

Vincent 摄动解的收敛上界¹⁾

周又和 郑晓静

(华中工学院力学系) (兰州大学力学系)

提要 本文推证得到了 Vincent 摄动解^[1]与逐次迭代解的一致性。从而由迭代解的收敛性及其收敛上界得到了 Vincent 摄动解的收敛性和收敛上界。同时给出了迭代解的解析特征关系。

关键词 摄动解, 迭代解, 收敛性, 收敛上界

1. 前言

到目前为止, 在求解非线性方程中, 摄动法已成为一种广泛使用的有效方法。在轴对称薄板大挠度理论中, Vincent, J. J. 首先提出了以载荷为摄动参数的摄动解, 使人们对板的非线性弯曲问题有了一定的认识。其后许多学者研究了其它参数的摄动解^[2-5]。只因其收敛性一直难于进行, 人们往往只讨论摄动解的渐近特性, 通过比较计算结果来评估各种参数摄动法的优越与否^[4,6]。文[7]用计算机求解了钱氏高阶解, 讨论了其收敛域和渐近性。

根据现有的结果: Vincent 解相对于其余参数的摄动解, 其收敛性较差。对此却一直缺乏理论上的严格证明。本文通过严格推证, 得到了 Vincent 摄动解与逐次迭代解的一致性, 使我们对摄动解的本质有了一定的认识 and 了解。从而由迭代解的收敛性和收敛上界就可以给出 Vincent 摄动解的收敛性及其收敛上界。这样 Vincent 解的收敛性问题得到解决。与此同时, 本文还给出了逐次迭代解的解析特征关系。最后, 通过比较 Vincent 摄动解和钱氏摄动解的收敛域^[7], 得到后者的收敛域比前者大, 故钱氏摄动解优越。

2. 基本公式

由文[8]知, 轴对称圆薄板大挠度问题的 Kármán 方程可以化为与之等价的无量纲化的积分方程

$$\left. \begin{aligned} \varphi(y) &= - \int_0^1 K(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \varphi(\zeta) S(\zeta) d\zeta + p\varphi_1^*(y) \\ S(y) &= \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \varphi^2(\zeta) d\zeta \quad y \in [0, 1]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里 $p\varphi_1^*(y)$ 是对应问题的小挠度解, 如

$$1^\circ. \text{均布载荷: } \varphi_1^*(y) = \frac{1}{2} [y^2 - (\lambda + 1)y] \quad (2)$$

$$2^\circ. \text{集中载荷: } \varphi_1^*(y) = y \ln y - \lambda y \quad (3)$$

1) 中国科学院科学基金资助课题。

本文由编委叶开沅先生推荐于 1986 年 7 月 21 日收到。1987 年 8 月 21 日收到修改稿。

核函数 $K(y, \zeta)$ 和 $G(y, \zeta)$ 为

$$K(y, \zeta) = \begin{cases} [(\lambda - 1)y + 1]\zeta & \zeta \leq y \\ [(\lambda - 1)\zeta + 1]y & \zeta > y \end{cases} \quad (4)$$

$$G(y, \zeta) = \begin{cases} [(\mu - 1)y + 1]\zeta & \zeta \leq y \\ [(\mu - 1)\zeta + 1]y & \zeta > y \end{cases} \quad (5)$$

其中 λ, μ 是与边界有关的弹性常数. 如固定夹紧边界, 有 $\lambda = 0, \mu = \frac{2}{1-\nu}$ (ν 为泊松比).

由文 [1] 知, Vincent 摄动解可取为

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_i(y) s^{2i-1} \quad (6a)$$

$$S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{S}_i(y) s^{2i} \quad (6b)$$

$$W_m = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\beta}_i s^{2i-1} \quad (6c)$$

其中摄动参数 $s = p$; $\bar{\varphi}_i(y)$, $\bar{S}_i(y)$ 为待定函数; $\bar{\beta}_i$ 为待定常数.

将 (6) 式代入 (1) 式中, 比较 p 的同次幂系数后, 得:

$$\bar{\varphi}_{n+1}(y) = - \sum_{i=1}^n \int_0^1 K(y, \zeta) \bar{\varphi}_i(\zeta) \bar{S}_{n-i+1}(\zeta) \frac{1}{\zeta^2} d\zeta \quad (7a)$$

$$\bar{S}_n(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \bar{\varphi}_i(\zeta) \bar{\varphi}_{n-i+1}(\zeta) d\zeta \quad (7b)$$

$$\text{这里 } n = 1, 2, \dots; \bar{\varphi}_1(y) = \varphi_1^*(y). \quad (7c)$$

由 $W_m = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta$ 得

$$\bar{\beta}_1 = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \varphi_1^*(\zeta) d\zeta \quad (7d)$$

$$\bar{\beta}_{n+1} = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \bar{\varphi}_{n+1}(\zeta) d\zeta, n = 1, 2, \dots. \quad (7e)$$

显然由 (7) 式便可以求得任意阶摄动解.

