

二阶散射波的渐近解、辐射条件 与能量特性

黄 河 宁

(国家海洋局海洋环境保护研究所)

李 鉴 初 王 学 庚

(大连工学院)

摘要 设入射波为 Stokes 二阶波,通过对二阶远场散射问题的研究,得出了二阶散射波渐近解的一般形式,推导出了二阶散射波辐射条件的数学表达式。证明了二阶散射波的能量有两个来源:其一为二阶入射波,其二为一阶流场。对应于不同来源的两个二阶散射波向外的能流在 r 方向的变化率以不同的量级衰减。

关键词 二阶散射波,渐近解,辐射条件,能流,能量特性

一、引 言

近年来,关于作用在大型海上建筑物上的非线性波浪力问题引起了许多学者的重视。由于问题的复杂性,绝大多数的研究局限于二阶非线性波浪绕射问题。即假定入射波为 Stokes 二阶波。分别求解一阶和二阶散射波的定解问题。

关于二阶散射波的辐射条件,一直是一个有争议的问题。在一些文献[1—6]中,所给出的二阶散射波辐射条件的表达式各不相同,而在另一些文献[7—12]中,没有写出它的表达式。Hunt 和 Baddour^[2]认为二阶散射波辐射条件不同于一阶散射波辐射条件,它应在一阶问题求解之后才能导出。周清甫^[13]认为在无限水深情况,二阶散射波辐射条件仍为 Sommerfeld 条件。

在一阶散射问题中,对于远离建筑物的远场,一阶散射势满足的拉普拉斯方程可以化为二维亥姆霍茨方程或称约化的波动方程^[14],因而可以自然地引进 Sommerfeld 条件做为—阶散射问题的辐射条件。

然而,在二阶散射问题中,由于二阶散射势场受到一阶流场的影响,既使在远场,二阶散射势满足的拉普拉斯方程也不能化为单一的二维亥姆霍茨方程。因此,不能如同一阶情况自然地引进 Sommerfeld 条件做为二阶散射波的辐射条件。

事实上,辐射条件完全可以由散射波的渐近解来导出。这个渐近解应满足拉普拉斯方程、自由表面条件和海底不透水条件,且满足物理意义下的辐射条件——即渐近解应为向外传播的波。Bai 和 Yeung^[15]由这样的概念,导出了三维问题—阶散射波辐射条件,结果与 Sommerfeld 条件是相似的。

本文于 1986 年 8 月 10 日收到第一次稿,于 1987 年 8 月 8 日收到修改稿。

作者曾给出了 $x-z$ 平面二维问题的二阶散射波辐射条件及算例^[4]。本文首先通过对三维二阶远场散射问题的研究,寻求三维问题二阶散射波的渐近解,并利用这一渐近解导出三维问题二阶散射波的辐射条件。然后进一步将二阶散射问题分解为两个定解问题,即对应于齐次自由表面条件的问题和对应于齐次物面条件的问题^[4,5,7]。利用格林公式,分别对这两个问题所确定的二阶散射波的能量特性进行了分析。

二、一阶和二阶定解问题

波浪散射问题的求解域和坐标系如图 1 所示。图中 S_f 表示自由水面, S_b 表示建筑物表面, S_s 表示海底, S_∞ 表示 $r \rightarrow \infty$ 的圆柱面。假定流体为无粘无旋不可压缩的理想流体。则波浪场的速度势 Φ 满足的方程及边界条件为:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad S_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad S_b \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = \eta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g\eta = 0 \quad z = \eta \quad (5)$$

将 Φ 和 η 展成小参数 ε 的幂级数:

$$\Phi = \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots \quad (6)$$

$$\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots \quad (7)$$

式中 $\varepsilon = \frac{1}{2} kH$, H, k 分别为一阶入射波波高和波数。

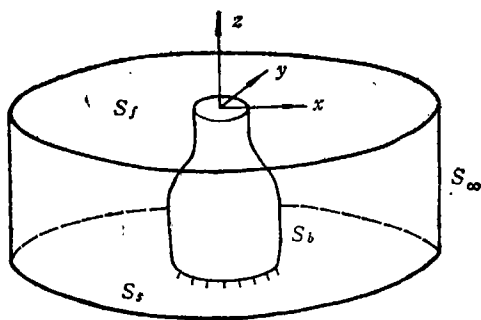


图 1 波浪散射问题求解域和坐标系

将(6)和(7)式代入(1)–(5),整理后可以形成关于 Φ_1 和 Φ_2 的定解问题。

1. 一阶散射问题

引进复变量来方便计算,将入射波与散射波分开,并分离出时间因子 $e^{-i\omega t}$,即设:

