

IFT 系统空间过渡的极值曲线场

吴 玉 良

(鞍 钢 工 学 院)

摘要 本文研究了空间最佳 N 冲击过渡问题(时间任意), 导出了发动机点火过程中伴随系统的积分, 从而得到了产生空间极值曲线场的程序。

关键词 冲击过渡, 伴随系统, 空间极值曲线场。

一、引 言

在时间任意的椭圆轨道过渡中, 最佳过渡是冲击过渡^[1]。对于冲击过渡, 一种理论是从中间轨道推出端轨道。Marec 系统地总结了这种理论^[2], 另一种理论是从端轨道推出最佳中间轨道。这种理论有两种基本计算方法, 一种方法是 Lawden 首先给出的^[3]。它需要解一组方程组, 另一种基本方法是极值曲线法。Breakwell 首先给出了计算平面极值曲线场的程序^[4]。Moyer 用这种方法验证了平面内圆与椭圆轨道间的最佳过渡结果^[7]。

本篇文章的目的是要将 Breakwell 的方法从平面推广到空间, 建立这种方法的关键是要得到伴随系统在发动机点火过程中的积分。本文推出了伴随函数在所选坐标下在 5 维相空间的一种积分, 进而得到了计算空间极值曲线场的程序。

二、系 统 方 程

本文中采用下列直角坐标系: 以 i, j, k 为单位矢量的运动坐标系; 以 ξ, η, ζ 为单位矢量的相对坐标系和以 X, Y, Z 为单位矢量的绝对坐标系。选择如下 5 个参数 $L = \ln h, e, \omega, \phi, Q$ 确定椭圆轨道。其中 $h = h k$ 为飞行器角动量矢量, $e = e \xi$ 为轨道偏心率矢量, 各参数及各坐标系单位矢量的意义见图 1。其中 F 为焦点, N 为节点, P 为近

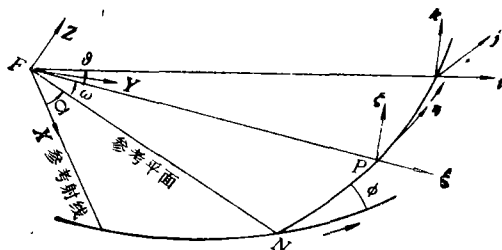


图 1

本文于 1985 年 9 月 12 日收到。

拱点。

从下列公式

$$\frac{d\mathbf{h}}{dC} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_r \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dC} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_v \quad (2.2)$$

$$e^2 = 1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{\mu^2} \quad (2.3)$$

出发, 并做变换 $u = \frac{C}{\mu}$, 可得系统方程如下(推导略)

$$\frac{dL}{du} = \frac{e^L}{1 + e \cos \theta} \cdot T \quad (2.4)$$

$$\frac{de}{du} = e^L \left[\sin \theta \cdot S + \frac{2 \cos \theta + e(1 + \cos^2 \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot T \right] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{du} = \frac{e^L}{e} \left[-\cos \theta \cdot S + \sin \theta \left(\frac{2 + e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right) \cdot T \right. \\ \left. - \frac{e \sin(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot \operatorname{ctg} \phi \cdot W \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\phi}{du} = e^L \frac{\cos(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot W \quad (2.7)$$

$$\frac{dQ}{du} = e^L \frac{\sin(\omega + \theta)}{(1 + e \cos \theta) \cdot \sin \phi} \cdot W \quad (2.8)$$

以上各式中 $\mathcal{E}$ 为系统能量, $\mathbf{r}$ 为矢径矢量, $\mathbf{v}$ 为速度矢量, C 为特征速度, μ 为万有引力常数, $\mathbf{p}_r$ 为 $\mathbf{v}$ 的伴随矢量, S, T, W 分别为 $\mathbf{p}_r$ 在 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向上的投影, θ 为真近点角。

三、哈密顿函数

为确定飞行器在轨道上的位置和质量变化情况, 除 L, e, ω, ϕ, Q 5 个参数外, 还应再选两个参数。确定飞行器在轨道上的位置可选择平近点角, 由于特征速度是质量的严格单调递减函数, 所以可选择 C 作为确定飞行器质量的参数, 这样可得哈密顿函数如下

$$H = p_L \frac{dL}{du} + p_e \frac{de}{du} + p_\omega \frac{d\omega}{du} + p_\phi \frac{d\phi}{du} + p_Q \frac{dQ}{du} \quad (3.1)$$

