

各向异性介质中 SH 波引起的 圆孔附近的动应力集中*

刘 殿 魁

(国家地震局工程力学研究所)

提要 本文利用复变函数方法求解无限的各向异性介质中入射的 SH 波对圆形孔洞的散射问题。指出动应力集中系数与入射波波数 K_0 和圆孔半径 r 有关。最后给出了圆孔附近动应力集中系数的数值结果。

关键词 弹性波的散射, 动应力集中, 稳态波, SH 波

一、前 言

弹性波的散射和动应力集中问题, 是弹性动力学中的重要课题之一, 它在工程技术、地球物理等学科中, 有着广泛的应用。Pao 的文献 [1] 对此做出了非常全面的评述。应特别指出, 在各种各样的分析方法中, 复变函数方法^[3,4], 为解决非圆形孔洞的散射问题提供了一个新的途径。本文推广了复变函数方法, 以求解各向异性介质中 SH 波对圆孔的散射问题。

对于各向异性介质中波的传播和散射问题的研究, 一般是采用迭加各方向的平面波, 即用 Fourier 积分方法去求解^[6]。而对弹性体的散射和动应力集中问题的研究工作, 则更为少见。作者在文献 [7] 中, 利用广义射线法, 研究了各向异性介质中固定圆柱对 SH 波散射问题的远场解。

本文将使用复变函数方法求解各向异性介质中 SH 波对圆孔的散射和动应力集中问题。首先, 在复平面 $(z, \bar{z})$ 上给出各向异性介质中 SH 波的运动方程的一般解。对稳态问题, 这个一般解用一个以变换参量 ζ 和 $\bar{\zeta}$ 的模为宗量的 Hankel 函数的级数来表示, 并利用这个一般解, 给出了 SH 波对圆形孔洞散射问题的解答。如利用保角映射函数, 则可进一步求解非圆孔洞的散射问题。

二、反平面剪切运动

1. 基本方程和它的解

在各向异性介质中, 弹性波对孔洞的散射问题, 其最简单的模型就是反平面剪切运动。如果入射波在 xy 平面内, 而由它引起的散射波的位移 $w(x, y, t)$ 垂直于 xy 平面, 而且与 z 轴无关。此时, 运动方程可以写成

本文于 1986 年 12 月 25 日收到第一次稿, 于 1987 年 8 月 5 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

这里 ρ 为材料密度.

由虎克定律,在各向异性介质中,应力和位移有如下的关系^[4]

$$\tau_{xz} = C_{55} \frac{\partial w}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\tau_{yz} = C_{45} \frac{\partial w}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3)$$

这里 C_{55} , C_{45} 和 C_{44} 为材料的三个独立的弹性常数

将表达式 (2.2) 和 (2.3) 代入运动方程 (2.1), 则运动方程可以写成如下的形式^[4]

$$C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

若引进复变量

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (2.5)$$

则方程 (2.4) 可写成如下的形式

$$\begin{aligned} (C_{55} - C_{44} + 2iC_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2(C_{55} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} \\ + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

如果我们再引入如下形式的复变量

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} [(1 - i\gamma)z + (1 + i\gamma)\bar{z}] \\ \xi &= \frac{1}{2} [(1 - i\gamma)z + (1 + i\gamma)\bar{z}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里 $\gamma = -C_{45}/C_{44} + i(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{1/2}/C_{44}$.

利用复变量 ζ 和 ξ , 则运动方程 (2.6) 可以写成如下的形式

$$4 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

这里 $C_T^2 = \mu/\rho$, $\mu = (C_{55}C_{44} - C_{45}^2)/C_{44}$.

对于稳态波情形, w 可以写成:

$$w(\zeta, \xi, t) = \text{Re}[w(\zeta, \xi)e^{-i\omega t}] \quad (2.9)$$

这里 $w(\zeta, \xi)$ 是 ζ 和 ξ 的函数; ω 是位移 w 的圆频率. 如果代 (2.9) 至 (2.8), 则有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} = \left(\frac{iK_T}{2}\right)^2 w \quad (2.10)$$

这里 $K_T = \omega/C_T$.

