} (e^{im\theta} + e^{-im\theta}) \quad (15)$$

$$\beta(\theta, M) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m M^y (e^{im\theta} + e^{-im\theta}) \quad (16)$$

式中 F_m 和 G_m 为待定常数.

2) 弱激波的解.

当 $M \rightarrow 1$ 时, (9) 式写成 $MP' - m^2P = 0$ 得 $P = M^{m^2}$, (8) 式写成

$$[\lambda(\bar{M}) + 2]MP_1' + m^2\lambda(\bar{M})P_1 = 0$$

得到 $P_1 = M^{\frac{-\lambda(\bar{M})m^2}{\lambda(\bar{M})+2}}$, 弱激波的解是

$$\alpha(\theta, M) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m M^{\frac{-\lambda(\bar{M})m^2}{\lambda(\bar{M})+2}} \cdot (e^{im\theta} + e^{-im\theta}), \quad (17)$$

$$\beta(\theta, M) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m M^{m^2} \cdot (e^{im\theta} + e^{-im\theta}), \quad (18)$$

式中 $\lambda(\bar{M} = 1) = 4$, 故 (17) 式写成

$$\alpha(\theta, M) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m M^{-\frac{2}{3}m^2} (e^{im\theta} + e^{-im\theta}) \quad (19)$$

3) 中等强度的激波 $4 \leq M < \infty$.

已知超几何方程

$$Z(1-Z)u''(z) + [T - (R+S+1)z]u'(z) - RSu(z) = 0 \quad (20)$$

的解是

$$u(z) = AF(R, S, T, Z) + BZ^{1-T}F(1-T+R, 1-T+S, 2-T, Z), \quad (21)$$

式中 Z 可以是复数自变量, 参数 R, S, T 可以取复数值, A, B 是常数. 超几何级数

$$\begin{aligned} F(R, S, T, Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R)_k (S)_k}{(T)_k} \frac{Z^k}{K!} \\ &= \frac{\Gamma(T)}{\Gamma(R)\Gamma(S)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(R+K)\Gamma(S+K)}{\Gamma(T+K)} \cdot \frac{Z^k}{K!}, \quad |Z| < 1, \end{aligned} \quad (22)$$

记号

$$(R)_k = R \cdot (R+1) \cdots (R+K-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

伽玛函数 $\Gamma(Z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{Z-1} dt$, 如令 $Z = M^2$, (20) 式写成

$$(1-M^2) \frac{d^2 U}{dM^2} + 2 \left[\left(T - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{M} - \left(R + S + \frac{1}{2} \right) M \right] \frac{dU}{dM} - 4RSU = 0 \quad (23)$$

比较 (23) 和 (8) 式, 若

$$T = \frac{1}{2}, \quad R + S = \frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{2}, \quad RS = \frac{m^2}{4} \lambda(\bar{M})$$

则 (23) 和 (8) 式相同, 解出

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{2} \right)^2 - m^2 \lambda(\bar{M})} \right], \quad (24)$$

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{2} \right)^2 - m^2 \lambda(\bar{M})} \right], \quad (25)$$

(8) 式的解

$$P_1 = AF\left(R, S, \frac{1}{2}, M^2\right) + B \cdot M \cdot F\left(R + \frac{1}{2}, S + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, M^2\right). \quad (26)$$

$$\alpha(\theta, M) = \sum_{m=0}^{\infty} P_1 \cdot (e^{im\theta} + e^{-im\theta})$$

就是通解.

当 $m=0$ 时, $S=0$, $R = \frac{\lambda(\bar{M}) + 1}{2}$, (8) 式写成

$$(1-M^2)P_1'' - [\lambda(\bar{M}) + 2]MP_1' = 0$$

可用降阶法求出

$$\frac{dP_1}{dM} = \frac{C_1}{(1-M^2)^{[\lambda(\bar{M})+2]/2}}, \quad P_1 = C_1 \int \frac{dM}{(1-M^2)^{[\lambda(\bar{M})+2]/2}}$$

当 $m=1$ 时 $S = \frac{1}{2}$, $R = \frac{\lambda(\bar{M})}{2}$ 所以 $m=1$ 时的超几何级数是

$$F\left(\frac{\lambda(\bar{M})}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, M^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda(\bar{M})}{2}\right)_k \frac{M^{2k}}{K!}$$

当 $m>1$ 时, 由于 $\lambda(M) \leq 5$, 在 (24) 式根号中出现负值, R, S 为复数, (22) 有复系数, 说明有激波-激波出现.

同样可求 β , 只须取 $T = \frac{1}{2}$, 而 R 和 S 由 (24) 和 (25) 式算出后乘以 (-1) 即可.

