

多刚体系统动力学的旋量-矩阵方法

刘延柱

(上海交通大学工程力学系)

提要 本文将经典力学中的旋量概念以矩阵形式表示,用以建立多刚体系统的动力学方程.这种旋量-矩阵方法能保留旋量融矢量与矢量矩于一体的优点,却避免以往对偶数记法的缺点.结合 Roberson/Wittenburg 的图论工具,旋量-矩阵方法的应用范围可扩大到一般多刚体系统.对于树形系统,利用旋量通路矩阵推导各个由第 i 铰联结的全部外侧刚体组成的第 i 子系统的动力学方程,可避免出现铰的约束反力.对于非树系统,则利用回路矩阵导出各子系统动力学方程及运动学相容条件.全部计算过程统一为矩阵运算,以操作机器人作为具体算例.

关键词 多刚体系统动力学,刚体动力学的矩阵方法,旋量理论,机器人动力学,空间机构动力学.

一、前言

多刚体系统动力学是受现代工程技术的推动,在经典力学基础上发展起来的新学科分支,其主要任务是发展适合计算机应用的通用方法建立系统的动力学方程.在现有方法中,Roberson/Wittenburg 方法(以下简称 RW 方法)^[3,6]利用图论工具描述系统内各刚体之间的联系状况,导出用广义坐标表示的普遍动力学方程.旋量方法是经典力学中的旋量概念用对偶数表示而发展成的一种主要用于单链空间机构的分析方法^[1,2,4,5].由于对偶数算法不够普及,而且不能将全部动力学计算都包罗在内,作者认为,用矩阵记法代替对偶数记法可保留旋量融矢量与矢量矩于一体的优点,却能避免上述缺点,使全部计算过程统一为矩阵运算.将旋量与 RW 方法的图论概念结合,可将旋量方法的应用范围扩大为带有任意个分支的树形或非树形的一般多刚体系统.在[7]文中,这种方法被用于处理弹性联系的多刚体系统.本文就更一般情形,对多刚体系统动力学的旋量-矩阵方法作系统的叙述.

二、旋量及其变换

文献中对于旋量有不同的定义.1809年 Poinsot 最初提出的旋量概念限定为矢量与共线的矢量矩的集合.1924年 Von Mises 将矢量与矢量矩的集合统称为矩矢,不少文献将矩矢与旋量视为同一概念.作者建议给旋量以较确切的定义如下定义:

矢量 α 相对 O 点的旋量 $\hat{\alpha}$ 是两个矢量 α 与 α' 的集合,前者与参考点 O 无关,后者随 O 点的改变按以下公式变化:

本文于1984年11月8日收到,1987年12月2日收到修改稿.本课题由国家自然科学基金委员会资助.

$$\mathbf{a}'^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{r}^{(ij)} \times \mathbf{a} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{a}'^{(i)}$ 、 $\mathbf{a}^{(i)}$ 是对应于不同参考点 O_i 、 O_j 的矢量 $\mathbf{a}'$ 、 $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}^{(ij)}$ 是 O_i 至 O_j 的矢径。

最简单的旋量是由滑移矢量 $\mathbf{a}$ 及相对任意参考点 O 的矩 $\mathbf{a}' = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$ 组成的 Plücker 矢量。此外,力学中许多成对出现的矢量,如力系对任意点简化的主矢 $\mathbf{F}$ 及主矩 $\mathbf{M}$,刚体的瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与体内任意点的速度 $\mathbf{v}$,质系的动量 $\mathbf{Q}$ 与相对任意点的动量矩 $\mathbf{H}$,虽然它们具有完全不同的物理意义,但都满足上述旋量定义而分别组成力旋量、速度旋量和动量旋量。

设 $\mathbf{e}^{(i)}$ 是以 O_i 为原点,由正交基矢量 $\mathbf{e}_s^{(i)} (s=1,2,3)$ 组成的基矢量列阵。将组成旋量的矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{a}'$ 在 $\mathbf{e}^{(i)}$ 上的坐标列阵 $\mathbf{a}^{(i)}$ 与 $\mathbf{a}'^{(i)}$ 顺序排成的 6 维列阵作为 $\mathbf{a}$ 相对 $\mathbf{e}^{(i)}$ 的旋量的矩阵形式,记作 $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ 。互换 $\mathbf{a}^{(i)}$ 与 $\mathbf{a}'^{(i)}$ 的次序排成的列阵称为 $\mathbf{a}$ 的倒置旋量,记作 $\hat{\mathbf{a}}'^{(i)}$ 。

$$\hat{\mathbf{a}}^{(i)} = [\mathbf{a}^{(i)T} : \mathbf{a}'^{(i)T}]^T, \quad \hat{\mathbf{a}}'^{(i)} = [\mathbf{a}'^{(i)T} : \mathbf{a}^{(i)T}]^T \quad (2)$$