3. 逐次迭代的解析特征关系

对 (1) 式取以载荷为参数的迭代法即逐次迭代法为

$$\varphi_{n+1}(y) = - \int_0^1 K(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \varphi_n(\zeta) S_n(\zeta) d\zeta + p \varphi_1^*(y) \quad (8a)$$

$$S_{n+1}(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \varphi_n^2(\zeta) d\zeta \quad (8b)$$

$$W_m^{(n)} = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \varphi_n(\zeta) d\zeta \quad (8c)$$

$$\text{这里 } n = 1, 2, \dots; \varphi_1(y) = p \varphi_1^*(y). \quad (8d)$$

由 (8a), (8b) 和 (8d) 式可以求得任意阶的迭代解, 然后由 (8c) 式便可得到对应的中心挠度.

依 (8) 式, 可用数学归纳法得到以下结论:

结论一: 由 (8) 式所确定的迭代解可以表为关于 p 的解析式

$$\varphi(y) = \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)} \Phi_{nl}(y) p^{2l-1} \quad (9a)$$

$$S_n(y) = \sum_{l=1}^{3^n-1} \Psi_{nl}(y) p^{2l} \quad (9b)$$

$$W_m^{(n)} = \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)} \beta_{nl} p^{2l-1} \quad (9c)$$

其中 $\Phi_{nl}(y)$ 、 $\Psi_{nl}(y)$ 和 β_{nl} 均与 p 无关, 且有

$$\Phi_{11}(y) = \varphi_1^*(y) \quad (10a)$$

$$\Psi_{nl}(y) = \frac{1}{\zeta} \sum_{j=1}^l \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^j} \Phi_{nj}(\zeta) \Psi_{n,l-j+1}(\zeta) d\zeta \quad (10b)$$

$$l = 1, 2, \dots, 3^{n-1}; \text{ 其中 } \Phi_{nj}(y) \equiv 0, \text{ 当 } j = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1) + 1, \dots, 3^{n-1};$$

$$\Phi_{n+1,l}(y) = \varphi_1^*(y) \quad (10c)$$

$$\Psi_{n+1,l+1}(y) = - \sum_{j=1}^l \int_0^1 K(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^j} \Phi_{nj}(\zeta) \Psi_{n,l-j+1}(\zeta) d\zeta \quad (10d)$$

$$l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(3^n - 1); \text{ 其中}$$

$$\Psi_{nj}(y) \equiv 0, \quad j = 3^{n-1} + 1, \dots, \frac{1}{2}(3^n - 1);$$

$$\Phi_{nj}(y) \equiv 0, \quad j = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) + 1, \dots, \frac{1}{2}(3^n - 1);$$

$$\beta_{nl} = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \Phi_{nl}(\zeta) d\zeta, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (10e)$$

显然, 由 (10) 式便可以求得各阶迭代解, 而 (9c) 式则给出了高阶迭代解的解析特征关系.

4. Vincent 解与逐次迭代解的关系

由 (7) 与 (10) 式, 我们可以得到以下结论.

结论二: 对于任意的正整数 n , 当 $l \leq n$ 时, 有

$$\Phi_{nl}(y) = \bar{\varphi}_l(y) \quad (11a)$$

$$\Psi_{nl}(y) = \bar{S}_l(y) \quad (11b)$$

$$\beta_{nl} = \bar{\beta}_l \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (11c)$$

成立.

证明: 由归纳法, 当 $n = 1$ 时, 由 (7) 和 (10) 式有

$$\Phi_{n1}(y) = \varphi_1^*(y) = \bar{\varphi}_1(y) \quad (12a)$$

$$\Psi_{n1}(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta = \bar{S}_1(y) \quad (12b)$$

$$\beta_{n1} = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta = \bar{\beta}_1 \quad (12c)$$

故 (11) 式对 $n = 1$ 时成立. 设直到 $n = k$ 时 (11) 式成立, 即有

$$\Phi_{rl}(y) = \bar{\varphi}_l(y) \quad (13a)$$

$$\Psi_{rl}(y) = \bar{S}_l(y) \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (13b)$$

$$\beta_{rl} = \bar{\beta}_l \quad l = 1, 2, \dots, r. \quad (13c)$$

于是由 (13) 式得

$$\Phi_{kj}(y) = \bar{\varphi}_j(y), \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\Psi_{k,l-j+1}(y) = \bar{S}_{l-j+1}(y), \quad l = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

