第 20 卷 第 6 期　　　　力 学 学 报　　　　Vol. 20, No. 6
1988 年 11 月　　　　ACTA MECHANICA SINICA　　　　Nov., 1988

轴对称薄圆环壳方程级数解收敛性的研究

王 慎 行

(中国天津化学工程公司)

提要　本文研究轴对称薄圆环壳齐次方程级数解的收敛性，证明了每种环壳都有在全域上收敛的级数解.

关键词　环壳，级数解，收敛性.

本文从下列轴对称薄圆环壳方程[1]出发：

$$\left.\begin{aligned} &L(\phi)+\nu\alpha\phi-\alpha Eha\chi=-\frac{\alpha a\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)\sin\varphi}\left[\frac{1}{2}aq-\frac{2+3\alpha\sin\varphi}{\alpha^2\sin^3\varphi}Q_0\right]\\ &L(\chi)-\nu\alpha\chi+\frac{\alpha a}{D}\phi=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中所用符号，其意义与文 [1] 完全相同。

引进符号

$$k=\frac{1}{\alpha}\tag{2}$$

式 (1) 可改写为

$$\left.\begin{aligned} &L_1(\phi)+\nu\phi-Eha\chi=-\frac{ka\cos\varphi}{(k+\sin\varphi)\sin\varphi}\left[\frac{1}{2}aq-\frac{k(2k+3\sin\varphi)}{\sin^3\varphi}Q_0\right]\\ &L_1(\chi)-\nu x+\frac{a}{D}\phi=0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中，

$$L_1(\cdots)=\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{d^2}{d\varphi^2}(\cdots)+\mathrm{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi}(\cdots)-\frac{\cos^2\varphi}{(k+\sin\varphi)\sin\varphi}(\cdots)\tag{4}$$

设

$$s=\frac{2\lambda i-\nu}{a}\left[\phi+\frac{D}{a}(2\lambda i-\nu)\chi\right]\tag{5}$$

其中

$$\lambda=\sqrt{3(1-\nu^2)\frac{a^2}{h^2}-\frac{\nu^2}{4}},\quad i=\sqrt{-1}\tag{6}$$

则可将式 (3) 化为复量形式：

本文于 1986 年 1 月 27 日收到。于 1987 年 8 月 23 日收到修改稿.

$$L_1(s)+2\lambda_i s=-\frac{(2\lambda_i-\nu)k\cos\varphi}{(k+\sin\varphi)\sin\varphi}\left[\frac{1}{2}aq-\frac{k(2k+3\sin\varphi)}{\sin^3\varphi}Q_0\right] \tag{7}$$

令

$$V=(k+\sin\varphi)S-k^2(2\lambda_i-\nu)Q_0\mathrm{ctg}\varphi \tag{8}$$

则由式 (7) 可导出

$$(k+\sin\varphi)\frac{d^2v}{d\varphi^2}-\cos\varphi\frac{dv}{d\varphi}+(1+2\lambda_i)\sin\varphi V$$
$$=-(2\lambda_i-\nu)k\cos\varphi\left[\frac{1}{2}aq+k(1+2\lambda_i)Q_0\right] \tag{9}$$

设

$$u=\sin\varphi \tag{10}$$

式 (9) 的齐次式便可写为

$$(k+u)(1-u^2)\frac{d^2v}{du^2}-(1+ku)\frac{dv}{du}+(1+2\lambda_i)uv=0 \tag{11}$$

式 (11) 是一个具有奇点的富克斯型方程．文 [2] 将环壳分为五种类型(图 1)，给出了在每个有意义奇点上展开的幂级数解，并且研究了解的收敛性．文 [3] 证明了，在某些情况下，环壳齐次方程的幂级数解在环壳的全域上收敛．本文则证明：每种环壳都有在全域上收敛的幂级数解．