定义 $\hat{\mathbf{A}}^{(ij)}$ 为不共原点的两个不同基 $\mathbf{e}^{(i)}$ 与 $\mathbf{e}^{(j)}$ 之间的旋量变换矩阵:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(ij)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^{(ij)} & \mathbf{A}^{(ji)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}^{(ij)} = \mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{e}^{(j)T}, \quad \mathbf{B}^{(ij)} = \mathbf{r}^{(ij)} \mathbf{A}^{(ji)} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{A}^{(ij)}$ 为 $\mathbf{e}^{(i)}$ 与 $\mathbf{e}^{(j)}$ 各基矢量之间的方向余弦矩阵, $\mathbf{r}^{(ij)}$ 为矢径 $\mathbf{r}^{(ij)}$ 在 $\mathbf{e}^{(i)}$ 上的坐标 $r_s^{(ij)} (s=1,2,3)$ 排成的反对称坐标方阵:

$$\mathbf{r}^{(ij)} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3^{(ij)} & r_2^{(ij)} \\ r_3^{(ij)} & 0 & -r_1^{(ij)} \\ -r_2^{(ij)} & r_1^{(ij)} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

旋量变换矩阵有以下性质:

性质 1 同一矢量 $\mathbf{a}$ 对不同基 $\mathbf{e}^{(i)}$ 及 $\mathbf{e}^{(j)}$ 的旋量 $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ 及 $\hat{\mathbf{a}}^{(j)}$ 之间满足以下变换公式:

$$\hat{\mathbf{a}}^{(i)} = \hat{\mathbf{A}}^{(ij)} \hat{\mathbf{a}}^{(j)} \quad (6)$$

推论 原点及指向均相同的基之间的变换矩阵为 6 阶单位阵。

性质 2 任意 3 个基 $\mathbf{e}^{(i)}$ 、 $\mathbf{e}^{(j)}$ 、 $\mathbf{e}^{(k)}$ 之间的变换矩阵满足以下关系:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(ij)} = \hat{\mathbf{A}}^{(ik)} \hat{\mathbf{A}}^{(kj)} \quad (7)$$

推论 在按序编号的基族中,任意二基之间的变换矩阵等于一系列相邻基之间变换矩阵的连乘积,

$$\hat{\mathbf{A}}^{(ij)} = \prod_{k=i}^{j-1} \hat{\mathbf{A}}^{(k,k+1)} \quad (8)$$

性质 3 将 $\hat{\mathbf{A}}^{(ij)}$ 各元素的 i 与 j 互换,或将组成 $\hat{\mathbf{A}}^{(ij)}$ 的各子矩阵转置,即构成 $\hat{\mathbf{A}}^{(ij)}$ 的逆阵,

$$(\hat{\mathbf{A}}^{(ij)})^{-1} = \hat{\mathbf{A}}^{(ji)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(ji)T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^{(ji)T} & \mathbf{A}^{(ij)T} \end{bmatrix} \quad (9)$$

性质 4 同一矢量 $\mathbf{a}$ 相对不同基 $\mathbf{e}^{(i)}$ 及 $\mathbf{e}^{(j)}$ 的倒置旋量 $\hat{\mathbf{a}}'^{(i)}$ 及 $\hat{\mathbf{a}}'^{(j)}$ 之间的变换矩阵为 $\hat{\mathbf{A}}^{(ij)}$ 的逆阵的转置阵,

$$\hat{\mathbf{a}}'^{(i)} = \hat{\mathbf{A}}^{(ji)T} \hat{\mathbf{a}}'^{(j)} \quad (10)$$

三、旋量-矩阵形式的牛顿/欧拉方程

讨论系统中的任意刚体 B_i . 设 C_i 及 O_i 为 B_i 的质心及任选的参考点, $\underline{v}_i$ 、 $\underline{\omega}_i$ 、 $\underline{Q}_i$ 、 $\underline{H}_i$ 、 $\underline{E}_i$ 、 $\underline{M}_i$ 分别为 O_i 的速度 $\underline{v}_i$ 、 B_i 的角速度 $\underline{\omega}_i$ 、动量 $\underline{Q}_i$ 及相对 O_i 的动量矩 $\underline{H}_i$ 、外力对 O_i 简化的主矢 $\underline{F}_i$ 及主矩 $\underline{M}_i$ 等矢量在以 O_i 为原点的连体基 $\underline{e}^{(i)}$ 上的坐标列阵. 定义刚体 B_i 的速度旋量 $\underline{\hat{v}}_i$ 、动量旋量 $\underline{\hat{Q}}_i$ 及力旋量 $\underline{\hat{E}}_i$ 如下:

$$\underline{\hat{v}}_i = [\underline{v}_i^T : \underline{\omega}_i^T]^T, \quad \underline{\hat{Q}}_i = [\underline{Q}_i^T : \underline{H}_i^T]^T, \quad \underline{\hat{E}}_i = [\underline{F}_i^T : \underline{M}_i^T]^T \quad (11)$$

