

以加权残数法为基础的有限元模型¹⁾

杨海元 赵志岗 倪力军

(天津大学力学系)

摘要 本文就弹性力学问题,给出了有限元方法的最一般的加权残数方程,并以此为基础导出了协调、平衡和混合-杂交等有限元模型。在方程建立中,处理了单元交界连续性问题并对目前有限元方法一些问题进行了讨论。指出,适当选择权函数,可以由加权残数法导出现有的、以变分原理为基础的各种有限元模型。揭示了加权残数法更加广泛应用的可能性。

关键词 加权残数法,有限元,变分原理。

一、引言

加权残数法是直接从微分方程出发解决物理和工程问题的有效数值方法之一。许多研究成果,如[1],表明,在一些情况下,与有限元法比较,它有精度高,计算量小,简单直观等优点。尽管如此,当求解区域或边界条件或载荷分布复杂时,却很难期待由加权残数法,通过在整域内假设统一的试函数,来获得满意的解答。因此,用加权残数法来建立有限元模型,有着很大吸引力。近十余年来,一些学者在这方面做了不少工作,并已取得若干成果,如[2]、[3]、[4]。但是,到目前为止,一方面,用于有限元的一般加权残数方程尚未建立;另一方面,一些重要的有限元模型,如杂交模型,也还未曾涉及。

本文首先就弹性力学问题给出最一般的加权残数法有限元方程。其次,在此基础上建立几种典型的有限元模型。在此过程中,我们将会看到,选取适当的权函数,这些模型将化为目前常见的以变分原理为基础的几种模型。由于加权残数法鲜明的直观性,单元向交界处的连续性要求被突出出来,必须正确处理,另外,一些有限元模型的数学-力学本质更容易看出,与经过各种泛函的变分来建立有限元相比,更有益于人们对有限元方法的认识和研究。

二、加权残数法有限元的一般方程

对于弹性力学问题,用于有限元法的最一般的加权残数方程,可写为²⁾:

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] W_{ij} dV + \int_{V_e} (e_{ij} - C_{ijkl} \sigma_{kl}) W_{ij}^{*} dV \right.$$

1) 中国科学院科学基金资助项目。本文曾在第二届全国加权残数法学术会议上报告,1986年4月,杭州;并刊载于 Proc. Int. Conf. on Computational Mechanics, May, 1986, Tokyo, Japan.

本文于1987年5月27日收到。

2) 这里,为简单,限于静力和小变形。推广于动力和有限变形问题,并无原则困难。

$$\begin{aligned}
& + \int_{V_e} (\sigma_{ij,i} + f_i) W_i dV + \int_{S_{ae}} (u_i - \tilde{u}_i) \tilde{W}_i dS - \int_{S_{ie}} (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) \tilde{W}_i^1 dS \\
& + \int_{S_{2e}} (\tilde{u}_i - \bar{u}_i) \tilde{W}_i^2 dS - \int_{S_e} F_{ni} \tilde{W}_i^3 dS \Big\} = 0, \\
& i, j, k, l = 1, 2, 3^D
\end{aligned} \quad (1)$$

式中 V_e 为单元 e 所占空间, S_{ie} 及 S_{2e} 分别为 V_e 边界面 S_{ae} 的外力给定 ($\bar{F}_{ni}$) 和位移给定 ($\bar{u}_i$) 部分, S_e 为单元 e 与相邻单元交界面, 一般情况下有 $S_{ae} = S_{ie} + S_{2e} + S_e$, σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 及 u_i 分别为单元域内应力、应变及位移, $\tilde{u}_i$ 为单元界面位移, F_{ni} 为表面应力 ($F_{ni} = \sigma_{ij} n_j$, n_j 为界面外法线方向余弦), f_i 为体积力, C_{ijkl} 为弹性常数, W_{ii} 、 W_{ij}^1 及 W_i 为域内权函数, $\tilde{W}_i$ 、 $\tilde{W}_i^1$ 、 $\tilde{W}_i^2$ 及 $\tilde{W}_i^3$ 为边界权函数, $\sum_e$ 指对单元求和。

(1) 式中的变量 σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 、 u_i 及 $\tilde{u}_i$ 皆可独立假设, 除 $\tilde{u}_i$ 按其含义应为相邻单元所共有外, 其它约束条件。各权函数应为独立的任意完备系。最后一项在 S_e 上的积分是为保证在单元交界处内力的连续性而设。内力连续性条件的此种写法要求权函数 $\tilde{W}_i^3$ 在跨越 S_e 时有 C^0 连续性, 即 $\tilde{W}_i^3$ 应为相邻单元所共用。