上式中的 $p_L, p_e, p_\omega, p_\phi, p_Q$ 分别为 L, e, ω, ϕ, Q 的伴随函数。由于在冲击过渡和时间任意情况下 $p_M = 0, p_r = 0$, 所以上式中只有 5 项。

四、伴随系统方程

将(2.4)到(2.8)代入(3.1), 并做代换 $S = \cos \alpha, T = \cos \beta, W = \cos \gamma$, 有

$$\begin{aligned} H = e^L \left\{ p_L \frac{1}{1 + e \cos \theta} \cdot \cos \beta + p_e \left[\sin \theta \cos \alpha \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2 \cos \theta + e(1 + \cos^2 \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot \cos \beta \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_{\omega} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left[-\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cdot \left(\frac{2 + e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right) \cdot \cos \beta \right. \\
& \left. - \frac{e \sin(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot \operatorname{ctg} \phi \cdot \cos \gamma \right] \\
& + p_{\phi} \frac{\cos(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot \cos \gamma \\
& + p_{\Omega} \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin \phi \cdot (1 + e \cos \theta)} \cdot \cos \gamma \} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

式中 α, β, γ 分别为 p_r 与 i, j, k 的夹角。由此得伴随系统方程如下

$$\frac{dp_L}{du} = -H \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{\omega}}{du} = e^L \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta} \cdot \left\{ p_{\omega} \cos(\omega + \theta) \cdot \operatorname{ctg} \phi \right. \\
\left. + p_{\phi} \sin(\omega + \theta) - p_{\Omega} \cdot \frac{\cos(\omega + \theta)}{\sin \phi} \right\} \cdot \cos \gamma \quad (4.3)
\end{aligned}$$

$$\frac{dp_{\phi}}{du} = e^L \cdot \frac{\sin(\omega + \theta)}{(1 + e \cos \theta) \cdot \sin^2 \phi} \cdot [-p_{\omega} + p_{\Omega} \cos \phi] \cdot \cos \gamma \quad (4.4)$$

$$\frac{dp_{\Omega}}{du} = 0 \quad (4.5)$$

这几个方程均与 p_e 无关,可以独立求解。 $\frac{dp_e}{du}$ 的形式比较复杂,可以用其它方法求得它的积分,在这里就不写出这个方程了。

五、伴随系统积分

选择轨道坐标元素 $\mathcal{E}, h, e$ 作为轨道状态参量时,在 $\mathcal{E}, h, e$ 之间有两个约束方程

$$h \cdot e = 0 \quad (5.1)$$

$$e' = 1 + \frac{2\mathcal{E}h'}{\mu^2} \quad (5.2)$$

这样,只有 5 个状态参量是独立的,由(5.1)(5.2)得变分约束为

$$h \cdot \delta e + e \cdot \delta h = 0 \quad (5.3)$$

$$\mu^2 e \cdot \delta e = h^2 \delta \mathcal{E} + 2\mathcal{E} h \cdot \delta h \quad (5.4)$$

由状态参数 $\mathcal{E}, h, e$ 变换到状态参数 $h, e, \omega, \phi, \Omega$, 正则变换条件可以写成

$$\begin{aligned}
p_{\mathcal{E}} \delta \mathcal{E} + p_h \cdot \delta h + p_e \cdot \delta e - \mathcal{H} \delta t \\
= p_h \delta h + p_e \delta e + p_{\omega} \delta \omega + p_{\phi} \delta \phi + p_{\Omega} \delta \Omega - H_t \delta t
\end{aligned} \quad (5.5)$$

由于 t 是独立的,所以有 $H_t = \mathcal{H}$, 再由(5.4)式,有

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{h^2} (\mu^2 e \cdot \delta e - 2\mathcal{E} h \cdot \delta h)$$

代入式(5.5),得

$$\left(\frac{p_{\mathcal{E}} \mu^2}{h^2} e + p_e \right) \cdot \delta e + \left(p_h - \frac{2p_{\mathcal{E}} \mathcal{E} h}{h^2} \right) \cdot \delta h$$

$$= p_h \delta h + p_e \delta e + p_\omega \delta \omega + p_\phi \delta \phi + p_Q \delta Q \quad (5.6)$$

在左边还有 6 个状态参数的变分, 其中有 5 个是独立的. 参照图 2, 我们可以把 $\delta \mathbf{e}, \delta \mathbf{h}$ 用 $\delta h, \delta e, \delta \omega, \delta \phi, \delta Q$ 表示如下(推导略)