其中的速度旋量写作倒置形式, 可使所有与平动有关的物理量均统一排在与转动有关的物理量之前. 将 $\underline{v}_i$ 及 $\underline{\omega}_i$ 在 $\underline{e}^{(i)}$ 上的反对称坐标方阵 $\underline{\tilde{v}}_i$ 、 $\underline{\tilde{\omega}}_i$ 组成以下 6 阶方阵, 称为速度旋量方阵, 记作 $\underline{\tilde{v}}_i$,

$$\underline{\tilde{v}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\omega}}_i & \underline{0} \\ \underline{\tilde{v}}_i & \underline{\tilde{\omega}}_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

直接验算可以证明旋量变换矩阵的另一性质:

性质 5 令 $\hat{\underline{A}}^{(ij)}$ 左乘其逆阵的导数, 即得到 $\underline{e}^{(i)}$ 相对 $\underline{e}^{(j)}$ 的速度旋量方阵 $\underline{\tilde{v}}_i$,

$$\underline{\tilde{v}}_i = \hat{\underline{A}}^{(ij)} \hat{\underline{A}}^{(ij)} \quad (13)$$

设 m_i 及 $\underline{I}_i$ 为 B_i 的质量及相对 $\underline{e}^{(i)}$ 的惯量矩阵, $\underline{\tilde{\rho}}_i$ 为 C_i 相对 O_i 的矢径 $\underline{\rho}_i$ 在 $\underline{e}^{(i)}$ 上的反对称坐标方阵. 动量、动量矩的计算公式以及动量、动量矩定理可用两个旋量方程紧凑地表示为

$$\underline{\hat{Q}}_i = \underline{\hat{\Phi}}_i \underline{\hat{v}}_i \quad (14)$$

$$\underline{\hat{Q}}_i + \underline{\tilde{v}}_i \underline{\hat{Q}}_i = \underline{\hat{E}}_i \quad (15)$$

其中 6 阶方阵 $\underline{\hat{\Phi}}_i$ 为刚体 B_i 相对 $\underline{e}^{(i)}$ 的广义惯量矩阵, 定义为

$$\underline{\hat{\Phi}}_i = \begin{bmatrix} m_i \underline{E} & m_i \underline{\tilde{\rho}}_i^T \\ m_i \underline{\tilde{\rho}}_i & \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (16)$$

方程(15)是确定刚体运动的旋量形式牛顿/欧拉方程.

四、树形系统

设树形多刚体系统 $\{B\}$ 由 n 个刚体 B_i 及 n 个铰 $O_j (i, j = 1, \dots, n)$ 组成, B_0 为系统外已知运动规律的零刚体. 对于 O_j 铰联结的第 j 刚体偶对, 规定 O_j 与远离 B_0 的外侧刚体固定, 后者的标号与铰相同, 记作 B_j . 另一刚体标号与此刚体上全部铰的最小标号相同, 记作 $B_{i(j)}$, $i(j)$ 为 j 的整型函数, 且满足 $i(j) < j$ (见图1). 将 RW 方法中的关联矩阵 $\underline{S}$ 及通路矩阵 $\underline{T}$ 扩展为旋量关联矩阵 $\underline{\hat{S}}$ 与旋量通路矩阵 $\underline{\hat{T}}$. 规定 $\underline{\hat{S}}$ 与 $\underline{\hat{T}}$ 均为由 n^2 个 6×6 阶子矩阵组成的 $6n \times 6n$ 阶矩阵, 各子矩阵等于 $\underline{S}$ 与 $\underline{T}$ 的元素与相应的旋量变换矩阵的乘积:

$$\underline{\hat{S}} = [\underline{\hat{S}}_{ij}], \quad \underline{\hat{S}}_{ij} = S_{ij} \hat{\underline{A}}^{(ij)} \quad (17)$$

$$\underline{\hat{T}}_i = [\underline{\hat{T}}_{ji}], \quad \underline{\hat{T}}_{ji} = T_{ji} \hat{\underline{A}}^{(jn)} \quad (18)$$

$\underline{\hat{S}}$ 与 $\underline{\hat{T}}$ 互为逆阵, 且全部子矩阵排列在上三角区内, 对角线子矩阵均为 6 阶单位阵. 以图 2 表示的系统为例, 可写出

