

高阶非完整系力学中的交换关系

金 伏 生

(武 汉 工 学 院)

提要 本文给出了高阶非完整系力学中的二种交换关系,证明了关于场方程和积分原理是等价的。

关键词 非完整力学。

我们将在文[1,2]的基础上,给出高阶非完整系的二种交换关系。

用文[3]的凝缩符号。广义坐标矢列 $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, q_1 为独立坐标, q_2 为非独立坐标,再取 $q_* = q_1$ 为准坐标。 Q 为广义荷载。矢微商服从 Jacobi 规则。 $k+1$ 阶非完整系关于动能和三种等价形式的坐标约束式,以及坐标变分条件为^[3,4]:

$$\begin{aligned} T^{(k)}(q, q^{(1)}, \dots, q^{(k+1)}, t) &= \tilde{T}^{(k)}(q, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, q_1^{(k+1)}, t) \\ &= \tilde{T}^{(k)}(q, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, q_*^{(k+1)}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} f(q, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, q^{(k+1)}, t) &= 0 (\det \partial f / \partial q_2^{(k+1)} \neq 0) \\ q_2^{(k+1)} &= q_2^{(k+1)}(q, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, q_1^{(k+1)}, t) \\ q^{(k+1)} &= q^{(k+1)}(q, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}, q_*^{(k+1)}, t) \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$\delta q^{(k)} \neq 0, \delta q = \dots = \delta q^{(k-1)} = 0 \quad (2b)$$

以及, $k+1$ 阶 Euler 算子^[4] $E_1^{(k)}(\)$ 中的 $\partial / \partial q_1^{(k)}$ 定义为^[3]

$$\overline{\partial / \partial q_1^{(k)}} = \partial / \partial q_1^{(k)} + (\partial / \partial q_2^{(k)}) \partial q_2^{(k+1)} / \partial q_1^{(k+1)} \quad (3)$$

并且注意^[3,4] $\partial / \partial q_*^{(k)} = (\partial / \partial q^{(k)}) \partial q^{(k+1)} / \partial q_*^{(k+1)}$ 。

定义 1 以下三点综合称为 $k+1$ 阶非完整系的 Appell-Четаев-Суслов 关系:

1) 三种等价形式的 Appell-Четаев 虚位移^[5,11]

$$\left. \begin{aligned} (\partial f / \partial q^{(k+1)}) \delta q^{(k)} &= 0 \\ \delta q_2^{(k)} &= (\partial q_2^{(k+1)} / \partial q_1^{(k+1)}) \delta q_1^{(k)} \\ \delta q^{(k)} &= (\partial q^{(k+1)} / \partial q_*^{(k+1)}) \delta q_*^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2) 等价形式的 Суслов 定义

$$\left. \begin{aligned} \delta f &= 0 (\delta q = \dots = \delta q^{(k-1)} = 0) \\ \delta q_2^{(k+1)} &= (\partial q_2^{(k+1)} / \partial q^{(k)}) \delta q^{(k)} + (\partial q_2^{(k+1)} / \partial q_1^{(k+1)}) \delta q_1^{(k+1)} \\ \delta q^{(k+1)} &= (\partial q^{(k+1)} / \partial q^{(k)}) \delta q^{(k)} + (\partial q^{(k+1)} / \partial q_*^{(k+1)}) \delta q_*^{(k+1)} \\ \delta q_1^{(k+1)} &= (\delta q_1^{(k)})^{(1)} \\ \delta q_*^{(k+1)} &= (\delta q_*^{(k)})^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

本文于 1986 年 12 月 9 日收到, 1987 年 8 月 8 日收到修改稿。

1) 文[5]结果承梅凤翔先生给作者指出。

3) (4)、(5)等价于交换关系

$$\left. \begin{aligned} (\delta q_i^{(k)})^{(1)} - \delta q_i^{(k+1)} &= E_i^{(k)}(q_i^{(1)})\delta q_i^{(k)} \\ (\delta q^{(k)})^{(1)} - \delta q^{(k+1)} &= E_*^{(k)}(q^{(1)})\delta q_*^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

定义 2 以下二点综合称为 $k+1$ 阶非完整系的 Appell-Четаев-Hölder 关系:

