

平板湍流边界层底层的不稳定波¹⁾

周 恒

(天 津 大 学)

提要 湍流边界层底层的相干结构及猝发现象对决定边界层的特性有很重要的意义,但直至现在对相干结构的性质及起因仍不清楚。在本文中,对湍流边界层的底层进行了非线性稳定性分析。发现该处确可产生不稳定波,可能用以说明相干结构的起因。

关键词 相干结构,不稳定波,湍流边界层。

一、引 言

自60年代以来,大家普遍承认在湍流边界层中存在相干结构,且可分为两或三大类。本文主要研究存在于底层的相干结构是否有可能用某种不稳定波来描述,而底层的相干结构与湍流边界层中湍流动能的产生有密切关系。对于相干结构性质及起源的理解,将有助于建立一更合理的边界层湍流模式,进而对工程技术问题提供一坚实的理论基础。

现在大家对自由剪切流如射流、尾流和剪切层中存在的相干结构实际是不稳定波这一点,已没有很大分歧。对湍流边界层来说,Blackwelder 在1983年指出^[1],就底层的相干结构而言,至少在好几个重要方面,与层流边界层中的转换区或微凹平板上的不稳定波有相似之处。1986年,Jang, Benney 和 Gran^[2]利用 Benney 的直接共振概念对湍流边界层的平均速度剖面进行了稳定性计算,给出了底层低速条纹的一个理论模型,得到了一些有意思的结果。但是他们的模型给出的是单一的一组低速条纹参数,而实验中低速条纹参数分散性很大。此外,在他们的模型中,纵向涡衰减得很快,对流速为0.5m/s的水流来说,时间常数是1秒的量级,与低速条纹的存在时间较长不一致。本文中也利用流动稳定性的概念,建立一个底层相干结构的模型。

二、线 性 理 论

在应用流动稳定性理论时,自线性理论开始。首先要选一适当的基本流,下面就选湍流的平均速度剖面。为了便于比较,我们采用 Jang 等人所用的剖面,其表达式由 D. J. Benney 慷慨地提供给了作者。但后来发现必须做一些修正才能满足在平板处的速度梯度若用边壁参数量度时必须等于1的要求。最后采用的表达式是

1) 本文于1987年9月28日收到,1988年6月20日收到修改稿。
国家自然科学基金资助项目。

$$\bar{u} = \frac{u}{u_e} = \tilde{u}_r \left\{ \int_0^y \frac{1}{1 + (1 + 4a_y)^{1/2}} d\eta + \frac{1}{2\kappa} \ln(1 + \kappa y) + \frac{2\tilde{\pi}}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right) \right\} \quad (1)$$

其中 $\tilde{u}_r = u_r/u_e$, u_r 为摩擦速度, u_e 为来流速度, $a_y = \{\kappa\eta[1 - \exp(-\eta/A)]\}^2$, $\kappa, \tilde{\pi}, A$ 为分别等于 0.41, 0.51 和 24.832 的常数, δ 是边界层厚度, y 为垂直于平板的距离. y 和 δ 都应以摩擦长度为尺度.

由于相干结构存在于仅占边界层厚度 1/20 至 1/10 的底层, 我们将注意力集中于这一范围内. 此外, 由于相干结构的频率和波数相当大, 因而假定粘性起主要作用并非不合理的, 因为分子交换的时间常数很小而流体微团交换的时间常数要大得多. 由此我们和 Jang 等人一样以 Navier-Stokes 方程, 粘性模型作为计算基础. 其合理性在 Jang 等人的文中也有说明. 这样, 对于线性问题, 我们就利用 Orr-Sommerfeld 方程 (以后简称为 O-S 方程) 来进行特征值及特征函数的计算. O-S 方程可写成下式, 其中 $\bar{u}$ 由式(1)确定: (假定扰动流函数写为 $\phi(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}$)

$$\left\{ (D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R \left[\left(\bar{u} - \frac{\omega}{\alpha} \right) (D^2 - \alpha^2) - D^2 \bar{u} \right] \right\} \phi = 0 \quad (2)$$

在上式中, $D \equiv d/dy$, α 为流向波数, 设为实数, ω 则为复频率.