(1) 式的正确性和普遍性是显而易见的。下面我们将看到, 以它为基础可导出各种有限元模型。

三、有限元协调模型

协调模型以结点位移为变量, 以结点位移插值函数为单元内和单元界面位移场并要求位移满足 S_e 上的边界条件。应力应由位移所对应的应变经本构关系求得。于是, (1) 式退化为

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} (\sigma_{ij,i} + f_i) W_i dV - \int_{S_{ie}} (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) \tilde{W}_i^1 dS - \int_{S_e} F_{ni} \tilde{W}_i^3 dS \right\} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

值得注意的是, 这里只保证 u_i 在跨越 S_e 时的 C^0 连续性, 亦即, 在一般情况下不保证内力跨越单元的连续性, 所以, (2) 式最后一项在 S_e 上的积分不能去掉。

由于 (2) 式中的三个积分分属不同区域, 所以, 不失一般性, 可取诸权函数相同, 即边界权函数相当于域内权函数在边界上的取值, 于是, (2) 式化为

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} (\sigma_{ij,i} + f_i) W_i dV - \int_{S_{ie}} (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) W_i dS - \int_{S_e} F_{ni} W_i dS \right\} = 0 \quad (3)$$

当然, 也可以只取边界权函数 $\tilde{W}_i^1 = \tilde{W}_i^3 = \tilde{W}_i$, 即

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} (\sigma_{ij,i} + f_i) W_i dV - \int_{S_{ie}} (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) \tilde{W}_i dS - \int_{S_e} F_{ni} \tilde{W}_i dS \right\} = 0 \quad (3a)$$

上述三式都非常直接地把有限元协调模型的根据揭示了出来, 使我们很容易看清该模型在各种具体情况下的实质。例如, 人们熟知的弹性力学平面问题常应变三角形单元, 当体积力不计时, 由于单元域内平衡条件已经满足, (2) 式化为

1) 这种记法表示各脚标 i, j, k, l 的取值范围皆为 1, 2, 3。下同。

$$\sum_e \left\{ \int_{s_{ie}} (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) \tilde{W}_i dS + \int_{s_e} F_{ni} \tilde{W}_i dS \right\} = 0$$

因而所处理的只是单元间内力连接和力边界条件问题。

现在我们对(3)式做进一步研究。若权函数 W_i 在 V_e 内一阶可导, 则利用 Gauss 公式, (3)式可化为

$$\sum_e \left\{ - \int_{V_e} \sigma_{ij} W_{i,j} dV + \int_{V_e} f_i W_i dV + \int_{s_{ie}} \bar{F}_{ni} W_i dS + \int_{s_{ie}} F_{ni} W_i dS \right\} = 0 \quad (4)$$

若取权函数 $W_i = u_i$, 则(3)式即是广义伽辽金法方程, 即可不全部满足边界条件的伽辽金法, (4)式即是全量形式的虚位移原理的有限元形式。若取权函数 $W_i = \delta u_i$, (4)式即是通常的虚位移原理的有限元形式, 也就是弹性力学势能原理的有限元变分式, 这时, 应有在 S_e 上 $W_i = \delta u_i = 0$ 。但是, 对于加权残数法, W_i 的选取则不限于这些, 它是相当灵活的。

在计算实践中, 可以从(2)或(3)或(3a)式出发, 在遵守相应条件后, 也可以从(4)式出发。为说明方程的应用, 现在我们从(3)或(3a)式出发研究一下弹性力学平面问题。

如果在单元内和单元边界上皆使用配点法, 则加权残数方程无论取(3)或(3a)式皆可写为以下三组:

$$\sum_e \{ (\sigma_{ij,i} + f_i) |_{x_1=x_1^{(l)}, x_2=x_2^{(l)}} \} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, l_1 \quad (5a)$$

$$\sum_e \{ (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) |_{x_1=x_1^{(m)}, x_2=x_2^{(m)}} \} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, m_1 \quad (5b)$$

$$\sum_e \{ (F_{ni}) |_{x_1=x_1^{(n)}, x_2=x_2^{(n)}} \} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, n_1 \quad (5c)$$