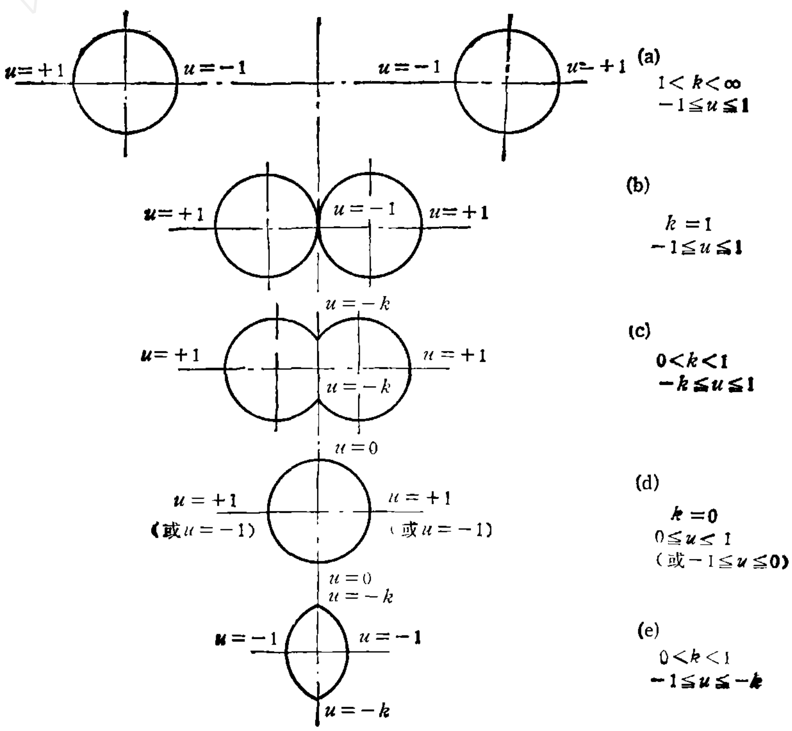

图 1　五种环壳

1. x 级数解

首先研究在奇点 $u=1$ 处展开的级数解．设

$$x=\frac{1-u}{2},\quad -1\leqslant u\leqslant 1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{12}$$

于是式 (11) 可写为

$$2(1+k-2x)(x-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}+(1+k-2kx)\frac{dv}{dx}$$
$$+2(1+2\lambda_i)(1-2x)v=0 \tag{13}$$

设式 (13) 的解为

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\rho} \tag{14}$$

将式 (14) 代入式 (13) 得

$$(1+k)(n+\rho_i)(2n+2\rho_i-1)a_n^{(j)}-2\{(n+\rho_i-1)[(3+k)(n$$
$$+\rho_i-2)+k]-(1+2\lambda_i)\}a_{n-1}^{(j)}+2[2(n+\rho_i-2)(n+\rho_i-3)$$
$$-(1+2\lambda_i)]a_{n-2}^{(j)}=0 \qquad (j=1,2) \tag{15}$$

由 $a_0^{(j)}\neq 0$ 求得

$$\rho_1=\frac{1}{2},\quad \rho_2=0 \tag{16}$$

所以，方程 (13) 的两个线性独立解为

$$V_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}x^{n+\frac{1}{2}},\quad V_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}x^n \tag{17}$$

下面让我们研究解的收敛性．设

$$T_{a,n}^{(j)}=a_{n-1}^{(j)}/a_n^{(j)},\quad T_{a,n-1}^{(j)}=a_{n-2}^{(j)}/a_{n-1}^{(j)} \tag{18}$$

$$T_{a,\infty}^{(j)}=\lim_{n\to\infty}T_{a,n}^{(j)}=\lim_{n\to\infty}T_{a,n-1}^{(j)} \tag{19}$$

则由式 (15) 可得

$$\left.\begin{aligned} T_{a,\infty,1}^{(j)}&=1+\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ T_{a,\infty,2}^{(j)}&=\frac{1+k}{2}\left(1+\frac{3}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