$$\Phi_1 = \text{Re}[(\phi_1^i + \phi_1^s)e^{-i\omega t}] \quad (8)$$

式中 ω 为圆频率, ϕ_1^s 为一阶复散射势, ϕ_1^i 为一阶复入射势:

$$\phi_1^i = -i \frac{\omega}{K^2} \text{ch} k(z+d) / \text{sh} kd \cdot e^{ikx} \quad (9)$$

式中 d 为水深。

ϕ_1^s 满足如下的控制方程和边界条件:

$$\nabla^2 \phi_1^s = 0 \quad \Omega \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_1^s}{\partial z} = 0 \quad S_z \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_1^s}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1^s = 0 \quad S_f \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi_1^s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_1^i}{\partial n} \quad S_b \quad (13)$$

$$\sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_1^s}{\partial r} - ik \phi_1^s \right) \rightarrow 0 \quad S_\infty \quad (14)$$

(14)式即著名的 Sommerfeld 条件。

2. 二阶散射问题

对于二阶问题也可以引进复变量来方便计算,即设:

$$\Phi_2 = \text{Re}[(\phi_2^i + \phi_2^s)e^{-2i\omega t}] \quad (15)$$

式中 ϕ_2^s 为二阶复散射势, ϕ_2^i 为二阶复入射势:

$$\phi_2^i = -i \frac{3}{8} \frac{\omega}{k^2} \text{ch} 2k(z+d)/\text{sh}^4 kd \cdot e^{2ikx} \quad (16)$$

利用恒等式:

$$\text{Re}(Ae^{i\omega t}) \cdot \text{Re}(Be^{i\omega t}) = \frac{1}{2} \text{Re}(ABe^{2i\omega t}) + \frac{1}{2} \text{Re}(AB^*) \quad (17)$$

可以形成关于 ϕ_2^s 的定解问题:

$$\nabla^2 \phi_2^s = 0 \quad Q \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi_2^s}{\partial z} = 0 \quad S_z \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_2^s}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \phi_2^s = f_1(\phi_1^s) + f_2(\phi_1^s, \phi_1^i) \quad S_f \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi_2^s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_2^i}{\partial n} \quad S_b \quad (21)$$

辐射条件

$$S_\infty \quad (22)$$

式中 $f_1(\phi_1^s)$ 仅为 ϕ_1^s 的函数, $f_2(\phi_1^s, \phi_1^i)$ 为 ϕ_1^s 和 ϕ_1^i 的函数:

$$f_1(\phi_1^s) = -\frac{i\omega}{2g} \phi_1^s \left[-\frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi_1^s}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi_1^s}{\partial z^2} \right] + i \frac{\omega}{g} (\nabla \phi_1^s)^2 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f_2(\phi_1^s, \phi_1^i) = & -\frac{i\omega}{2g} \phi_1^s \left[-\frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial z^2} \right] - \frac{i\omega}{2g} \phi_1^i \\ & \cdot \left[-\frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi_1^s}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi_1^s}{\partial z^2} \right] + 2i \frac{\omega}{g} \\ & \cdot \left[\frac{\partial \phi_1^s}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^s}{\partial y} \frac{\partial \phi_1^i}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1^s}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_1^i}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

三、二阶散射波渐近解和辐射条件

1. 有限水深情况

考虑 r 足够大的远场,无论结构物的形状如何,一阶散射波的渐近解可以写成如下的

形式:

$$\phi_1^s = \frac{\omega}{k^2 \sqrt{kr}} \frac{\text{ch} k(z+d)}{\text{sh} kd} g_1(\theta) e^{ikr} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (25)$$

式中 $g_1(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos m\theta$, α_m 为待定系数。