由 (10c) 和 (7c) 式有 $\Phi_{k+1,1}(y) = \varphi_1^*(y) = \bar{\varphi}_1(y)$

又由 (10d) 和 (7a) 式得

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1,l+1}(y) &= - \sum_{j=1}^l \int_0^1 K(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \Phi_{kj}(\zeta) \Phi_{k,l-j+1}(\zeta) d\zeta \\ &= - \sum_{j=1}^l \int_0^1 K(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \bar{\varphi}_j(\zeta) \bar{\varphi}_{l-j+1}(\zeta) d\zeta \\ &= \bar{\varphi}_{l+1}(y) \quad l = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (14a)$$

依 (10b) 和 (7b) 式, 有

$$\Phi_{k+1,l-j+1}(y) = \bar{\varphi}_{l-j+1}(y), \quad l = 1, 2, \dots, k+1; \quad j = 1, 2, \dots, l$$

于是

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1,l}(y) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \Phi_{k+1,j}(\zeta) \Phi_{k+1,l-j+1}(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \bar{\varphi}_j(\zeta) \bar{\varphi}_{l-j+1}(\zeta) d\zeta \\ &= \bar{S}_l(y), \quad l = 1, 2, \dots, k+1. \end{aligned} \quad (14b)$$

由 (10e) 式和 (14a) 式得

$$\beta_{k+1,l} = - \int_0^1 \frac{1}{\zeta} \Phi_{k+1,l}(\zeta) d\zeta = \bar{\beta}_l, \quad l = 1, 2, \dots, k+1, \quad (14c)$$

依 (14a, b, c) 式显然可知 (11) 式在 $n = k+1$ 时成立. 从而由数学归纳法得到结论二成立, 证毕.

结论二表明: 有限阶的 Vincent 摄动解是相应阶数迭代解的部分和.

$$\begin{aligned} \text{令} \quad (\varphi(y), S(y), W_m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(y), S_n(y), W_n^{(n)}) \\ (\Phi^*(y), \Psi^*(y), \beta^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi_{n1}(y), \Psi_{n1}(y), \beta_{n1}). \end{aligned}$$

则很快可以得到以下推论.

推论一: $\forall l \geq 1$, 有

$$\Phi_l^*(y) = \bar{\varphi}_l(y), \quad \Psi_l^*(y) = \bar{S}_l(y), \quad \beta_l^* = \bar{\beta}_l \quad (15)$$

成立.

该推论表明逐次迭代解的极限为 Vincent 摄动解 (6) 式. 设逐次迭代解 (8) 式和 Vincent 摄动解 (6) 式的收敛域分别为 R_S 和 R_V , 则由推论一知: 逐次迭代解的收敛域被包含在 Vincent 摄动解的收敛域内, 即 $R_S \subset R_V$. 而由结论二可得, 若有 Vincent 摄动解收敛, 就有逐次迭代解收敛, 从而逐次迭代解的收敛域包含了 Vincent 摄动解的收敛域, 即有 $R_S \supset R_V$. 因此 $R_S = R_V$, 即逐次迭代解 (8) 式的收敛域与 Vincent 摄动解 (6) 式的收敛域完全一致. 这样, 只要我们从这两种途径中得到任一种的收敛性结论, 则另一种的收敛性就可随即给出.

5. 关于解的收敛性和收敛上界

1) 任意载荷作用下解的收敛性证明.

为了使证明得以进行, 类似于文 [8] 和 [9], 在此给出一个解空间.

定义一: 集合 $A = \{y^\alpha f(y) | f(y) \in C_0[0, 1], \alpha > \frac{1}{2}\}$. 这里 $C_0[0, 1]$ 是由在 $[0,$

1] 上任意连续函数所组成的集合.

定义二: 范数 $\|f\| = \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)|$, $f(y) \in C_0[0, 1]$.