根据微分方程级数解的收敛性的理论[4]，在方程的某一奇点邻域展开的级数解，其收敛半径决定于该点与其最邻近的奇点间的距离．因此，由式 (17) 和 (20) 可知：

1) 对于 $1\leqslant k<\infty$ 的环壳，级数解 (17) 的收敛域为 $0\leqslant x\leqslant 1$；

2) 对于 $0\leqslant k\leqslant 1$ 的环壳，级数解 (17) 的收敛域为 $0\leqslant x\leqslant \frac{1+k}{2}$．

于此可见，对于图 1 中的 a、b、c 和 d 种环壳，x 级数解都在环壳的全域上收敛．

但是应当指出，对于 $k=0$ 的环壳即球壳，从解决力学问题的角度看，x 级数解在 $u=0$ 即 $x=\frac{1}{2}$ 处失效．因为，根据式 (8)，当 $k=0$ 时

$$S=\frac{V}{\sin\varphi} \tag{21}$$

在 $u = \sin\varphi = 0$ 处 S 是无定义的.

2. y 级数解

现在研究在奇点 $u = -1$ 处展开的级数解. 令

$$y = \frac{1+u}{2}, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \tag{22}$$

则式 (11) 可写为

$$2(1-k-2y)y(1-y)\frac{d^2V}{dy^2} + (1-k+2ky)\frac{dV}{dy} + 2(1+2\lambda_i)(1-2y)V = 0 \tag{23}$$

设方程 (23) 的解为

$$V' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{n+\rho'} \tag{24}$$

将式 (24) 代入方程 (23) 得

$$(1-k)(n+\rho_i')(2n+2\rho_i'-1)b_n^{(i)} - 2\{(n+\rho_i'-1)[(3-k)(n+\rho_i'-2)-k] - (1+2\lambda_i)\}b_{n-1}^{(i)} + 2[2(n+\rho_i'-2)(n+\rho_i'-3) - (1+2\lambda_i)]b_{n-2}^{(i)} = 0 \qquad (i=1,2) \tag{25}$$

下面需要分两种情况加以研究.

1) $k \neq 1$

根据式 (25), 由 $b_0^{(i)} \neq 0$ 求得

$$\rho_1' = \frac{1}{2}, \quad \rho_2' = 0 \tag{26}$$

因此,方程 (23) 的两个线性独立解为

$$V_1' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} y^{n+\frac{1}{2}}, \quad V_2' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} y^n \tag{27}$$

设

$$T_{b,n}^{(i)} = b_{n-1}^{(i)}/b_n^{(i)}, \quad T_{b,n-1} = b_{n-2}^{(i)}/b_{n-1}^{(i)} \tag{28}$$

$$T_{b,\infty}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} T_{b,n}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} T_{b,n-1}^{(i)} \tag{29}$$

则由式 (25) 可得

$$\left.\begin{aligned} T_{b,\infty,1}^{(i)} &= 1 + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ T_{b,\infty,2}^{(i)} &= \frac{1-k}{2}\left(1+\frac{3}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

根据微分方程级数解的收敛性的理论[4],由式 (27) 和 (30) 可知:

(1) 对于 $3 \leqslant k < \infty$ 的环壳,级数解 (27) 的收敛域为 $0 \leqslant y \leqslant 1$;

(2) 对于 $0 \leqslant k < 1$ 及 $1 < k \leqslant 3$ 的环壳,级数解 (27) 的收敛域为 $0 \leqslant y \leqslant \left|\frac{1-k}{2}\right|$.

和 x 级数解的情况相同,对于 $k=0$ 的环壳即球壳,从解决力学问题的角度看, y 级数解在球极处失效.