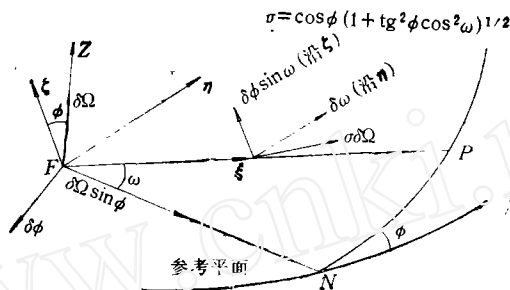


图 2

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{e} = & \delta e \xi + e(\delta \omega + \cos \phi \delta Q) \eta \\ & + e(\sin \omega \delta \phi - \sin \phi \cos \omega \delta Q) \zeta \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{h} = & h(-\sin \omega \delta \phi + \sin \phi \cos \omega \delta Q) \xi \\ & + h(-\cos \omega \delta \phi - \sin \phi \sin \omega \delta Q) \eta + \delta h \zeta \end{aligned} \quad (5.8)$$

将式(5.7)(5.8)代入式(5.6), 再利用 $\zeta \cdot \mathbf{p}_h = 0$, $\zeta \cdot \mathbf{p}_e = 0$ 和 $\delta h, \delta e, \delta \omega, \delta \phi, \delta Q$ 的相互独立性, 得到

$$p_h = -\frac{2\mathcal{E} p_e}{h} \quad (5.9)$$

$$p_e = \frac{\mu^2 p_e e}{h^2} + p_{e\xi} \quad (5.10)$$

$$p_\omega = e p_{e\eta} \quad (5.11)$$

$$p_\phi = -h(p_{h\xi} \sin \omega + p_{h\eta} \cos \omega) \quad (5.12)$$

$$p_Q = e p_{e\eta} \cos \phi + h \sin \phi (p_{h\xi} \cos \omega - p_{h\eta} \sin \omega) \quad (5.13)$$

其中 $p_{e\xi}, p_{e\eta}, p_{h\xi}, p_{h\eta}$ 分别为 $\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_h$ 在 ξ, η 方向上的投影, 当选 L 做状态参数时, (5.9)式由下式代替

$$p_L = -2\mathcal{E} p_e \quad (5.14)$$

下面, 利用对任意弧段的积分

$$\mathbf{h} \times \mathbf{p}_h + \mathbf{e} \times \mathbf{p}_e = A (\text{常矢}) \quad (5.15)$$

和适用于弹道弧, 奇异弧及内冲击型冲击的积分

$$-p_e C - 2\mathcal{E} p_e = Hu - 2\mathcal{E} p_e = B (\text{常量}) \quad (5.16)$$

可以得到伴随系统积分的具体形式如下(推导略)

$$p_L = B - Hu \quad (5.17)$$

$$p_\omega = A_\xi \quad (5.18)$$

$$p_\phi = A_\xi \cos \omega - A_\eta \sin \omega \quad (5.19)$$

$$p_Q = A_\xi \sin \phi \sin \omega + A_\eta \sin \phi \cos \omega + A_r \cos \phi \quad (5.20)$$

$$p_e = \frac{\mu' p_{ee}}{h^2} + p_{e\xi} \quad (5.21)$$

注意到 A_ξ, A_η, A_ζ 都是在变坐标系上的投影, 所以, 尽管 $\mathbf{A}$ 是常矢, 但 A_ξ, A_η, A_ζ 都不是常数, 这很不方便. 利用式

$$\begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\eta \\ A_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

可得伴随系统积分的最终形式为

$$p_L = B - Hu \quad (5.23)$$

$$p_\omega = A_X \sin Q \sin \phi - A_Y \cos Q \sin \phi + A_Z \cos \phi \quad (5.24)$$

$$p_\phi = A_X \cos Q + A_Y \sin Q \quad (5.25)$$

$$p_Q = A_Z \quad (5.26)$$

在时间任意的最佳冲击过渡中 $H = \text{const.}$, 于是得最后一个伴随函数为

$$p_e = \frac{H - p_L \frac{dL}{du} - p_\omega \frac{d\omega}{du} - p_\phi \frac{d\phi}{du} - p_Q \frac{dQ}{du}}{\frac{de}{du}} \quad (5.27)$$