1) Appell-Четаев 虚位移(4),

2) Hölder 交换关系

$$\delta q^{(k+1)} = (\delta q^{(k)})^{(1)} \quad (7)$$

引理 1 1) Appell-Четаев 关系下成立

$$\begin{aligned} (\partial T^{(k)}/\partial q^{(k+1)})\delta q^{(k)} &= (\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k+1)})\delta q_i^{(k)} = (\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_*^{(k+1)})\delta q_*^{(k)} \\ &= (\partial T^{(k)}/\partial q^{(k)})\delta q^{(k)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$= [\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k)} - (\partial T/\partial q_i^{(1)}) \partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k)}]\delta q_i^{(k)} \quad (9a)$$

$$= [\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_*^{(k)} - (\partial T/\partial q^{(1)}) \partial q^{(k+1)}/\partial q_*^{(k)}]\delta q_*^{(k)} \quad (9b)$$

2) Суцлов 定义下成立

$$\delta T^{(k)} = \delta \tilde{T}^{(k)} = \delta \tilde{T}^{(k)} \quad (10)$$

3) Appell-Четаев-Hölder 关系下成立

$$\delta T^{(k)} = \delta \tilde{T}^{(k)} + (\partial T/\partial q_i^{(1)})E_i^{(k)}(q_i^{(1)})\delta q_i^{(k)} \quad (11a)$$

$$= \delta \tilde{T}^{(k)} + (\partial T/\partial q^{(1)})E_*^{(k)}(q^{(1)})\delta q_*^{(k)} \quad (11b)$$

4) Appell-Четаев-Суцлов 关系下及 Appell-Четаев-Hölder 关系下皆成立(9)。

证明: 1)–3)可直接证明。证明 4) 时需要通过(10)、(11)。过程无特殊困难而省略。

定理 1 Appell-Четаев-Суцлов 关系及 Appell-Четаев-Hölder 关系关于导出下列二种 Чаплыгин 型场方程^[6]是等价的:

$$\begin{aligned} (k+1)(\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k+1)})^{(1)} - \partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k)} - (\partial T/\partial q_i^{(1)})[(k+1) \\ \cdot (\partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k+1)})^{(1)} - \partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k)}] - \tilde{Q} = 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} (k+1)(\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_*^{(k+1)})^{(1)} - \partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_*^{(k)} - (\partial T/\partial q^{(1)})[(k+1) \\ \cdot (\partial q^{(k+1)}/\partial q_*^{(k+1)})^{(1)} - \partial q^{(k+1)}/\partial q_*^{(k)}] - \tilde{Q} = 0 \end{aligned} \quad (12b)$$

证明: 完整系微分变分原理通过 Lagrange 关系^[3,4]先经变形,再分部微商:

$$\begin{aligned} [(\partial T/\partial q^{(1)})^{(1)} - \partial T/\partial q - Q]\delta q^{(k)} &= [(k+1)(\partial T^{(k)}/\partial q^{(k+1)})^{(1)} \\ &- \partial T^{(k)}/\partial q^{(k)} - Q]\delta q^{(k)} = (k+1)[(\partial T^{(k)}/\partial q^{(k+1)})\delta q^{(k)}]^{(1)} - (k+1) \\ &\cdot (\partial T^{(k)}/\partial q^{(k+1)})(\delta q^{(k)})^{(1)} - (\partial T^{(k)}/\partial q^{(k)})\delta q^{(k)} - Q\delta q^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

上式代入由二种关系导出的(8)、(9)式并使用 Appell-Четаев 关系,即证得(12a):

$$\begin{aligned} (k+1)(\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k+1)})^{(1)}\delta q_i^{(k)} + (k+1)(\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k+1)})\delta q_i^{(k+1)} \\ - (k+1)(\partial T^{(k)}/\partial q_i^{(k+1)})\delta q_i^{(k+1)} - (k+1)(\partial T^{(k)}/\partial q_i^{(k+1)})[(\partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k+1)})^{(1)} \\ \cdot \delta q_i^{(k)} + (\partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k+1)})\delta q_i^{(k+1)}] - [\partial \tilde{T}^{(k)}/\partial q_i^{(k)} - (\partial T/\partial q_i^{(1)}) \\ \cdot \partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k)}]\delta q_i^{(k)} - \tilde{Q}\delta q_i^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{Q} = Q_1 + Q_2 \partial q_i^{(k+1)}/\partial q_i^{(k+1)}$ 。类似证得(12b)。定理 1 证毕。

注: Appell-Четаев 关系也导出场方程^[3,4]. 这是因为 Appell-Четаев 关系下也成立(8)、(9)式.