利用(9)和(25)式,可以得到二阶自由表面条件右端项的渐近形式:

$$f_1(\phi_1^s) = -i \frac{3g}{2\omega \text{ch}^2 kd} \cdot \frac{1}{kr} e^{2ikr} \cdot g_1^2(\theta) + O(r^{-2}) \quad (26)$$

$$f_2(\phi_1^s) = [3\text{th}^3 kd - 1 - 2\cos\theta] \frac{g}{\omega \sqrt{kr}} e^{ikr(1+\cos\theta)} \cdot g_1(\theta) + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (27)$$

将(26)、(27)式代入(20)。在远场求解二阶散射问题,则得到二阶散射波的渐近解为:

$$\begin{aligned} \phi_2^s = & g_{21}(\theta) \frac{\omega}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda r}} \frac{\text{ch} \lambda(z+d)}{\text{ch} \lambda d} e^{i\lambda r} + g_{22}(\theta) \frac{\omega}{k^2} \frac{1}{\sqrt{kr}} \\ & \cdot \text{ch}[k\sqrt{2+2\cos\theta}(z+d)] e^{ikr(1+\cos\theta)} \\ & + \frac{\omega}{k^2} g_{23}(\theta) \frac{1}{kr} \cdot \text{ch} 2k(z+d) e^{2ikr} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $g_{21}(\theta)$ 、 $g_{22}(\theta)$ 、 $g_{23}(\theta)$ 仅为 θ 的函数:

$$g_{21}(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \cos m\theta \quad (29)$$

$$g_{22}(\theta) = \frac{(3\text{th}^2 kd - 1 - 2\cos\theta)g_1(\theta)}{\text{th} kd[\sqrt{2+2\cos\theta} \cdot \text{sh}(kd\sqrt{2+2\cos\theta}) - 4\text{th} kd \cdot \text{ch}(kd\sqrt{2+2\cos\theta})]} \quad (30)$$

$$g_{23}(\theta) = \frac{-3ig_1^2(\theta)}{4\text{th} kd \cdot \text{ch}^2 kd (\text{sh} 2kd - 2\text{th} kd \cdot \text{ch} 2kd)} \quad (31)$$

式中 β_m 为待定系数。 λ 由下式确定:

$$\frac{4\omega^2}{g} - \lambda \text{th} \lambda d = 0 \quad (32)$$

Molin^[10] 证明了(28)式中右端第二项是满足(18)、(19)及非齐次表面条件(20)中 f_2 项的渐近解。同理可以证明(28)中右端第三项是满足(20)中 f_1 项的渐近解。而(28)中右端第一项是满足齐次表面条件的渐近解。因此,(28)式满足方程(18),满足海底条件(19),满足自由水面条件(20),且为向外传播的波。

对(28)式取 r 方向偏导,可以得到三维问题有限水深情况二阶散射波辐射条件的表达式:

$$\frac{\partial \phi_2^s}{\partial r} - i\lambda \phi_2^s - i[k(1+\cos\theta) - \lambda]\phi_{22}^s - i(2k - \lambda)\phi_{23}^s = O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad r \rightarrow \infty \quad (33)$$

$$\phi_{22}^s = g_{22}(\theta) \frac{\omega}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda r}} \text{ch}[k\sqrt{2+2\cos\theta}(z+d)] e^{i\lambda r(1+\cos\theta)} \quad (34)$$

$$\phi_{23}^s = g_{23}(\theta) \frac{\omega}{k^2} \frac{1}{kr} \text{ch} 2k(z+d) e^{2ikr} \quad (35)$$

2. 无限水深情况

当水深为无限时, 二阶入射波 $\phi_i^I \equiv 0$ 。因此, 二阶散射波中没有独立于一阶流场的通解项, 即 ϕ_s^I 完全由一阶流场所确定。将(28)式中通解部分去掉后令 $kd \rightarrow \infty$, 注意到此时有:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{th} kd &\rightarrow 1 \\ \operatorname{sh} kd &\rightarrow \infty \\ \operatorname{ch} kd &\rightarrow \infty \\ \operatorname{ch}[k\sqrt{2+2\cos\theta}(z+d)]/\operatorname{ch}(kd\sqrt{2+2\cos\theta}) &\rightarrow e^{kz\sqrt{2+2\cos\theta}} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

则可以得到无限水深时 ϕ_s^I 的渐近解:

$$\phi_s^I = g_2(\theta) \frac{\omega}{k^2} \frac{i}{\sqrt{kr}} e^{kz\sqrt{2+2\cos\theta}} e^{-i\sqrt{2+2\cos\theta}kr} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (37)$$