由 [3, 4] 可知, 方程 (2.10) 决定的散射波有如下的形式

$$w^{(s)}(\zeta, \xi) = \sum_n A_n H_n^{(1)}(K_T |\zeta|) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^n \quad (2.11)$$

或

$$w^{(n)}(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)} \left(K_T \left| \frac{1}{2} [(1-i\gamma)z + (1+i\gamma)\bar{z}] \right| \right) \cdot \left\{ \frac{(1-i\gamma)z + (1+i\gamma)\bar{z}}{|(1-i\gamma)z + (1+i\gamma)\bar{z}|} \right\}^n \quad (2.12)$$

这里, A_n 为待定的任意常数; $H_n^{(1)}(\quad)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数.

2. 应力表达式

应力表达式 (2.2) 和 (2.3), 在复平面 $(z, \bar{z})$ 上, 可写成

$$\tau_{xx} = (C_{55} + iC_{45}) \frac{\partial w}{\partial z} + (C_{55} - iC_{45}) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \quad (2.13)$$

$$\tau_{yz} = (C_{45} + iC_{44}) \frac{\partial w}{\partial z} + (C_{45} - iC_{44}) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \quad (2.14)$$

而在极坐标中, 应力表达式为

$$\begin{aligned} \tau_{rr} = & \frac{1}{2} \left[(C_{55} + C_{44}) \frac{\partial w}{\partial z} + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right] e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{2} \left[(C_{55} - C_{44} + 2iC_{45}) \frac{\partial w}{\partial z} + (C_{55} + C_{44}) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right] e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \frac{1}{2} \left[i(C_{44} + C_{55}) \frac{\partial w}{\partial z} + (2C_{45} + i(C_{55} - C_{44})) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right] e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{2} \left[(2C_{45} + i(C_{44} - C_{55})) \frac{\partial w}{\partial z} - i(C_{44} + C_{55}) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right] e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

而在 $(\zeta, \bar{\zeta})$ 平面内, 应力表达式 (2.15) 和 (2.16) 有如下的形式

$$\begin{aligned} \tau_{rr} = & \frac{1}{4} \left\{ [(C_{55} + C_{44})(1-i\gamma) + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45})(1+i\gamma)] \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right. \\ & + [(C_{55} + C_{44})(1-i\bar{\gamma}) + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45})(1+i\bar{\gamma})] \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \left. \right\} e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ [(C_{55} - C_{44} + 2iC_{45})(1-i\gamma) + (C_{55} + C_{44})(1+i\gamma)] \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right. \\ & + [(C_{55} - C_{44} + 2iC_{45})(1-i\bar{\gamma}) + (C_{55} + C_{44})(1+i\bar{\gamma})] \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \left. \right\} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \frac{1}{4} \left\{ [i(C_{44} + C_{55})(1-i\gamma) + (2C_{45} + i(C_{55} - C_{44}))(1+i\gamma)] \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right. \\ & + [i(C_{44} + C_{55})(1-i\bar{\gamma}) + (2C_{45} + i(C_{55} - C_{44}))(1+i\bar{\gamma})] \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \left. \right\} e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ [(2C_{45} + i(C_{44} - C_{55}))(1-i\gamma) - i(C_{44} + C_{55})(1+i\gamma)] \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right. \\ & + [(2C_{45} + i(C_{44} - C_{55}))(1-i\bar{\gamma}) - i(C_{44} + C_{55})(1+i\bar{\gamma})] \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \left. \right\} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.18)$$

3. 散射应力场

利用散射位移场的表达式 (2.11), 则可求得散射的应力场。代 (2.11) 至 (2.17) 和 (2.18), 同时利用如下公式^[3,4]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[H_n(K|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^n \right] = \frac{K}{2} H_{n-1}(K|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[H_n(K|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^n \right] = -\frac{K}{2} H_{n+1}(K|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \quad (2.20)$$

则散射应力 $\tau_{rs}^{(s)}$ 和 $\tau_{\theta z}^{(s)}$ 可以写成:

$$\begin{aligned} \tau_{rs}^{(s)} = & \frac{1}{4} \left\{ (a + ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n-1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\ & - (b - ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n+1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \left. \right\} e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ (b + ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n-1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\ & - (a - ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n+1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \left. \right\} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(s)} = & \frac{1}{4} \left\{ (a' + ib') \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n-1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\ & - (-a' + ic') \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n+1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \left. \right\} e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ (-a' - ic') \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n-1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\ & - (a - ib') \sum_{-\infty}^{\infty} A_n K_I H_{n+1}^{(1)}(K_I |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \left. \right\} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