设 $\varphi_n^*(y) \in A$, 则可以证明: 迭代解序列 $\{\varphi_n(y)\} \subset A$, $\{S_n(y)\} \subset A$. 于是令 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\Phi_n(y) = y^{-\alpha} \varphi_n(y)$ 和 $\Psi_n(y) = y^{-\alpha} S_n(y)$, 由 (8) 式则得

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \zeta \|\Phi_n\|^3 + \|\Phi_1\| \quad (16)$$

这里

$$\begin{aligned} \zeta = & \left\| -\frac{1}{2} y^{-\alpha} \int_0^1 K(y, \zeta) \zeta^{a-2} \int_0^1 G(\zeta, \eta) \eta^{2(a-1)} d\eta d\zeta \right\| \\ & - \left\| \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{\lambda-1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} \right) + \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \right. \right. \\ & \cdot \left. \left(\frac{\lambda-1}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha-1} \right) \right] y^{1-\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-1} \right) \\ & \cdot \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} \right) y + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \\ & \cdot \left. \left(\frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{3\alpha-1} \right) y^{2\alpha} \right\|. \end{aligned} \quad (17)$$

显然 ζ 是一大于零的正数.

令 $\|\Phi_n\| \leq \gamma \|\Phi_1\|$ ($\gamma > 1$), 则当

$$\|\Phi_1\| \leq \sqrt{\frac{\gamma-1}{\zeta \gamma^3}} \quad (18)$$

时, 有

$$\|\Phi_{n+1}\| \leq \gamma \|\Phi_1\| \quad (19)$$

成立. 故对任意的 $\gamma > 1$, 只要 $\|\Phi_1\| \leq \sqrt{\frac{\gamma-1}{\zeta \gamma^3}}$, 则对任意的正整数 n , 均有

$$\|\Phi_n\| \leq r \|\Phi_1\| \quad (20)$$

成立. 令 $f(r) = \sqrt{\frac{r-1}{\zeta r^3}}$, 则由 $f'(r) = 0$ 得 $r = \frac{3}{2}$.

$$\text{且} \quad \max_{r>1} f(r) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3\zeta}} \quad (21)$$

于是得到以下结论:

结论三: 当 $p < p_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3\zeta}} / \|\Phi^*\|$ 时, 由迭代解 (8) 式所确定的迭代函数序列 $\{\Phi_n(y)\}$ 对任意的正整数 n , 都有不等式

$$\|\Phi_n\| < \sqrt{\frac{1}{3\zeta}} \quad (22)$$

成立. 更进一步有 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

证明: 此处只需证明收敛性即可. 由 (8) 式可得

$$\|\Phi_{n+1} - \Phi_n\| \leq \theta_n \|\Phi_n - \Phi_{n-1}\|, \quad (23)$$

其中 $\theta_n = \zeta [\|\Phi_n\|(\|\Phi_n\| + \|\Phi_{n-1}\|) + \|\Phi_{n-1}\|]$.

令 $r^* = \frac{3}{2} - \delta$ (这里 δ 是一很小的正数), 则由 (20) 式知: 当 $\|\Phi_1\| \leq \sqrt{\frac{r^*-1}{\zeta(r^*)^3}}$ 时,

即当 $p \leq \sqrt{\frac{r^*-1}{\zeta(r^*)^3}} / \|\Phi_1^*\| < p_{\max}$ 时, 有 $\|\Phi_n\| \leq r^* \|\Phi_1\|$ 成立.

$$\text{于是} \quad \theta_n \leq \theta^* = 3 \cdot (r^*)^2 \cdot \frac{r^*-1}{\zeta(r^*)^3} \cdot \zeta = 3 \left(1 - \frac{1}{r^*}\right) < 1. \quad (24)$$

故 $\forall m > n > 1$, 有

$$\|\Phi_m - \Phi_n\| \leq \frac{(\theta^*)^{n-1} - (\theta^*)^{m-1}}{1 - \theta^*} \|\Phi_1 - \Phi_1\| \quad (25)$$

$$\text{从而} \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\Phi_m - \Phi_n\| = 0 \quad (26)$$

对任意的 $y \in [0, 1]$ 成立, 即迭代函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 同理可以证明 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 证毕.

2) 收敛上界.

假定在外加载荷作用下, 使对应的小挠度解在整个区域 $[0, 1]$ 上满足 $\varphi^*(y) \leq 0$. 若是多个载荷联合作用达到该条件, 则 p 为所有载荷依单一参数变化的量. 于是有迭代解收敛上界的结论如下.

结论四: 当 $p \geq p_{\max}^* = \max_{0 \leq y \leq 1} \left| \frac{\varphi_1^*(y)}{\int_0^1 K(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} \varphi_1^*(\zeta) S_1^*(\zeta) d\zeta} \right|^{1/2}$ 时, 则由 (8) 式得到

的迭代解的函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 满足以下不等式

$$\varphi_{2n+1}(y) \leq \varphi_{2n-1}(y) \leq 0 \quad (27)$$

$$\varphi_{2n+2}(y) \geq \varphi_{2n}(y) \geq 0 \quad (28)$$

这里 $n = 1, 2, \dots$; 且

$$S_1^*(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \zeta) \frac{1}{\zeta^2} [\varphi_1^*(\zeta)]^2 d\zeta \quad (29)$$

类似于文 [10], 本结论可用数学归纳法得到. 此处证明从略.