式中:

$$g_2(\theta) = \frac{2(1-\cos\theta)g_1(\theta)}{\sqrt{2+2\cos\theta}-4} \quad (38)$$

由 ϕ_s^I 的渐近解, 可以导出无限水深时二阶散射波的辐射条件为:

$$\frac{\partial \phi_s^I}{\partial r} - ik(1+\cos\theta)\phi_s^I = O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad r \rightarrow \infty. \quad (39)$$

四、二阶散射波能量特性分析

可以进一步将 ϕ_s^I 分离成 ϕ_i^{II} 和 $\phi_i^{I'}$ 的定解问题, ϕ_i^{II} 为如下定解问题的解:

$$\nabla^2 \phi_i^{II} = 0 \quad \Omega \quad (40)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{II}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \phi_i^{II} = 0 \quad S_f \quad (41)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{II}}{\partial z} = 0 \quad S_s \quad (42)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{II}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_i^I}{\partial n} \quad S_b \quad (43)$$

$$\sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_i^{II}}{\partial r} - i\lambda \phi_i^{II} \right) \rightarrow 0 \quad S_\infty \quad (44)$$

$\phi_i^{I'}$ 为如下定解问题的解:

$$\nabla^2 \phi_i^{I'} = 0 \quad \Omega \quad (45)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{I'}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \phi_i^{I'} = F \quad S_f \quad (46)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{I'}}{\partial z} = 0 \quad S_s \quad (47)$$

$$\frac{\partial \phi_i^{I'}}{\partial n} = 0 \quad S_b \quad (48)$$

$$\text{辐射条件} \quad S_\infty \quad (49)$$

式中 $F = f_1(\phi_i^I) + f_2(\phi_i^I, \phi_i^I)$ 。

对于 ϕ_i'' 的辐射条件, 如果略去 $O(r^{-1})$ 以上的量级可以表示为:

$$\frac{\partial \phi_i''}{\partial r} - ik(1 + \cos \theta)\phi_i'' = O(r^{-1}) S_\infty \quad (50)$$

波浪通过某一截面的能流为动水压力所做的功的时均值, 即:

$$\bar{E} = \iint_S \bar{p} u dS \quad (51)$$

式中 p 为动水压力, u 为垂直于截面的流速.

为计算两正弦函数乘积的时均值, 将利用如下的一般公式^[28]:

若 $a = \operatorname{Re}(Ae^{-i\omega t})$, $b = \operatorname{Re}(Be^{-i\omega t})$, 则:

$$ab = \frac{1}{T} \int_0^T ab dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(A^* B) \quad (52)$$

式中 $()^*$ 表示共轭复数 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1. ϕ_i'' 问题

考虑 ϕ_i'' 的能流, 有:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[2i\omega\rho\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* \right] dS \\ &= -\omega\rho \operatorname{Im} \iint_S \phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* dS \\ &= \frac{1}{2} i\omega\rho \iint_S \left[\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* - (\phi_i'')^* \frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right] dS \end{aligned} \quad (53)$$

由于 ϕ_i'' 和 $(\phi_i'')^*$ 均为调和函数, 因此, 利用如下的格林公式:

$$\iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) d\Omega = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \quad (54)$$

令 $f = \phi_i''$, $g = (\phi_i'')^*$, 显然有下式成立:

$$\frac{1}{2} i\omega\rho \iint_S \left[\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* - (\phi_i'')^* \frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (55)$$

(55)式的积分应在全部边界面上进行, 简写为:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_\infty} = 0 \quad (56)$$

事实上, (55)或(56)式即为散射势能量守恒方程. 即在域内无源无汇的条件下, 在一个周期内, 通过所有界面流入与流出的能量的总和为零.