定理 2 Appell-Четаев-Суслов 关系及 Appell-Четаев-Hölder 关系关于导出下列二种 Суслов 型拟 Hamilton 原理是等价的:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ -\delta \tilde{T}^{(k)} + \{ k(\partial \tilde{T}^{(k)} / \partial q_1^{(k+1)})^{(1)} - (\partial T / \partial q_1^{(1)})[(k+1) \cdot (\partial q_2^{(k+1)} / \partial q_1^{(k+1)})^{(1)} - \overline{\partial q_2^{(k+1)} / \partial q_1^{(k)}}] - \tilde{Q} \} \delta q_1^{(k)} \} dt = 0 \iff (12a) \quad (14a)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ -\delta \tilde{T}^{(k)} + \{ k(\partial \tilde{T}^{(k)} / \partial q_*^{(k+1)})^{(1)} - (\partial T / \partial q^{(1)})[(k+1) \cdot (\partial q^{(k+1)} / \partial q_*^{(k+1)})^{(1)} - \partial q^{(k+1)} / \partial q_*^{(k)}] - \tilde{Q}^* \} \delta q_*^{(k)} \} dt = 0 \iff (12b) \quad (14b)$$

$$(\text{端条件 } \delta q_1^{(k)}|_{t=t_0, t_1} = \delta q_*^{(k)}|_{t=t_0, t_1} = 0)$$

证明定理 2 的方法与证明定理 1 的相同, 其中只要注意端条件, 过程不赘述.

定理 3 1) Hölder 交换关系导出约束形式 (Hölder 型) 拟 Hamilton 原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ -\delta T^{(k)} + [k(\partial T / \partial q^{(1)})^{(1)} - Q] \delta q^{(k)} \} dt = 0 \quad (15)$$

其中坐标 q 不是独立的, 以及 $\delta q^{(k)}|_{t=t_0, t_1} = 0$

2) 原理(15)与原理(14)是等价的.

证明: 由(13), 通过 Hölder 关系导出(15)是显见的. 原理(15)与原理(14)等价是二个原因. 第一个原因是原理(15)对应的场方程加上约束条件(2a), 与原理(14)对应的场方程(12)是等价的. 第二个原因是, 在 Appell-Четаев-Hölder 关系下, (15)的变分泛函与(14)的变分泛函恒等, 现在证明这点. 在 Appell-Четаев 关系下成立

$$k(\partial T / \partial q^{(1)})^{(1)} \delta q^{(k)} = k[(\partial \tilde{T}^{(k)} / \partial q_1^{(k+1)})^{(1)} - (\partial T / \partial q_1^{(1)}) \cdot (\partial q_2^{(k+1)} / \partial q_1^{(k+1)})^{(1)}] \delta q_1^{(k)}$$

加上 Appell-Четаев-Hölder 关系下成立的 (11a) 式, 便知道(15)与 (14a) 的变分泛函恒等. 同理可证(15)与 (14b) 的变分泛函恒等. 定理 3 证毕.

定理 1—3 蜕化为一阶非完整系, 便是文[1,2]的结果.

作者的工作承梅凤翔先生帮助, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] 梅凤翔, 非完整系统力学中的交换关系, 力学与实践, 3(1979), 37.
- [2] 梅凤翔, 非完整系统力学基础, 北京工业学院出版社(1986).
- [3] 金伏生, 分析力学的若干高阶方程, 武汉工学院学报, 1(1987), 1.
- [4] 刘正福, 金伏生, 梅凤翔, 分析力学中的高阶 Nielsen 算子和高阶 Euler 算子, 应用数学与力学, 1(1986), 51.
- [5] 史荣昌, Четаев 定义的推广, 中国兵工学会, 中国力学学会分析力学讨论会, 1985.
- [6] 梅凤翔, 带任意阶非完整约束的力学系统的广义 Чаплыгин 方程, 北京工业学院学报, 2(1981), 117.

THE RECIPROCAL RELATIONSHIPS IN NONHOLONOMIC MECHANICS OF HIGHER ORDER

Jin Fusheng

(*Wuhan Institute of Technology*)

Abstract In this paper, two classes of reciprocal relationships in non-holonomic mechanics of higher order are presented. And they are equivalent, for deriving the field equation and variational principle of non-holonomic mechanics of higher order.

Key words higher order, operator, non-holonomic mechanics.