数值计算时, 采用通常的二阶精度的差分格式, 在离散化前, 做了坐标变换

$$z = \frac{y}{C + y}$$

使得网格点在靠近平板时较密而在远离平板处较稀. 在多数情况下取 $C = 0.5\delta$. 对 z 而言, 在区间 $[0, 1]$ 中取均匀网格, 总数达 1300. 但由于在实际计算时, 边界条件取在 $y = s\delta$ 处, 而在多数情况下 $s = 0.16$, 在 $y \leq s\delta$ 的区域中网格点数约为 280. 所采用的边界条件为

$$\phi = \phi' = 0 \quad \text{当 } y = 0 \text{ 及 } y = s\delta \text{ 时} \quad (3)$$

表 1

	第 1 组		第 2 组		第 3 组		第 4 组	
α	ω_r	ω_i	ω_r	ω_i	ω_r	ω_i	ω_r	ω_i
5	2.0269	-0.7618	2.6096	-0.5014	2.9866	-0.4815	3.0234	-0.5496
10	3.4637	-1.5109	4.8176	-1.0816	5.7472	-0.9536	6.0334	-1.1228
15	4.7580	-2.1761	6.8680	-1.7162	8.0622	-1.3667	8.3290	-1.4758
20	6.1351	-2.7710	8.8087	-2.3947	10.444	-1.8167	10.830	-2.0156
30	8.5266	-3.7750	12.448	-3.8607	15.012	-2.7433	15.666	-3.1458
40	10.695	-4.6259	15.846	-5.4486	19.386	-3.7063	20.337	-4.3264
50	12.997	-5.3621	19.057	-7.1340	23.628	-4.6668	24.878	-5.5478
60	15.274	-6.0201	22.118	-8.8930	27.711	-5.7391	29.310	-6.8032
80	19.743	-7.1957	27.873	-12.547	35.602	-7.9070	37.894	-9.3918
100	24.093	-8.2865	33.227	-16.269	43.147	-10.210	47.640	-12.049
120	28.324	-9.3632	38.255	-19.966	50.394	-12.636	54.170	-14.741

我们也试用过通常在层流边界层中采用的渐近边界条件, 即设 ϕ 在 y 大时, 取 $\exp(-\zeta y)$ 的形式, ζ 是一适当的复数. 结果和用式(3)时所得结果几乎完全一样.

对于每一个 α , 可以找到很多个 ω 作为其特征值. 我们系统地计算了 ω 的四组值, 列在表 1 中, 其中 α 以 $1/\delta$ 为单位, ω 以 u_c/δ 为单位, 以 δ 和 u_c 计算的雷诺数 Re 为 44910, ω_r 和 ω_i 分别为 ω 的实部和虚部.

表 1 中的四组是按特征函数给出的流向扰动速度峰值距平板的距离大小由小到大决定其次序的. 而该峰值所在位置近似地就是 $\bar{u} = \omega_r/\alpha$ 的位置. 在图 1 中, 以 $\alpha = 40$ 的情况为例给出了正规化了的 $|\phi'|$ 的图形. 四个特征速度取峰值处距平板分别约为 10, 23, 47 及 $57l^+$, l^+ 为摩擦长度. 在 α 增大时, 峰值所在处的距离会变小一些. 图 1 中, y 以 $\delta/2$ 为单位, 所以 0.16 δ 对应的 y 等于 0.32.

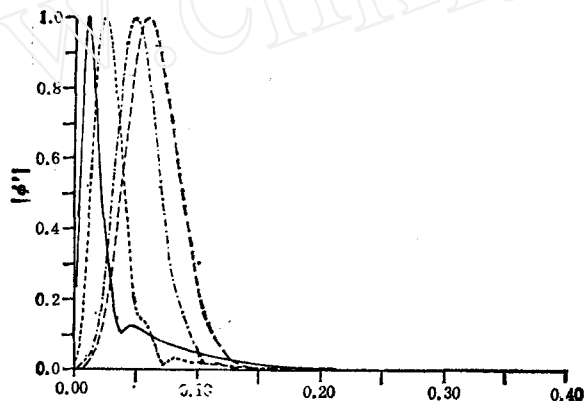


图 1 $\alpha_1 = 40$, 边界条件取在 $y = 0$ 和 $y = 0.16$ 处

在 $y = 0.26$ 处, 四个特征速度都已非常小, 数值上已是 10^{-4} 量级. 其物理意义可解释为底层的相干结构与边界层外区的大尺寸涡旋不是一个整体, 虽然并不排斥它们之间可能有相互的作用.