有了结论四后, 以下推论不难得到.

推论二: 当 $p > p_{\max}^*$ 时, 迭代函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 以两个子序列分别朝两相反方向单调增加, 故迭代函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 不收敛. 这样迭代解 (8) 式的收敛域只可能是

$$p < p_{\max}^*. \quad (30)$$

显然推论二给出了迭代解 (8) 的一个收敛上界值. 依前节可知, 本节关于迭代解 (8) 式的收敛性及其收敛上界的结论对 Vincent 摄动解 (6) 式的收敛性和收敛上界同样适用. 从而关于 Vincent 摄动解的收敛性问题便得到解决.

6. 结论

本文严格证明了圆板大挠度问题的以载荷为摄动参数的 Vincent 摄动解与逐次迭代解的一致性, 即两种方法殊途同归. 从而使得 Vincent 摄动解的收敛性问题能转化为由研究逐次迭代解的收敛性给出, 使摄动解的收敛性等难于开展的工作能得以进行, 并使我们对摄动解的本质有了一定的认识 and 了解.

与此同时, 本文给出了 Vincent 摄动解在 $\varphi_1(y) \leq 0$ 情形下的收敛上界, 这为比较各种摄动参数的摄动解的优越性提供了理论依据. 由计算得到, 对于中心受集中载荷作用的固定夹支圆薄板, 有 $p_{\max}^* = 2.87$ ($\nu = 0.3$). 而由文 [7] 知, 以中心挠度为摄动参数的摄动解 (即钱氏解) 对同一问题有: 当 $W_m \leq 2.7$ 时钱氏解收敛, 此时对应的载荷值 p 满足 $p \leq 5.56$. 可见, 钱氏摄动解的收敛域较 Vincent 解的收敛域大, 因而钱氏摄动解收敛快.

参 考 文 献

- [1] Vincent, J. J., The Bending of a Thin Circular Plate. *Phil. Mag.*, 12, (1931), 185—196.
- [2] Chien, W. Z., Large Deflection of a Circular Clamped Plate under Uniform Pressure. *中国物理学报*, 7, 2(1947), 102—113.
- [3] 胡海昌, 在均布及中心集中载荷下圆薄板大挠度问题, *物理学报*, 10(1954), 383—394.
- [4] DaDeppo, D. A., Schmidt, R., Moderately Large Deflections of a Loosely Clamped Circular Plate under a Uniformly Distributed Load, *Indus. Math.*, 25, 1 (1975), 17—28.
- [5] 黄黔, 复合载荷下圆薄板的大挠度问题, *应用数学和力学*, 4, 5(1983), 711—720.
- [6] 陈山林, 光积昌, 圆薄板大挠度问题的摄动参数, *应用数学和力学*, 2, 1(1981), 131—144.
- [7] 叶开沅, 周又和, 关于钱氏摄动法的高阶解的计算机求解和收敛性的研究, *应用数学和力学*, 7, 4, (1986), 285—293.
- [8] 叶开沅, 郑晓静, 周又和, An Analytical Formula of Exact Solution to Kármán's Equations of Circular Plate under a Concentrated Load, *Proc. ICNM, Shanghai, Science Press, Beijing, China* (1985), 386—391.
- [9] 郑晓静, 周又和, 复合载荷下圆薄板大挠度问题的精确解, *中国科学 A 辑*, 10(1986), 1045—1056.
- [10] 郑晓静, 周又和, 关于集中载荷下圆板非线性弯曲问题的解析电算求解, *应用数学和力学*, 8, 8(1987).

A CONVERGENT UPPER BOUND OF VINCENT'S PERTURBATION SOLUTION

Zhou Youhe

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China*)

Zheng Xiaojing

(*Lanzhou University, Lanzhou, China*)

Abstract In this paper, we have proved that the convergent ranges of the Vincent's perturbation solution are the same as those of the iterative solution. Hence, both the convergence and convergent upper value of Vincent's perturbation solution can be obtained by means of ones of the iterative solution. Meantime, the analytic formula of the characteristic relation of the iterative solution has also been given.

Key words perturbation solution; iterative solution; Convergence; convergent upper bound.