这里

$$\begin{aligned} a = b' &= (C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{\frac{1}{2}}}{C_{44}} \right] \\ b = c &= -(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{\frac{1}{2}}}{C_{44}} \right] \\ c = -a' &= \frac{C_{45}(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{\frac{1}{2}}}{C_{44}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

三、入 射 波

1. 入射波

将沿 $\mathbf{n}$ 方向入射的平面波 $f\left(t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{C_a}\right)$, 其中 $\cos \alpha = n_x$, $\sin \alpha = n_y$; C_a

为沿 $\mathbf{n}$ 方向的波速, 代入 (2.4), 则得波速方程:

$$C_s = \left[\frac{1}{\rho} (C_{55} \cos^2 \alpha + 2C_{45} \sin \alpha \cos \alpha + C_{44} \sin^2 \alpha) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

而在一般情况下, 沿 z 方向入射的平面波是:

$$w^{(i)} = W_0 e^{i[K_\alpha(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \omega t]} \quad (3.2)$$

这里 W_0 为入射波幅值; 而 $\omega = K_\alpha C_s$.

如果引入极坐标, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则入射波 (3.2) 可写成:

$$w^{(i)} = W_0 e^{i[K_\alpha r \cos(\theta - \alpha)]} e^{-i\omega t} \quad (3.3)$$

再将 (3.3) 展成复形式的 Fourier 级数^[2]:

$$w^{(i)} = W_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_\alpha r) e^{in(\theta - \alpha)} e^{-i\omega t} \quad (3.4)$$

这里 $J_n(\quad)$ 为 n 阶的 Bessel 函数.

而在复平面 $(z, \bar{z})$ 上, (3.4) 有如下的形式:

$$w^{(i)} = W_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n e^{-ina} e^{-i\omega t} \quad (3.5)$$

2. 入射应力场

利用入射波 (3.5) 和应力表达式 (2.15) 和 (2.16) 可得复平面 $(z, \bar{z})$ 上的入射应力场:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(i)} = \frac{K_\alpha W_0}{4} & \left\{ \left[(C_{55} + C_{44}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ & - (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \left. \right] e^{i\theta} \\ & + \left[(C_{55} - C_{44} + 2iC_{45}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \\ & \left. \left. - (C_{55} + C_{44}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{-i\theta} \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{K_\alpha W_0}{4} & \left\{ \left[i(C_{55} + C_{44}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ & - (2C_{45} + i(C_{55} - C_{44})) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \left. \right] e^{i\theta} \\ & + \left[(2C_{45} + i(C_{44} - C_{55})) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \\ & \left. \left. + i(C_{55} + C_{44}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{-i\theta} \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

四、边值问题

在各向异性介质中圆孔的散射问题中, 我们只研究在孔边上给定位移和应力的二种边值问题.

1. 第一边值问题: 如果在孔洞的周边上给定位移 $G = \operatorname{Re}[G(z, \bar{z})e^{-i\omega t}]$, 若 $G = 0$, 即为固定边界. 此时, 位移边界条件可以写成:

当 $|z| = r$

$$w^{(i)} + w^{(s)} = G \quad (4.1)$$

或

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n = \varepsilon \quad (4.2)$$

这里

$$\varepsilon_n = H_{n-1}^{(1)}(K_T |\zeta|) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^n \quad (4.3)$$

$$\varepsilon = G - w^{(i)} \quad (4.4)$$

在表达式 (4.2) 两边乘以 $e^{-is\theta}$, 并在 $(-\pi, \pi)$ 区间积分, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n = \varepsilon_s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.5)$$

这里

$$\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_n e^{-is\theta} d\theta$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (G - w^{(i)}) e^{-is\theta} d\theta$$

方程 (4.5) 为决定未知系数 A_n 的一组无穷代数方程组.