超几何级数的解析延拓, 在具有割口 $(1, \infty)$ 的平面上是正规的, 而当 $|Z| < 1$ 时, 它与 (22) 表示的级数相等, Z 在具有割口 $(1, \infty)$ 的平面上时, 用以下式子:

$$F(R, S, T, Z) = \frac{\Gamma(T)}{\Gamma(S)\Gamma(T-S)} \int_0^1 t^{S-1}(1-t)^{T-S-1}(1-tZ)^{-R} dt \quad (27)$$

它可以是复数积分, 要求 $R_c(T) > R_c(S) > 0$.

实际上当 $4 < M < \infty$ 时, 解用 (27) 式表示.

4) 当 $1 < M < 4$ 时

用线性近似 $\lambda(M) = C_1 + C_2 M$

$$g(M) = \frac{M}{M^2 - 1} (C_1 + C_2 M) = \frac{-\lambda''}{A} \quad \text{代入}$$

求 β 的 (5) 式后, 分离变量, 得

$$Q'' + m^2 Q = 0 \\ (M^2 - 1)P'' - M(C_1 + C_2 M)P' + m^2(C_1 + C_2 M)P = 0 \quad (28)$$

在 $1 < M < 4$ 区域内选定某点 $M = \bar{M} = \text{常数}$, 如 $\bar{M} = 2.5$ 则 $\left| \frac{M - \bar{M}}{\bar{M}} \right| < 1$, 作级数展开

$$P(M) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{M - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^k, \quad (29)$$

(28) 的系数也用 $\frac{M - \bar{M}}{\bar{M}}$ 表示, $M = \bar{M} + \bar{M} \left(\frac{M - \bar{M}}{\bar{M}} \right)$

$$M^2 - 1 = (\bar{M})^2 - 1 - 2(\bar{M})^2 \left(\frac{M - \bar{M}}{\bar{M}} \right) + (\bar{M})^2 \left(\frac{M - \bar{M}}{\bar{M}} \right)^2$$

代入 (28) 后, 比较 $\frac{M - \bar{M}}{\bar{M}}$ 的同次幂的系数, 得递推公式

$$a_2 = \frac{-(C_1 + C_2 \bar{M})a_1 + m^2(C_1 + C_2 \bar{M})a_0}{-2 \frac{(\bar{M})^2 - 1}{(\bar{M})^2}},$$

$$a_{k+2} = \{ (K+1)(2K - C_1 - C_2 \bar{M})a_{k+1} + [K(K-1) + (m^2 - K)C_1 + (m^2 - 2K)C_2 \bar{M}]a_k + m^2 C_2 \bar{M} a_{k-1} \} / \left\{ -\frac{(\bar{M})^2 - 1}{(\bar{M})^2} (K+2)(K+1) \right\}, \quad (30)$$

所以可以用 a_0 和 a_1 这两个待定系数来决定 (29) 式中的 a_k , 于是求得

$$\beta(\theta, M) = P(M)Q(\theta)$$

由 (3) 求得 $\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial \alpha}{\partial M}$ 则得

$$\alpha(\theta, M) = \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \alpha}{\partial M} dM \right),$$

因 $J \neq 0 \neq \infty$ 应能由 $\alpha(\theta, M)$ 和 $\beta(\theta, M)$ 求出 $\theta(\alpha, \beta)$ 和 $M(\alpha, \beta)$.

4. 结语

通解中的待定常数由初边值条件决定,通常取被绕射的固壁表面的方程为 $\beta = 0$, 并用极坐标 $r(\theta)$ 表示,则沿固壁表面的元弧长

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta = M d\alpha.$$

等式左端已知,右端 $\alpha(\theta, M)$ 已求出,则可决定通解中的待定常数。用 Whitham 方法,在 A 或 M 变化剧烈时,误差变大,所导出的各式只适用于 M 变化不剧烈的情况。

参 考 文 献

- [1] Whitham, G. B. *Linear and NonLinear waves*, Wiley Pub., N. Y. (1974), 277—288.
- [2] Whitham, G. B. A new approach to problems of shock dynamics. Part 1. Two-dimensional Problems. *J. Fluid Mech.* 2(1957), 146—171.
- [3] Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience N. Y. (1962).
- [4] Miller, K. S. *Partial differential equations in Engineering Problems*. Prentice-hall, Book Co. INC. (1953), 86—99.

GENERAL SOLUTION OF UNSTEADY TWO-DIMENSIONAL SHOCK WAVE FOR ANY MACH NUMBER

Cheng Panqing

(Dept. of Modern Mechanics, Univ. of Science and Technology of China)

Abstract By using Whitham's rule, a general solution of unsteady two-dimensional shock wave for any Mach number is given in the form of series.

In this paper, we have discussed the following cases:

- (1) if $M \rightarrow 1$, we call it weak shock wave;
- (2) if $1 < M < 4$, Linear approximation can be applied;
- (3) if $4 < M < \infty$ the solution can be expressed in terms of hypergeometric series;
- (4) if $M \gg 1$, i.e. strong shock wave case, the coefficients in the general solution can be determined by initial and boundary conditions.

Key words shock wave dynamics, shock, waves, gas dynamics, two-dimensional flow equations.