式中 l_1 、 m_1 和 n_1 依次为单元域 A_e 内、单元边界 C_{ie} 上和单元交界 C_e 上配点总数。

如果采用单元域内配线、边界配点的配线混合法[1], 并取配线与边界的交点为配点, 则无论配线上的权函数如何取(含分段配线法), 皆可从(3)式出发, 并有如下的残数方程

$$\begin{aligned} \sum_e \left\{ \left(\frac{p_l^1}{p_l^2} \right) [(\sigma_{ij,i} + f_i) W_i^{(k)}]_{x_2=p_l(x_1)} \cdot \sqrt{1 + p_l'(x_1)^2} dx_1 \right. \\ \left. - \int_{C_{ie}} [(F_{ni} - \bar{F}_{ni}) W_i^{(k)}]_{x_2=p_l(x_1)} ds \right. \\ \left. - \int_{C_e} [F_{ni} W_i^{(k)}]_{x_2=p_l(x_1)} ds \right\} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, k_1; \quad l = 1, 2, \dots, l_1 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $W_i^{(k)}$ 是权函数序列 W_i 中的第 k 个函数, k_1 是拟取的函数个数, $x_2 = p_l(x_1)$ 是第 l 条配线方程, l_1 是拟取的配线数, P_l^1 和 P_l^2 是第 l 条配线与单元边界的交点。

四、有限元平衡模型

平衡模型要事先假设在单元内满足平衡方程, 在 S_1 上满足力边界条件, 在跨越 S_e 时满足内力连续条件的应力 σ_{ij} 。应变 ϵ_{ij} 则经本构方程由应力求出。这时, (1)式退化为

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] W_{ij} dV + \int_{s_{ie}} (u_i - \tilde{u}_i) \tilde{W}_i dS \right\}$$

$$+ \int_{S_{2e}} (\tilde{u}_i - \bar{u}_i) \tilde{W}_i dS \} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

这里要注意的是, 由于并不单独假设单元边界位移 $\tilde{u}_i$, 所以 (7) 式中在 S_{2e} 上的积分相应于 S_{2e} 上的位移边界条件, 在 S_{ae} 上的积分相应于跨越 S_e 时的位移连续条件, 而后者可写为

$$\sum_i \int_{S_{ab}} (u_i^a - u_i^b) \tilde{W}_i dS = 0$$

其中 S_{ab} 代表 a, b 二相邻单元的交界面, $\sum_i$ 代表对所有单元交界 S_i 求和。为将上式并入对单元求和的 (7) 式, 可引入定义在 V_e 内的权函数 $\tilde{W}_{ij}$, 而将权函数 $\tilde{W}_i$ 取为 $\tilde{W}_{ij} n_j$ 。于是, (7) 式化为

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + u_{i,j}) \right] W_{ij} dV + \int_{S_e} u_i \tilde{W}_{ij} n_j dS + \int_{S_{2e}} (u_i - \bar{u}_i) \tilde{W}_i dS \right\} = 0 \quad (8)$$

此式要求 $\tilde{W}_{ij} n_j$ 有跨越 S_e 的 C^0 连续性。

若 W_{ij} 满足对称条件, $W_{ij} = W_{ji}$ 且在 V_e 内一阶可导, 再取诸权函数相同, 即 $\tilde{W}_i = \tilde{W}_{ij} n_j = W_{ij} n_j$, 则利用 Gauss 公式 (8) 式可化为

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} e_{ij} W_{ij} dV + \int_{V_e} u_i W_{ii,j} dV - \int_{S_{1e}} u_i W_{ij} n_j dS - \int_{S_{2e}} \bar{u}_i W_{ij} n_j dS \right\} = 0 \quad (9)$$

显然, 当取 $W_{ij} = \sigma_{ij}$ 时, (9) 式即全量形式的虚应力原理; 当取 $W_{ij} = \delta \sigma_{ij}$ 时, (9) 式即通常的虚应力原理 (即余虚功原理) 或最小余能原理的变分式。在后一情况下, 应有

$$\left. \begin{aligned} W_{ii,j} = \delta \sigma_{ii,j} &= 0, & \text{在 } V_e \text{ 内} \\ W_{ij} n_j = n_j \delta \sigma_{ij} &= \delta F_{ni} = 0, & \text{在 } S_{1e} \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