2. 第二边值问题: 如果在孔洞周边上给出应力 $F = \operatorname{Re}[F(z, \bar{z})e^{-i\omega t}]$, 若 $F = 0$, 则为自由边界. 则应力边界条件可以写成

当 $|z| = r$

$$\tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = F \quad (4.6)$$

或

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n = \varepsilon \quad (4.7)$$

这里

$$\varepsilon_n = \frac{K_T}{K_a} \left\{ \left[(a + ic) H_{n-1}^{(1)}(K_T |\zeta|) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n-1} \right. \right. \\ \left. \left. - (b - ic) H_{n+1}^{(1)}(K_T |\zeta|) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n+1} \right] e^{i\theta} \right. \\ \left. + \left[(b + ic) H_{n-1}^{(1)}(K_T |\zeta|) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n-1} \right. \right. \\ \left. \left. - (a - ic) H_{n+1}^{(1)}(K_T |\zeta|) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n+1} \right] e^{-i\theta} \right\}$$

$$\varepsilon = F - \left\{ \left[(1 + \eta) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |z|) e^{i(n-1)\theta} e^{-i\eta\alpha} - (1 - \eta - 2i\xi) \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |z|) e^{i(n+1)\theta} e^{-i\eta\alpha} \right] e^{i\theta} \right. \\ \left. + \left[(1 - \eta + 2i\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |z|) \cdot e^{i(n-1)\theta} \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |z|) e^{i(n+1)\theta} e^{-i\eta\alpha} \right] e^{-i\theta} \right\}$$

$$- (1 + \eta) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |z|) e^{i(n+1)\theta} e^{-in\alpha} \Big] e^{-i\theta} \Big\}$$

这里

$$\xi = C_{45}/C_{55}, \quad \eta = C_{44}/C_{55}$$

将表达式 (4.7) 两边乘以 $e^{-is\theta}$, 并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n = \varepsilon_s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

这里

$$\varepsilon_{s1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_n e^{-is\theta} d\theta$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon e^{-is\theta} d\theta$$

(4.8) 式为决定未知系数 A_n 的无穷代数方程组。

五、动应力集中系数

我们研究一个 SH 平面波对一个表面自由的圆形孔洞的入射问题。入射应力则可写成 (3.6) 和 (3.7) 的形式。入射应力的最大幅值 τ_0 为:

$$\tau_0 = C_{55} K_a W_0 \quad (5.1)$$

按动应力集中系数定义^[2], 则孔边上的动应力集中系数 $\tau_{\theta z}^*$ 可以写成:

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{\theta z} / \tau_0 \quad (5.2)$$

即:

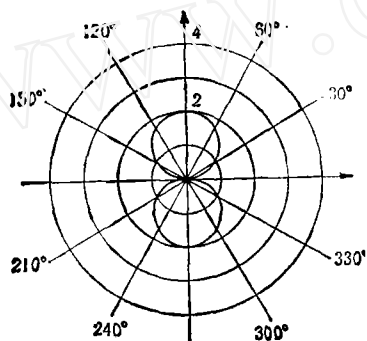
$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^* = & \frac{1}{4} \left\{ i(1 + \eta) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n-1} e^{-in\alpha} \right. \\ & - [2\xi + i(1 - \eta)] \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n+1} e^{-in\alpha} \Big\} e^{i\theta} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ [2\xi + i(\eta - 1)] \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |z|) \right. \\ & \cdot \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n-1} e^{-in\alpha} + i(1 + \eta) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |z|) \\ & \cdot \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^{n+1} e^{-in\alpha} \Big\} e^{-i\theta} + \frac{\eta^2 (\cos^2 \alpha + 2\xi \sin \alpha \cos \alpha + \eta \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}{4(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\ & \cdot \left\{ [(a' + ib') \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(0)} \left(\frac{C_a}{C_T} K_a |\zeta| \right) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n-1} \right. \right. \\ & + (a' - ib') \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(0)} \left(\frac{C_a}{C_T} K_a |\zeta| \right) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n+1} \Big] e^{i\theta} \\ & + [(-a' + ib') \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(0)} \left(\frac{C_a}{C_T} K_a |\zeta| \right) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n-1} \\ & \left. \left. - (a' - ib') \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(0)} \left(\frac{C_a}{C_T} K_a |\zeta| \right) \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \right\}^{n+1} \right] e^{-i\theta} \right\} \quad (5.3) \end{aligned}$$

这里系数 A_n 由方程式 (4.8) 决定.