式(5.22)中的

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \cos(\widehat{X, \xi}) = \cos Q \cos \omega - \sin Q \sin \omega \cos \phi \\ \gamma_{21} &= \cos(\widehat{X, \eta}) = -\cos Q \sin \omega - \sin Q \cos \omega \cos \phi \\ \gamma_{31} &= \cos(\widehat{X, \zeta}) = \sin Q \sin \phi \\ \gamma_{12} &= \cos(\widehat{Y, \xi}) = \sin Q \cos \omega + \cos Q \sin \omega \cos \phi \\ \gamma_{22} &= \cos(\widehat{Y, \eta}) = -\sin Q \sin \omega + \cos Q \cos \omega \cos \phi \\ \gamma_{32} &= \cos(\widehat{Y, \zeta}) = -\cos Q \sin \phi \\ \gamma_{13} &= \cos(\widehat{Z, \xi}) = \sin \omega \sin \phi \\ \gamma_{23} &= \cos(\widehat{Z, \eta}) = \cos \omega \sin \phi \\ \gamma_{33} &= \cos(\widehat{Z, \zeta}) = \cos \phi \end{aligned}$$

六、系统积分

先对使用的下标加以说明. $h_i, e_i, \omega_i, \phi_i, Q_i, \theta_i$ 是对轨道平面而言的, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \nu_{ij}$,

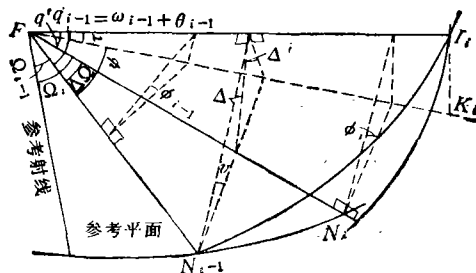


图 3

$\nu_{i,i}, \nu_{\theta i,i}$ 的头一个下标指冲击点, 第二个下标指轨道平面。利用图3, 可得系统积分为(推导略)

$$h_i = \frac{h_{i-1}^2}{1 + e_{i-1} \cos \theta_{i-1}} \left[\left(\frac{1 + e_{i-1} \cos \theta_{i-1}}{h_{i-1}} + u_i \cos \beta_{i,i-1} \right)^2 + u_i^2 \cos^2 \gamma_{i,i-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

$$e_i = \left[\left(\frac{h_i^2 (1 + e_{i-1} \cos \theta_{i-1})}{h_{i-1}^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{e_{i-1} \sin \theta_{i-1}}{h_{i-1}} + u_i \cos \alpha_{i,i-1} \right)^2 h_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{tg}(q' - \omega_i) = \frac{(e_{i-1} \sin \theta_{i-1} + u_i h_{i-1} \cos \alpha_{i,i-1}) h_{i-1} h_i}{h_i^2 (1 + e_{i-1} \cos \theta_{i-1}) - h_{i-1}^2} \quad (6.3)$$

$$\sin \phi_i = \frac{\sin q_{i-1} \sin \phi_{i-1}}{\sin q'} \quad (6.4)$$

$$Q_i = Q_{i-1} + \Delta Q \quad (6.5)$$

式中所需各辅助值计算如下

$$\sin \tau = \sin q_{i-1} \sin \phi_{i-1}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} q_{i-1} \cos \phi_{i-1}$$

$$\cos \Delta' = \frac{\cos \phi - \cos \tau \cos q_{i-1}}{\sin \tau \sin q_{i-1}}$$

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{u_i \cos \gamma_{i,i-1}}{\frac{1 + e_{i-1} \cos \theta_{i-1}}{h_{i-1}} + u_i \cos \beta_{i,i-1}}$$

$$\operatorname{tg} q' = \frac{\operatorname{tg} q_{i-1} \sin \nu}{\sin(\nu + \Delta)}$$

$$\sin \nu = \frac{\operatorname{tg} \tau \sin \Delta'}{(\operatorname{tg}^2 \tau + \operatorname{tg}^2 q_{i-1} - 2 \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} q_{i-1} \cos \Delta')^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \Delta Q = \cos q_{i-1} \cos q' + \sin q_{i-1} \sin q' \cos \Delta$$

七、计 算 程 序

按照 Понтрягин-Contensou 原理^[1-2], 沿着最佳过渡轨道, 系统的哈密顿函数应取极大值。把得到的伴随系统积分代入(4.1)式, 得哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H = & h \left\{ (B - C) \frac{1}{1 + e \cos \theta} \cos \beta \right. \\ & + p_e \left[\sin \theta \cos \alpha + \frac{2 \cos \theta + e(1 + \cos^2 \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot \cos \beta \right] \\ & + \frac{1}{e} (A_x \sin Q \sin \phi - A_y \cos Q \sin \phi + A_z \cos \phi) \\ & \times \left(-\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cdot \frac{2 + e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \cdot \cos \beta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_x \cos Q + A_y \sin Q) \cdot \frac{\cos(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} \cdot \cos \gamma \\
& + \frac{\sin(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} (-A_x \sin Q \cos \phi + A_y \cos Q \cos \phi \\
& + A_z \sin \phi) \cdot \cos \gamma \} \quad (7.1)
\end{aligned}$$