这时, 并且只有这时, (9) 式中的 u_i 才不再出现, 有限元的平衡模型才能实现。可见, 以加权残数法为基础的、纯粹的有限元平衡模型实际上是没有意义的。

五、混合-杂交有限元模型

在单元内独立假设应变 e_{ij} (或应力 σ_{ij}) 和位移 u_i , 在单元边界假设位移 $\tilde{u}_i$, 并使 $\tilde{u}_i$ 满足 S_1 上的边界条件。这时, 我们可以分两步建立有限元模型。

第一步, 先对每个单元保证几何性要求。按 (1) 式, 应有加权残数方程

$$\int_{V_e} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] W_{ij} dV + \int_{S_{ae}} (u_i - \tilde{u}_i) \tilde{W}_i dS = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

若 $W_{ij} = W_{ji}$, $\tilde{W}_i = W_{ij} n_j$, 且 W_{ij} 在 V_e 内一阶可导, 上式可化为

$$\int_{V_e} e_{ij} W_{ij} dV + \int_{V_e} u_i W_{ii,j} dV - \int_{S_{ae}} \tilde{u}_i W_{ij} n_j dS = 0 \quad (11)$$

注意到在这一步单元的整个边界 S_{ae} 可以暂时地看成 S_{2e} , 当取权函数 $W_{ij} = \delta \sigma_{ij}$, 并且

$W_{ii,i} = \delta\sigma_{ii,i} = 0$, 从而把(11)式作为余能原理变分式使用时, 只要在单元 V_e 内假设应变 e_{ij} (或应力 σ_{ij}), 在单元边界 S_{ae} 上假设位移 $\tilde{u}_i$ 就够了, 这正是卞学锁在他的假设应力杂交模型中所做的。

在计算实践中, 我们可以选择任一种权函数方案, 从而由(10)式获得 e_{ij} 中的参数与 u_i 和 $\tilde{u}_i$ 中的参数间的关系。

第二步, 令所设应变 e_{ij} (或应力 σ_{ij}) 在整个结构(物体)范围内满足平衡性要求, 这时, 应有加权残数方程

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} (\sigma_{ii,i} + f_i) W_i dV - \int_{S_{ie}} (F_{ni} - \bar{F}_{ni}) \tilde{W}_i dS - \int_{S_e} F_{ni} \tilde{W}_i^3 dS \right\} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (12)$$

这里的应力 σ_{ij} 应由所设应变 e_{ij} 经本构关系求得。要注意的是, 由于应变 e_{ij} 是在各单元内独立假设的, 单元间应力 F_{ni} 的连续性不能保证, 所以上式中在 S_e 上的积分不能去掉。

在选定(12)式中权函数方案后, 即可将由第一步获得的以位移参数表示的应变代入, 以建立求解位移参数的方程组。

由(12)式明显可见, 若在第一步对每个单元使用余能原理, 第二步对整体结构(物体)使用势能原理, 或与此等价, 如卞学锁所做的, 将修正的余能泛函依次对应力和单元边界位移变分, 由于所设应变(或应力)在单元内已满足平衡方程, 所以第二步实际上只是在解决力边界条件和单元间的内力连接问题, 即, 结构被划分为若干单元后的整体平衡问题。

参 考 文 献

- [1] Yang, H. Y. and Zhao, Z. G., *Int. J. Computers and Structures*, **21** (1985), 671—680.
- [2] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering*, 2nd edn. McGraw-Hill, London (1971).
- [3] Kwok, W. L., Cheung, Y. K. and Delcourt, C., *Int. J. Numerical Method in Engineering*, **11** (1977), 1391—1404.
- [4] Carey, G. F., Cheung, Y. K. and Lau, S. L., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **22**(1980), 121—130.

FINITE ELEMENT MODELS BASED ON THE METHOD OF WEIGHTED RESIDUALS

Yang Haiyuan, Zhao Zhigang and Ni Lijun

(Department of Mechanics, Tianjin University)

Abstract The most general equation of weighted residuals for finite element method is presented and based on that the compatibility, equilibrium and mixed/hybrid models are deduced. It is pointed out that with the weight functions being appropriately chosen those models will reduce to the well-known ones which are based on the variational principles. The problem about the conditions of continuity of some variables acrossing the interface of elements and some other substantial problems in current finite element method are discussed.

Key words Method of weighted residuals, Finite element, Variational principles.