现在分别考查通过各个界面的能流, 利用(41)–(43), 有:

$$\iint_{S_1} = \iint_{S_1'} \left[\phi_i'' \frac{4\omega^2}{g} (\phi_i'')^* - (\phi_i'')^* \frac{4\omega^2}{g} \phi_i'' \right] = 0 \quad (57)$$

$$\iint_{S_2} = 0 \quad (58)$$

$$\iint_{S_3} = -\iint_{S_3'} \left[\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* - (\phi_i'')^* \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right) \right] dS \quad (59)$$

因此,可以得到通过 S_∞ 界面向外的能流:

$$\begin{aligned}\bar{E}|_{S_\infty} &= \frac{1}{2} i\omega\rho \iint_{S_\infty} \left[\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* - (\phi_i'')^* \frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right] dS \\ &= \frac{1}{2} i\omega\rho \iint_{S_b} \left[\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* - (\phi_i'')^* \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right) \right] dS\end{aligned}\quad (60)$$

由(60)可见, ϕ_i'' 向外的能流,来源于建筑物对二阶入射波的反射,由于在理想流体和建筑物表面刚性的假定下,能量不会损失,因此柱体反射的能量必然与 S_∞ 面上流出的能量相等。并且,当建筑物一定的条件下,所反射的能量也是一定的。利用辐射条件(44)和 ϕ_i'' 的渐近表达式:

$$\phi_i'' = A(\theta) \operatorname{ch} \lambda(z+d) \frac{1}{\sqrt{\lambda r}} e^{i\lambda z} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad r \rightarrow \infty$$

式中 $A(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$, a_n 为系数,可计算出 ϕ_i'' 向外的能流:

$$\begin{aligned}\bar{E}|_{S_\infty} &= -\omega\rho \operatorname{Im} \iint_{S_\infty} \phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* dS + O(r^{-1}) \\ &= -\omega\rho \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 |A(\theta)|^2 \operatorname{ch}^2 \lambda(z+d) \frac{(-i\lambda)}{\lambda r} r d\theta dz + O(r^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \omega\rho \left(d + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} 2\lambda d \right) \int_0^{2\pi} |A(\theta)|^2 d\theta + O(r^{-1})\end{aligned}\quad (61)$$

显然上式积分项为一非负的常数。或表示为:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} = O(r^{-2}) \quad r \rightarrow \infty \quad (62)$$

如果定义向外的能流密度:

$$e = \frac{1}{2} i\omega\rho \left[\phi_i'' \left(\frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right)^* - (\phi_i'')^* \frac{\partial \phi_i''}{\partial n} \right] \quad (63)$$

则 ϕ_i'' 向外的能流可写为:

$$\bar{E}|_{S_\infty} = \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 e r dz d\theta = \text{常数} + O(r^{-1}) \quad (64)$$

由(64)式可以得到:

$$\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r} e = O(r^{-3}) \quad r \rightarrow \infty \quad (65)$$

事实上, ϕ_i'' 的定解问题(40)–(44)与一阶散射波定解问题极为相似,因此(65)式对一阶散射波能流密度同样成立。

2. ϕ_i' 问题

考虑 ϕ_i' 的能流,同样应用格林公式(54),类似于(55),有下式成立:

$$\frac{1}{2} i\omega\rho \iint_S \left[\phi_i' \left(\frac{\partial \phi_i'}{\partial n} \right)^* - (\phi_i')^* \frac{\partial \phi_i'}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (66)$$

利用(46)–(48),由(66)式,则通过 S_∞ 界面向外的能流为:

$$\begin{aligned}\bar{E}|_{s_\infty} &= \frac{1}{2} i\omega\rho \iint_{s_\infty} \left[\phi_i^{ij} \left(\frac{\partial \phi_i^{ij}}{\partial n} \right)^* - (\phi_i^{ij})^* \frac{\partial \phi_i^{ij}}{\partial n} \right] dS \\ &= -\frac{1}{2} i\omega\rho \iint_{s_f} [\phi_i^{ij} F^* - (\phi_i^{ij})^* F] dS\end{aligned}\quad (67)$$

(66)或(67)式是 ϕ_i^{ij} 问题的能量守恒关系。(67)式表明, ϕ_i^{ij} 向外的能流来源于二阶自由表面条件的非齐次项,非齐次项在物理意义上可以看做是作用在整个水面的压力场^[11]。由于非齐次项完全由一阶流场所确定,因此, ϕ_i^{ij} 的能量来源于一阶流场,而与二阶入射波无关。

对(67)式取 r 方向的偏导数,则能流在 r 方向的变化率为:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} = -\frac{1}{2} i\omega\rho \int_0^{2\pi} [\phi_i^{ij} F^* - (\phi_i^{ij})^* F] r d\theta, \quad r \rightarrow \infty \quad (68)$$