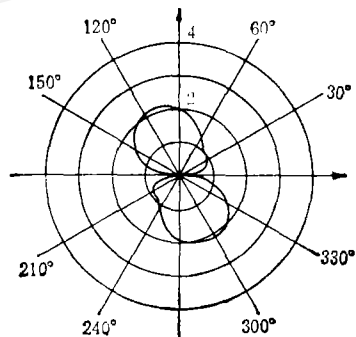
六、数值结果

动应力集中系数 (5.3) 式为角变量 θ 的一个复函数, 即 $A + iB$. 而真实的应力反应应写成 $(A + iB)e^{-i\omega t}$ 的实部, 即 $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. 由此可知实部 A 代表 $t = T/2$ 时刻的负 $\tau_{\theta z}^*$ 值, 而虚部 B 代表 $t = T/4$ 时刻的 $T_{\theta z}^*$ 值. 这里 T 为入射波之周期. 而 $\tau_{\theta z}^*$ 的最大值则可以写成 $(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$, 即 $|A + iB|$ 的绝对值. 在具体计算中, 我们按 [2] 中的方法, 计算了 $|\tau_{\theta z}^*|$ 的值.

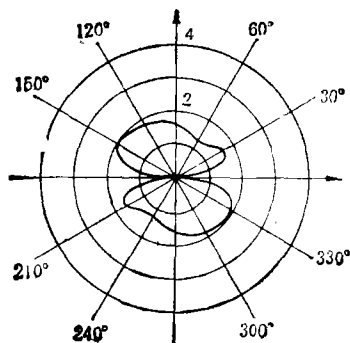
在边界 r 上, $|\tau_{\theta z}^*|$ 随角度 θ 的变化关系用图 1, 图 2 和图 3 表示出来. 它们分别表示在不同 $K_{\alpha r}$ 值和不同方向上入射 SH 波时, 不同介质中孔洞周边上的动应力集中系数 $|\tau_{\theta z}^*|$ 随角 θ 的变化关系. 对于 $K_{\alpha r} = 0.1$ 情况, 也就是说在低频波入射时, 孔边为 $|\tau_{\theta z}^*|$ 接近于静力值 [2]. 随着 $K_{\alpha r}$ 的增长, $|\tau_{\theta z}^*|$ 的值则慢慢降下来. 所以我们认为, 对动应力集中而言, 研究低频波入射时的动应力集中最为重要. 这一点与各向同性介质中情况是相同的. 计算结果表明, 在各向同性介质中, 即 $\xi = 0, \eta = 1.0$ 的情况下, 与文献 [2] 中所得结果一致.



$\alpha = 0, \xi = 0, \eta = 1.0$

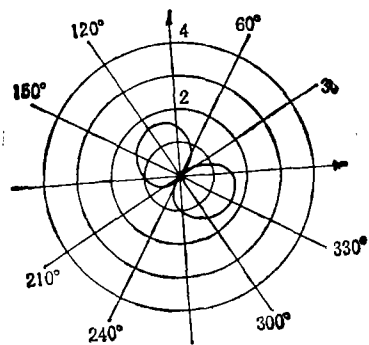


$\alpha = 0, \xi = 0.2, \eta = 0.8$

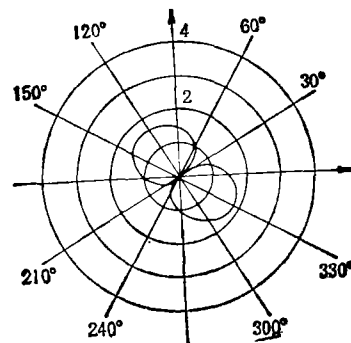


$\alpha = 0, \xi = 0.1, \eta = 0.5$

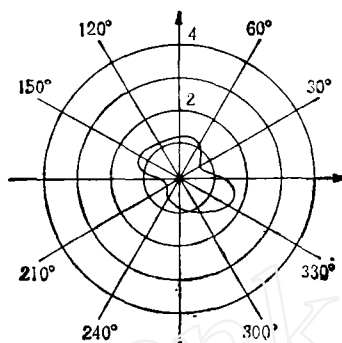
图 1 $K_{\alpha r} = 0.1$ 时 $|\tau_{\theta z}^*|$ 分布图