在具体计算时,我们常把哈密顿函数写成下面形式

$$H = h(\tilde{U} \cos \alpha + \tilde{V} \cos \beta + \tilde{W} \cos \gamma) \quad (7.2)$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{U} &= p_c \sin \theta - p_e \cdot \frac{1}{e} \cdot \cos \theta \\
\tilde{V} &= p_t \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta} + p_c \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta} [2 \cos \theta + e(1 + \cos^2 \theta)] \\
&+ p_\omega \frac{\sin \theta (2 + e \cos \theta)}{e(1 + e \cos \theta)} \\
\tilde{W} &= -p_\omega \frac{\operatorname{ctg} \phi \cdot \sin(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} + p_\phi \frac{\cos(\omega + \theta)}{1 + e \cos \theta} \\
&+ p_\phi \cdot \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin \phi (1 + e \cos \theta)}
\end{aligned}$$

为使 H 取极大值,在给定状态参数和伴随参数的情况下,只需使

$$F = \tilde{U} \cos \alpha + \tilde{V} \cos \beta + \tilde{W} \cos \gamma$$

取极大值。由于 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 欲使 F 取极大值,应满足下面两个条件

$$(1) F' = (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 + \tilde{W}^2)^{\frac{1}{2}}$$

对于 θ 取极大值

$$(2) \frac{\tilde{U}}{\cos \alpha} = \frac{\tilde{V}}{\cos \beta} = \frac{\tilde{W}}{\cos \gamma} > 0$$

由条件(2),有

$$\cos \alpha = \frac{\tilde{U}}{F'} \quad (7.3)$$

$$\cos \beta = \frac{\tilde{V}}{F'} \quad (7.4)$$

$$\cos \gamma = \frac{\tilde{W}}{F'} \quad (7.5)$$

据此我们得到在 5 维相空间计算极值曲线场的程序如下

1. 给定 5 个初始状态参数和 4 个初始比值 $p_{L0}:p_{e0}:p_{\omega 0}:p_{\phi 0}:p_{Q0}$ 。
2. 寻取 θ 使 F' 取极大值。
3. 按(7.3)~(7.5)式计算 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 进而计算出极大 H 值。
4. 保持 $\omega + \theta, \alpha, \beta, \gamma$ 不变,对 u 积分,直到发现新的与前面 θ 相联系的极大 H 相等的 H 值为止。自由滑行到与新的极大 H 值相联系的 $\omega + \theta$ 角,并计算新的 α, β, γ 角
5. 继续对 u 积分,直到出现另一个极大 H 值为止。

在以上计算中, 确定 H 值的状态参数和伴随参数由(6.1)到(6.5)和(5.23)到(5.27) 决定. 通过选择伴随参数的不同初始比值, 便可得到 5 维相空间中依赖 4 个参数的极值曲线场. 这个极值曲线场有下列作用和特点: (1) 排除了所有非最佳轨道. (2) 包括了从给定的初始轨道到任意第二条椭圆轨道的任意最佳 N 冲击过渡. (3) 通过比较过渡到同一终轨道的不同 N 冲击过渡, 就可以得到从已知初轨道到该终轨道的最佳过渡轨道.

参 考 文 献

- [1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф. Математическая Теория оптимальных процессов, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1961).
- [2] Contensou, P., Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation—Application au cas d'un centre d'attraction unique, *Astronautica Acta*, 8(1962), 154.
- [3] Marec, J. P., Optimal space trajectories, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York (1979).
- [4] Marchal, C., Généralisation tridimensionnelle et étude de l'optimalité des arcs à poussée intermédiaire de Lawden (dans un Champ new-tonien), La Recherche aérospatiale N° 123, Mars Avril (1968).
- [5] Lawden, D. F., Optimal trajectories for space navigation, Butterworths, London (1963).
- [6] Breakwell, J. V. Minimum impulse transfer, AIAA Astrodynamics Conference, August 19—21, (1963).
- [7] Moyer, H. G. Minimum impulse coplanar circle-ellipse transfer, *AIAA J*, 3, 4(1965).

EXTREMAL FIELDS FOR SPACE TRANSFER OF IFT SYSTEM

Wu Yuliang

(An Gang Institute of Technology)

Abstract In this paper, the problem of time free, optimal space N -impulse transfer between elliptic orbits is considered. The integrations of the adjoint variables during a firing period are derived. A program to generate space extremal fields is obtained.

Key words impulse transfer, adjoint variables, space extremal fields.