为进一步化简(68)式,利用 F 和 ϕ_i^{ij} 的渐近形式:

$$F = A_1 g_1(\theta) \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{ikr(1+\cos\theta)} + A_2 g_1^2(\theta) \frac{i}{kr} e^{2ikr} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (69)$$

$$\phi_i^{ij} = B_1(\theta, z) g_1(\theta) \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{ikr(1+\cos\theta)} + B_2(\theta, z) g_1^2(\theta) \frac{i}{kr} e^{2ikr} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (70)$$

式中:

$$A_1 = [3\text{th}^2 kd - 1 - 2\cos 2\theta] \frac{g}{\omega}$$

$$A_2 = -\frac{3g}{2\omega \text{ch}^2 kd}$$

$$B_1(\theta, z) = \frac{\omega(3\text{th}^2 kd - 1 - 2\cos\theta) \cdot \text{ch}[k\sqrt{2+2\cos\theta}(z+d)]}{k^2 \text{th} kd [\sqrt{2+2\cos\theta} \cdot \text{sh}(kd\sqrt{2+2\cos\theta} - 4\text{th} kd \text{ch}(kd\sqrt{2+2\cos\theta}))]}$$

$$B_2(\theta, z) = \frac{-3\omega \text{ch} 2k(z+d)}{4k^2 \text{th} kd \text{ch}^2 kd (\text{sh} 2kd - 2\text{th} kd \cdot \text{ch} 2kd)}$$

将(69)、(70)代入(68)右端,则:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} &= -\frac{1}{2} i\omega\rho \int_0^{2\pi} \left\{ \left[B_1 g_1 \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{ikr(1+\cos\theta)} + B_2 g_1^2 \frac{i}{kr} e^{2ikr} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[A_1 g_1^* \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{-ikr(1+\cos\theta)} - A_2 (g_1^2)^* \frac{i}{kr} e^{-2ikr} \right] \\ &\quad - \left[B_1 g_1^* \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{-ikr(1+\cos\theta)} - B_2 (g_1^2)^* \frac{i}{kr} e^{-2ikr} \right] \\ &\quad \cdot \left. \left[A_1 g_1 \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{ikr(1+\cos\theta)} + A_2 g_1^2 \frac{i}{kr} e^{2ikr} \right] \right\} r d\theta + O(r^{-1})\end{aligned}$$

进一步整理后得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} &= -\frac{1}{2} i\omega\rho \int_0^{2\pi} \frac{i}{k\sqrt{kr}} [B_2 A_1 - B_1 A_2] \\ &\quad \cdot [g_1 (g_1^2)^* e^{-ikr(1-\cos\theta)} + g_1^* g_1^2 e^{ikr(1-\cos\theta)}] d\theta + O(r^{-1}) \\ &= O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad r \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (71)$$

以能流密度表示为:

$$\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{1}{r} e = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad r \rightarrow \infty \quad (72)$$

当水深趋于无限时,由于二阶入射波 $\phi_1^i \equiv 0$, 因此有 $\phi_1^s \equiv 0$ 。这时,只存在二阶散射波 ϕ_2^s , 显然, ϕ_2^s 完全由一阶流场所确定。

五、讨论与结论

比较(28)和(25)式,可以注意到,二阶散射波渐近解与一阶散射波渐近解不同。二阶渐近解由两部分组成,一部分(即(28)中右端第一项)是独立于一阶流场的,另一部分(即(28)式右端后两项)完全由一阶流场所决定。

由二阶散射波辐射条件表达式(33)可以看出,二阶辐射条件与一阶辐射条件也不同,前者含有由一阶流场决定的那部分二阶散射波的渐近解,即二阶辐射条件不是独立的,它受到一阶流场的影响,在一阶流场求出之后才能确定,这正好与 Hunt 和 Baddour^[12] 的论断相吻合。

将辐射条件表达式与自由表面条件表达式比较,发现两者极为相似。这两个条件在一阶时均为齐次,而在二阶时均为非齐次。非齐次项反应了一阶场对二阶场的影响,这也是应用摄动理论的自然结果。