$$\alpha = 45^\circ, \xi = 0, \eta = 1.0$$

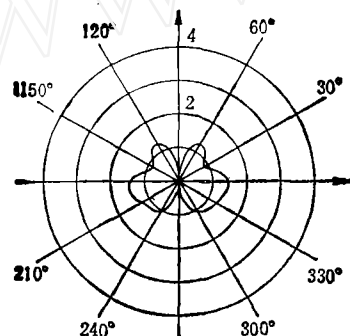


$$\alpha = 45^\circ, \xi = 0.2, \eta = 0.8$$

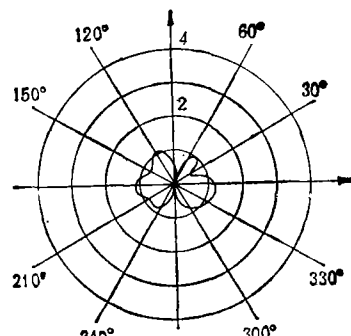


$$\alpha = 45^\circ, \xi = 0.1, \eta = 0.5$$

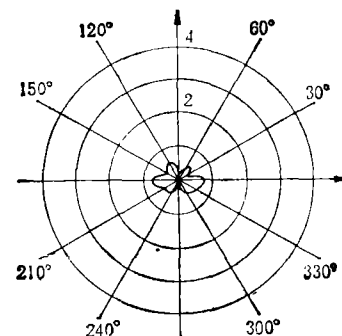
图2 $K_0 r = 1.0$ 时 $|\tau_{\theta z}^*|$ 分布图



$$\alpha = 90^\circ, \xi = 0, \eta = 1.0$$



$$\alpha = 90^\circ, \xi = 0.2, \eta = 0.8$$



$$\alpha = 90^\circ, \xi = 0.1, \eta = 0.5$$

图3 $K_0 r = 2.0$ 时 $|\tau_{\theta z}^*|$ 分布图

参 考 文 献

- [1] Pao, Yih-Hsing, Elastic waves in solids, *J. of Applied Mechanics*, 50(1983), 4, 1152—1164.
- [2] Pao, Yih-Hsing and Mow, C. C., Diffraction of Elastic wave and Dynamic Stress Concentration, Crane and Russak, New York (1973).
- [3] 刘殿魁, 盖秉政, 陶贵沅, 论孔附近的动应力集中, 力学学报特刊, (1981), 65—77.
- [4] Liu, D. K., Gai, B. Z and Tao, G. Y., Applications of the method of complex function to dynamic stress concentrations, *Wave Motion*, 4(1982), 293—304.
- [5] Buchwold, V. T., Elastic waves in anistropic media, Proceeding of Royal Society London, Series A, 253, (1959), 563—580.
- [6] Crampin, S. A., Review of wave motion in anistropic and creaked elastic media, *Wave Motion*, 3(1981), 343—391.
- [7] 黎在良, 刘殿魁, 各向异性介质中圆柱体对 SH 波散射的射线理论, 地震工程与工程振动, 7(1987), 1, 1—8.
- [8] Cherepanov, G. P., Mechanics of Brittle Fracture, McGraw-Hill International Book Company, New York, (1974).

DYNAMIC STRESS CONCENTRATION AROUND A CIRCULAR CAVITY BY SH WAVE IN AN ANISOTROPIC MEDIA¹⁾

Liu Dianku

(Institute of Engineering Mechanics, State Seismological Bureau)

Abstract In this paper, the method of complex function is used to solve the scattering problem of a circular cavity by SH wave in an anisotropic media. The dynamic stress concentration factors are found to be dependent on the incident wave number K_0 and radius r of the cavity. Results of dynamic stress concentration for a circular cavity are given.

Key words scattering of elastic wave, dyanmic stress concentration, steady-state wave, SH wave.

1) The project supported by National Natural Science Foundation of China.