从表 1 我们可以看到, 所有的特征值都对应于衰减波. 因而线性理论不能解释湍流边界层底层的相干结构.

三、非线性问题及共振三波

从表 1 还可看到, 不但所有的 $\omega_i < 0$, 而且它们与 ω_r 相比, 并不很小, 所以弱非线性理论不能应用. 一个可能的方法是能量法.

由于在层流边界层的转捩问题中, 共振三波的应用是成功的, 因而很自然地想到同样概念也许可以用到湍流边界层底层. 因此我们设速度分量可写为

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u_1 + u_2 \\ v &= v_1 + v_2 \\ w &= w_1 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 u, v, w 分别为沿 x, y, z 轴向的流速, 而 x, y, z 又分别为流向, 平板法向及展向的坐

标。\$\tilde{u}\$ 是对 \$x\$ 及 \$z\$ 向取平均后的但与时间有关的平均流速。\$u_1, v_1\$ 为二维扰动流速, 而 \$u_2, v_2, w_2\$ 则为一对三维波引起的扰动速度。

再设二维波对 \$x\$ 为周期性的, 波长为 \$\lambda_1\$, 三维波对 \$x\$ 也是周期性的, 波长为 \$2\lambda_1\$, 这是三波共振所要求的。三维波对 \$z\$ 也是周期性的, 波长为 \$\beta\$。令

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\lambda_1} \frac{1}{\beta} \int_0^{2\lambda_1} \int_0^\beta f dx dz \quad (5)$$

将式(4)代入 Navier-Stokes 方程, 并采用通常推导二维扰动能量方程类似的方法, 则最后可得以下能量方程

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \tilde{w}^2 dy = \int_0^\infty \left\{ \langle u_1 v_1 \rangle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \langle u_2 v_2 \rangle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dy \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\lambda_1} \int_0^\beta \int_0^\infty (u_1^2 + v_1^2) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\lambda_1} \int_0^\beta \int_0^\infty \left\{ -u_1 v_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + u_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 v_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + v_2^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\lambda_1} \int_0^\beta \int_0^\infty (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\lambda_1} \int_0^\beta \int_0^\infty \left\{ -u_2 v_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - u_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_2 v_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - v_2^2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{R} [(\nabla u_2)^2 + (\nabla v_2)^2 + (\nabla w_2)^2] \right\} dx dy dz \quad (8) \end{aligned}$$

其中 \$\nabla\$ 为梯度算子。此外, 式(6)还可写成

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \langle u_1 v_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle u_2 v_2 \rangle}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \quad (9)$$

设对线性问题有

$$u_1 = a \hat{u}_1 e^{i(\alpha_1 x - \omega_1 t)} + c.c. \quad (10)$$

$$v_1 = a \hat{v}_1 e^{i(\alpha_1 x - \omega_1 t)} + c.c.$$

$$u_2 = b \hat{u}_2 [e^{i(\alpha_2 x + \gamma z - \omega_2 t)} + e^{i(\alpha_2 x - \gamma z - \omega_2 t)}] + c.c.$$

$$v_2 = b \hat{v}_2 [e^{i(\alpha_2 x + \gamma z - \omega_2 t)} + e^{i(\alpha_2 x - \gamma z - \omega_2 t)}] + c.c. \quad (11)$$

$$w_2 = b \hat{w}_2 [e^{i(\alpha_2 x + \gamma z - \omega_2 t)} - e^{i(\alpha_2 x - \gamma z - \omega_2 t)}] + c.c.$$