二阶散射波的能量有两个来源,其一为由建筑物所反射的二阶入射波的能量。其二为由一阶流场所确定的二阶自由表面条件的非齐次项。 ϕ_2^s 的能量特性与一阶散射波相同。 ϕ_1^s 与 ϕ_2^s 的能流或能流密度在 r 方向上的变化率以不同的量级衰减。事实上,式(62)、(65)和(71)、(72)也是 ϕ_1^s 和 ϕ_2^s 在能量意义上的辐射条件。

参 考 文 献

- [1] 邱大洪、王永学,大直径圆柱上的非线性波浪力,海洋学报,8(1986),4: 496—509.
- [2] Chakrabarti, S. K., Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, *J. Hydro. Div. ASCE*, 98(1972), 1895—1909.
- [3] Yamaguchi, M. and Tsuchiga, Y., Nonlinear Effect of Waves on Wave Pressure and Wave Force on Large Cylinder Pile, in Japanese, *Proc. Civil. Eng. Soc. Japan*, 229(1974), 41—53.
- [4] Raman, H. and Venkatamiasaiab, P., Forces due to Non-Linear Waves on Vertical Cylinders, *J. Waterways, Harbor Coastal Eng. Div. ASCE*, 102(1976).
- [5] Chen, M. C. and Hudspeth, R. T., Nonlinear Diffraction by Eigenfunction Expansions, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div. ASCE*, 108, WW3(1982), 306—325.
- [6] Inoue, R. and Kyoizuka, Y., Nonlinear Wave Forces Acting on Submerged Horizontal Cylinders, *Proc. of International OMAE Symposium*, 1(1986), 225—234.
- [7] Miao, G. P. and Liu, Y. Z., A Theoretical Study on the Second-order Wave Forces for Two-dimensional Bodies, *Proc. of International OMAE Symposium*, 1(1986), 330—336.
- [8] Masuda, K., Kato, W. and Ishizuka, H., Second-order Diffraction Loads on Plural Vertical Cylinder with Arbitrary Cross-sections, *Proc. of International OMAE Symposium*, 1(1986), 345—352.
- [9] Molin, B. and Marion, A., Second-order Loads and Motions for Floating Bodies in Regular Waves, *Proc. of International OMAE Symposium*, 1(1986), 353—360.
- [10] Molin, B., Second-order Diffraction Loads Upon Three-Dimensional Bodies, *Appl. Ocean Research*, 1(1979), 197—202.
- [11] Lighthill, J., *Waves and hydrodynamic loading*, BOSS79, London, Vol. 1.
- [12] Hunt, J. N. and Baddour, R. E., The Diffraction of Nonlinear Progressive Waves by a Vertical Cylinder, *Quart J. Mech. Appl. Math.*, 34(1981), 69—87.
- [13] 周清甫,柱体非线性散射问题的辐射条件,力学学报,17,4(1985),307—315.

- [14] Courant, R. 和 Hilbert, D., 数学物理方法(II), 钱敏、郭敦仁译, 北京(1981).
- [15] Bai, K. J. and Yeung, R., Numerical Solutions of Free Surface Problems. Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn., Cambridge, Mass. (1974).
- [16] 黄河宁、李鉴初、王学庚, 大型潜体非线性波浪荷载的有限元分析方法, 水波动力学学术讨论会(1985).
- [17] She, H. T., Discussion of 'Forces due to Nonlinear Waves on Vertical Cylinder', by Raman, H. and Venkatarasaiah, P., *J. of the Waterway Port. Coastal and Ocean Div.*, ASCE, 103, WW3 (1977), 406—407.
- [18] 梅强中, 水波动力学, 科学出版社(1984).

ASYMPTOTIC EXPANSION, RADIATION CONDITION AND ENERGY CHARACTERS OF SECOND-ORDER SCATTERING WAVE

Huang, Hening Li Jianchu Wang Xiegeng

Abstract

In this paper, it is assumed that the incident wave is the 2nd-order Stokes wave. The asymptotic expansion and radiation condition of the 2nd-order scattering wave induced by the structure are developed by studying the 2nd-order scattering problem in the far field. It is demonstrated that the energy of the 2nd-order scattering wave is due to the 2nd-order incident wave and the 1st-order fluid field. The outward energy fluxes of the two 2nd-order scattering waves corresponding to the different sources decay on the different orders.

Key words second-order scattering wave, asymptotic expansion, radiation condition, energy flux, energy characters