2) $k = 1$

在此条件下式 (25) 退化为

$$[(n+\rho_i'^*)(2n+2\rho_i'^*-3)]b_n^{*(j)}-2[(n+\rho_i'^*-1)(n+\rho_i'^*-2)-(1+2\lambda_i)]b_{n-1}^{*(j)}=0 \qquad (j=1,2) \tag{31}$$

式中 * 标志退化情况．由 $b_0^{*(j)}\neq 0$ 可得

$$\rho_1'^*=\frac{1}{4}(3+\sqrt{17+16\lambda_i}),\quad \rho_2'^*=\frac{1}{4}(3-\sqrt{17+16\lambda_i}) \tag{32}$$

因此,方程 (23) 的两个线性独立的级数解为

$$V_1^{I*}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{*(1)}y^{n+\rho_1'^*},\quad V_2^{I*}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{*(2)}y^{n+\rho_2'^*} \tag{33}$$

它们可称为 $y_{k=1}$ 级数解。

由式 (31) 很易求得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n-1}^{*(j)}}{b_n^{*(j)}}=1+\frac{3}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{34}$$

可见，$y_{k=1}$ 级数解的收敛域为 $0\leqslant y\leqslant 1$.

3. 子级数解

现在研究，$0\leqslant k\leqslant 1$ 时,在奇点 $u=-k$ 处展开的级数解．设

$$z=\frac{u+k}{2},\quad \begin{cases}-1\leqslant u\leqslant -k, & -\dfrac{1-k}{2}\leqslant z\leqslant 0\\ -k\leqslant u\leqslant 1, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{1+k}{2}\end{cases} \tag{35}$$

则方程 (11) 可写为

$$z(1-k^2+4kz-4z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-(1-k^2+2kz)\frac{dv}{dz}-2(1+2\lambda_i)(k-2z)v=0 \tag{36}$$

设方程 (36) 的解为

$$V^{II}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^{n+\rho''} \tag{37}$$

将式 (37) 代入方程 (36) 得

$$(1-k^2)(n+\rho_i'')(n+\rho_i''-2)f_n^{(j)}+2k[(n+\rho_i''-1)(2n+2\rho_i''-5)-(1+2\lambda_i)]f_{n-1}^{(j)}-4[(n+\rho_i''-2)(n+\rho_i''-3)-(1+2\lambda_i)]f_{n-2}^{(j)}=0 \qquad (j=1,2) \tag{38}$$

下面需要分两种情况加以研究。

1) $k\neq 1$

根据式 (38)，由 $f_0^{(j)}\neq 0$ 求得

$$\rho_1''=2,\quad \rho_2''=0 \tag{39}$$

因此只能得到一个独立的级数解．设这个解相应于 ρ_1''，则方程 (36) 的第一个子级数解可写为

$$V_1^{II}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^{n+2} \tag{40}$$

其系数递推公式为

$$(1-k^2)n(n+2)f_n+2k[(n+1)(2n-1)-(1+2\lambda_i)]f_{n-1}$$
$$-4[n(n-1)-(1+2\lambda_i)]f_{n-2}=0 \tag{41}$$

设

$$T_{f,n}=f_{n-1}/f_n,\quad T_{f,n-1}=f_{n-2}/f_{n-1} \tag{42}$$

$$T_{f,\infty}=\lim_{n\to\infty}T_{f,n}=\lim_{n\to\infty}T_{f,n-1} \tag{43}$$

则由式 (41) 可求得

$$\left.\begin{aligned}T_{f,\infty,1}&=-\frac{1-k}{2}\left(1+\frac{3}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\T_{f,\infty,2}&=\frac{1+k}{2}\left(1+\frac{3}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

根据文[4]，由式 (40) 和 (44) 可知：对于 $0\leqslant k<1$ 的环壳，第一个子级数解的收敛域为 $|z|\leqslant\dfrac{1-k}{2}$.