其中 \$\alpha_1, \omega_1; \alpha_2, \gamma, \omega_2\$ 满足齐次、线性问题的特征关系。\$\hat{u}_1, \hat{v}_1; \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{w}_2\$ 是相应特征值问题的特征解, 并按下述条件正规化

$$\max |\hat{u}_1| = 1, \quad \max |\hat{u}_2| = 1 \quad (12)$$

上述扰动波形成共振三波的条件为

$$\alpha_1 = 2\alpha_2, \quad \omega_1 = 2\omega_2 \quad (13)$$

对二维及三维波的相对相位也应在正规化时加以规定。

\$\tilde{u}\$ 应由式(9)确定, 仿照 Stuart 的做法, 在(9)中令 \$\partial \tilde{u} / \partial t = 0^{[3]}\$, 但积分时发现, \$\tilde{u} - \bar{u}\$

在 $y \rightarrow \infty$ 时不趋近于零, 这显然不符合实际. 为解决这一问题, 应放弃完全粘性方程这一假设. 因为对平均流的修正, 特别是 $\partial \tilde{u} / \partial t = 0$ 这一假设下的平衡剖面, 是一个长期作用的结果. 而纯粘性不能维持一个湍流剖面. 因此, 至少应采用涡粘性的模型. 我们先从剖面(1)反算涡粘系数 ν^* , 并假定在不稳定波存在时, 至少在其幅度不太大时, 不影响涡粘系数分布. 于是, 计算 $\tilde{u}$ 的方程将由下式所替代.

$$\frac{d}{dy} \left(\nu^* \frac{d u^*}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \langle u_1 v_1 \rangle + \frac{d}{dy} \langle u_2 v_2 \rangle \quad (14)$$

其中 $u^* = \tilde{u} - \bar{u}$. 由此而得的速度修正后的剖面如图 2 所示. 其中给出了两种情况, 图 2a 为只保留(14)式右端第一项时的情况, 但对应于不同的 a 值. 图 2b 则是只保留(14)式右端第二项时的结果, 也对应不同的 b 值.

然后我们还应计算量级为 a^2, b^2 的二次谐波, 以及量级为 a^3, b^3, a^2b, ab^2 的基本波的高阶修正.

将这些连同对 a, b 为一阶的项(10)及(11)一起代入(7), (8)式, 就得到 a, b 的非线性演化方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A_1 a + A_2 b^2 + A_3 a b^2 + A_4 a^3 \\ \frac{db}{dt} &= B_1 b + B_2 a b + B_3 a^2 b + B_4 b^3 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 A_i, B_i 等为常数.

问题首先是有没有满足条件(13)的共振三波. 通过数值计算发现确有这样的波, 不过二维波和三维波分属于不同的组.

(15)式中的 A_2, A_3 及 B_2, B_3 与二维波及三维波的相对相位有关, 但我们发现它对不稳定波存在与否及其不稳定阈值影响很小.

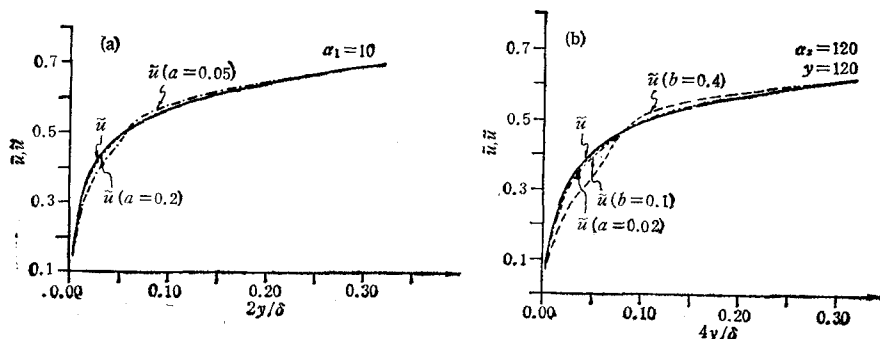


图 2

可惜尽管我们找到了满足共振条件的参数谱段, 但其幅值方程并不能给出有意义的结果. 不是没有不稳定情况, 即它是全局稳定的, 就是不稳定的阈值很大, 其初始扰动速度的最大值需为来流速度的 30—40% 才导致不稳定. 显然这是不切实际的.

四、一个可能的不稳定模式

在计算过程中我们发现,(15)式中的 B_4 有时取大的正值,而且我们发现二维波与三维波之间的能量交换并不起太大的作用,这表现于 A_2, B_2 以及 A_3, B_3 中代表这部分能量交换的值不大。因而共振并不起大的作用,也许只保留一对斜波时能得到一个现实有意义的不稳定阈值。这时(15)式退化为

$$\frac{db}{dt} = B_1 b + B_4 b^3 \quad (16)$$

由于不须考虑共振条件, α_2 及 γ 可以取任意值。

对任一给定的 α_2 , 我们变动 γ 来计算(16)式中的 B_1 和 B_4 。由于 B_1 总是负的, 所以如果 $B_4 > 0$, 就可求得 b 的一个不稳定阈值 b_i ,

$$b_i = (-B_1/B_4)^{1/2}$$

于是可得一 $b_i \sim \gamma$ 的曲线, 以 α_2 为其参数如图 3。

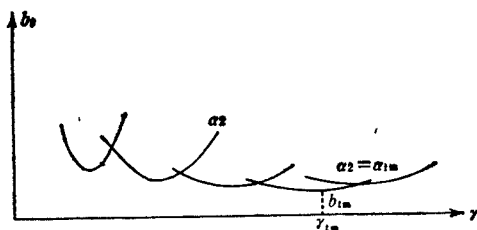


图 3

从图 3 中我们可以看到 b_i 有一绝对最小值 $b_{im} = \min(\min b_i)$ 。对每一组波, 我们可以找到其 b_{im} 及其对应的 α_{im} 及 γ_{im} 。这里所谓的某一组波, 仍指若令 $\gamma \rightarrow 0$, 则该斜波将退化为表 I 中对应组的二维波。

对应于第 1 组, b_{im} 约为 0.1。考虑到 u_2 表达式中有 4 项, 故它对应的扰动速度最大值约为来流速度的 40%, 故仍不现实。

然而对于第 2 组, 其 $b_{im} \approx 0.01$, 对应的 $\max |u_2| \approx 0.04$ 。这在现实中是有意义的, 因为湍流边界层中的湍流脉动值可达来流速度的 12—16%。与 b_{im} 对应的 $\alpha_{im} = 80$, $\gamma_{im} = 270$ 。相应的流向和横向波长分别为 $\lambda_x = 157l^+$ 和 $\lambda_z = 46l^+$ 。

对于第 3 组中的波, $b_{im} \approx 0.002$, $\alpha_{im} = 120$, $\gamma_{im} = 120$ 。与之对应的 $\max |u_2| = 0.008$, $\lambda_x = 105l^+$, $\lambda_z = 105l^+$ 。

对于第 4 组中的波, $b_{im} \approx 0.007$, $\alpha_{im} = 30$, $\gamma_{im} = 70$ 。与之对应的 $\max |u_2| = 0.028$, $\lambda_x = 419l^+$, $\lambda_z = 180l^+$ 。

由于不稳定波不可能自发产生, 而可能是由边界层外区中的扰动激发的, 所以我们不妨假定对应于 b_{im} 的波最容易被激发。这样, 我们就可以把上面与 b_{im} 对应的 λ_x 及 λ_z 与实验观察的某些结果对比。以下我们举出四个人的结果。可惜其中两个人的结果只是与湍流边界层底层的低速条纹有关。而低速条纹是否就代表主要的相干结构是有不同意见的。