设方程 (36) 的第二个独立级数解为

$$V_2^{II}=V_1^{II}\ln z+\widetilde{V} \tag{45}$$

将式 (45) 代入方程 (36) 得

$$z(1-k^2+4kz-4z^2)\frac{d^2\widetilde{V}}{dz^2}-(1-k^2+2kz)\frac{d\widetilde{V}}{dz}$$
$$-2(1+2\lambda_i)(k-2z)\widetilde{V}=-2(1-k^2+4kz-4z^2)\frac{dV_1^{II}}{dz}$$
$$+\frac{2}{z}(1-k^2+3kz-2z^2)V_1^{II} \tag{46}$$

设

$$\widetilde{V}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{f}_nz^n \tag{47}$$

将式 (40) 与 (47) 代入式 (46) 可得系数递推公式

$$(1-k^2)n(n-2)\tilde{f}_n+2k[(n-1)(2n-5)-(1+2\lambda_i)]\tilde{f}_{n-1}$$
$$-4[(n-2)(n-3)-(1+2\lambda_i)]\tilde{f}_{n-2}=-2(1-k^2)(n-1)f_{n-2}$$
$$-2k(4n-7)f_{n-3}+4(2n-5)f_{n-4} \tag{48}$$

令

$$\widetilde{T}_n=\tilde{f}_{n-1}/\tilde{f}_n,\quad \widetilde{T}_{n-1}=\tilde{f}_{n-2}/\tilde{f}_{n-1} \tag{49}$$

$$\widetilde{T}_\infty=\lim_{n\to\infty}\widetilde{T}_n=\lim_{n\to\infty}\widetilde{T}_{n-1} \tag{50}$$

则由式 (48) 很易求得

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{T}_{\infty,1}&=-\frac{1-k}{2}\left(1+\frac{3}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\\widetilde{T}_{\infty,2}&=\frac{1+k}{2}\left(1+\frac{3}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

由此可知：$\widetilde{V}$ 与 V_1^{II} 的收敛域是相同的.

2) $k=1$

在此条件下式(38)退化为

$$[(n+\rho_j''^*)(2n+2\rho_j''^*-3)-(1+2\lambda_j)]f_n^{*(j)}-2[(n+\rho_j''^*-1)(n+\rho_j''^*-2)-(1+2\lambda_j)]f_{n-1}^{*(j)}=0 \qquad (j=1,2) \tag{52}$$

上式与式(31)规律完全相同，所以据此所得的级数解必然与 $y_{k=1}$ 级数解完全相同.

4. 关于五种环壳

根据以上的分析，可见每种环壳都有在全域上收敛的级数解：

1) 对于 $1<k<\infty$ 的环壳(图 1 a)，x 级数解在全域上收敛；如果 $3\leqslant k<\infty$，则 y 级数解也在全域上收敛；

2) 对于 $k=1$ 的环壳(图 1 b)，x 级数解和 $y_{k=1}$ 级数解都在全域上收敛；

3) 对于图 1 c 所示的 $0<k<1$ 的环壳，x 级数解在全域上收敛；

4) 对于 $k=0$ 的环壳，即球壳(图 1 d)，x 级数解、y 级数解和第一个子级数解都在全域上收敛；但是从解决力学问题的角度看，x 级数解和 y 级数解在球极上失效；

5) 对于图 1 e 所示的 $0<k<1$ 的环壳，y 级数解和第一个子级数解都在全域上收敛.

参　考　文　献

[1] 钱伟长、郑思梁，清华大学学报，19,1(1979),27—47.
[2] 钱伟长，兰州大学学报，力学专号(1979)，1—38；应用数学与力学论文集，江苏科学技术出版社(1980),31—68.
[3] 王慎行，力学学报，17,3(1985),287—292.
[4] Walter, W., Gewöhnliche Differentialgleichungen (1976).

STUDIES OF THE CONVERGENCE OF THE SERIES SOLUTIONS OF THE EQUATIONS FOR THIN-WALLED AXISYMMETRICAL TOROIDAL SHELLS

Wang Shenxiang

(China Tianjin Chemical Engineering Corporation)

Abstract In this paper the convergence of the series solutions of the homogeous equations for thin-walled axisymmetrical toroidal shells is studied. It is proved that some series solutions which are convergent for the whole shell exist for every type of toroidal shells.

Key words toroidal shells, series solutions, convergence