C. R. Smith 等人^[5]和 C. Nikolaides 等人^[6]的结果都给出低速条纹的间距平均值为 $100l^+$ 。但对条纹的纵向长度, 由于采用的判据不同, 结果相差很多。前者给出的平均长度为: 在 $y = 5l^+$ 处为 $1000l^+$, 而在 $y = 30l^+$ 时降为 $100l^+$ 。后者的结果为 $300l^+$ 。此外, Smith 等还指出横向间距会随 y 的增大而增大。R. F. Blackwelder^[4]比较了各家的结果, 也得出低速条纹的横向间距平均值为 $100l^+$ 但他提出一个与低速条纹不同的纵向涡的概念, 其横向波长也是 $100l^+$, 但纵向波长小于低速条纹长度, 约为 $240l^+$ 的大小。他还提出一种振荡结构, 其纵向波长大体为 $160l^+$, 横向波长为 $50l^+$, 他认为这是瞬时速度剖面有拐点时的二次失稳结果。R. E. Falco^[7]则认为低速条纹不是主要的相干结构。他认为猝发引射后出现的‘典型涡’ (typical eddies) 是一种相干结构, 其横向尺寸约为 $100l^+$ 。和其共生的‘袋形’ (pocket) 结构, 其尺寸纵向和横向都在 $50-90l^+$ 之间, 他认为低速条纹是纵向涡经某种还不清楚的‘滤波’作用而在近壁处产生的。而纵向涡的尺寸, 只不过 $50Koi-mogoroff$ 尺度。对我们所用的 Reynolds 数, 它只相当于 $32l^+$ 而已。

如果我们承认与 b_{im} 对应的 λ_x 和 λ_z 是出现可能性最大的不稳定波的尺寸, 则我们发现对应于第 2 组的值与 Blackwelder 所说的振荡结构非常接近, 而对应于第 3 组的值其横向尺寸与 Falco 的‘典型涡’, Smith 等或 Nikolaides 等的低速条纹的横向尺寸很接近。但其纵向尺寸则与低速条纹长度不尽相同。实验给出的‘典型涡’纵向尺寸(与‘袋形’结构同量级)及低速条纹尺寸差别也很大。第 3 组与 b_{im} 对应的 λ_x 则似乎介于这两者之间而较接近于‘典型涡’的尺寸。

五、结 论

尽管由于我们采用的是纯粘性模型及平均湍流速度剖面作为我们计算的基础, 因而显得很粗糙, 但所得结果却在一些重要的参数上可以和实验结果相比。这说明有可能在不稳定波概念的基础上来说明湍流边界层底层的相干结构。毫无疑问, 要得到更有说服力的结果有待于进一步改进此模型。但同样重要的是也需要进一步改进实验方法, 以得到更为一致的实验结果以便互相比较。

本文的完成除得到国家科学基金的资助外, 还在中美科技合作项目下, 得到美国国家科学基金会项目号 INT85-14196 以及美国 Fluid Dynamics and Hydraulics Program 项目号 MSM83-20307 的资助。在研究过程中, 曾与美国 Brown 大学的 J.T.C. Liu 及英国 Imperial College 的 J. T. Stuart 共同讨论过, 他们提出了有益的意见, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Blackwelder, R. F., *Phy. of Fluids*, 26(1983), 2807—2815.
- [2] Jang P. S., Benney D. J., Gran R. L., *J. Fluid Mech.*, 169, (1986), 109—123.
- [3] Stuart J. T., *J. Fluid Mech.*, 4, (1958), 1—21.
- [4] Stuart J. T., *J. Fluid Mech.*, 9, (1960), 353—370.
- [5] Smith C. R., Metzler S. P., *J. Fluid Mech.*, 129, (1983), 27—54.
- [6] Nikolaides, C. Lau K. K. & Hanratty, T. J., *J. Fluid Mech.*, 129, (1983), 91—108.
- [7] Falco R. E., *AIAA Paper* (1983), 83-0377.

[8] Falco R. E., *Phy. of Fluids*, 20, (1977), 124—132.

INSTABILITY WAVES IN THE WALL REGION OF A TURBULENT BOUNDARY LAYER ON A FLAT PLATE

Zhou Heng

(*Tianjin University*)

Abstract Coherent structures and the bursting phenomena in the wall region of a turbulent boundary layer play a very important role in determining the characteristics of the boundary layer. Yet the nature and the origine of the coherent structures are unclear until now. In this paper, nonlinear stability calculations for the wall region of a turbulent boundary layer have been done. It was found that there do exist instability waves which may be responsible for the coherent structures.

Key words coherent structure, instability waves, turbulent boundary layer.