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\hat{\mathbf{A}}^{(12)} & 0 & 0 \\ & \mathbf{E} & -\hat{\mathbf{A}}^{(23)} & -\hat{\mathbf{A}}^{(24)} \\ & & \mathbf{E} & 0 \\ & & & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \hat{\mathbf{A}}^{(12)} & \hat{\mathbf{A}}^{(13)} & \hat{\mathbf{A}}^{(14)} \\ & \mathbf{E} & \hat{\mathbf{A}}^{(23)} & \hat{\mathbf{A}}^{(24)} \\ & & \mathbf{E} & 0 \\ & & & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

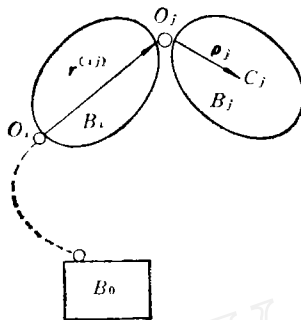


图 1

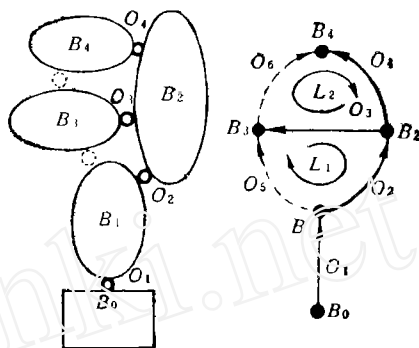


图 2

将 B_j 相对 $B_{i(j)}$ 的相对角速度 Ω_j 以及 O_j 相对 $B_{i(j)}$ 的滑移速度 $\mathbf{V}_j$ 在 $\mathbf{e}^{(i)}$ 上的坐标列阵 $\underline{\Omega}_j$ 、 $\underline{\mathbf{V}}_j$ 组成旋量 $\hat{\mathbf{V}}_j$, 称为第 j 刚体偶对的相对速度旋量:

$$\hat{\mathbf{V}}_j = [\underline{\mathbf{V}}_j^T; \underline{\Omega}_j^T]^T \quad (j = 1, \dots, n) \quad (19)$$

由于 O_j 铰的运动学约束, $\hat{\mathbf{V}}_j$ 的 6 个分量中的独立变量数等于 O_j 铰的相对自由度 N_j , 包含 N'_j 个滑移自由度及 N''_j 个转动自由度, $N_j = N'_j + N''_j < 6$. 系统的总自由度为

$$N = \sum_{j=1}^n N_j.$$

将沿 O_j 铰的第 s 滑移轴及第 r 转动轴的单位矢量 $\mathbf{k}_{js}$ 及 $\mathbf{p}_{jr}$ 在 $\mathbf{e}^{(i)}$ 上的坐标列阵 $\underline{k}_{js}$ 及 $\underline{p}_{jr}$ ($s = 1, \dots, N'_j$, $r = 1, \dots, N''_j$) 依次排成的 $3 \times N'_j$ 阶及 $3 \times N''_j$ 阶矩阵记作 $\underline{k}_j$ 及 $\underline{p}_j$, 建立 $N_j \times 6$ 阶准对角阵 $\hat{\mathbf{k}}_j$:

$$\hat{\mathbf{k}}_j = \begin{bmatrix} \underline{k}_j^T & 0 \\ 0 & \underline{p}_j^T \end{bmatrix} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (20)$$

将 B_j 相对 $B_{i(j)}$ 的 N'_j 个沿 $\mathbf{k}_{js}$ 轴的滑移坐标 z_{js} 以及 N''_j 个绕 $\mathbf{p}_{jr}$ 轴转动的伪坐标 θ_{jr} 组成 N_j 阶广义坐标列阵 $\mathbf{q}_j$:

$$\mathbf{q}_j = [z_{j1} \dots z_{jN'_j} \theta_{j1} \dots \theta_{jN''_j}]^T \quad (j = 1, \dots, n) \quad (21)$$

相对速度旋量 $\hat{\mathbf{V}}_j$ 可利用 $\hat{\mathbf{k}}_j$ 及 $\mathbf{q}_j$ 表示为

$$\hat{\mathbf{V}}_j = \hat{\mathbf{k}}_j^T \dot{\mathbf{q}}_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (22)$$

将 $\hat{\mathbf{V}}_i$ 、 $\hat{\mathbf{Q}}_i$ ($i = 1, \dots, n$) 排成的 $6n$ 阶列阵以及 $\hat{\mathbf{V}}_j$ 、 $\hat{\mathbf{q}}_j$ ($j = 1, \dots, n$) 排成的 N 阶列阵记作 $\hat{\mathbf{V}}$ 、 $\hat{\mathbf{Q}}$ 及 $\hat{\mathbf{V}}$ 、 $\hat{\mathbf{q}}$, 将 $\hat{\mathbf{V}}_i$ 、 $\hat{\mathbf{k}}_i$ ($i, j = 1, \dots, n$) 排成的 $6n \times 6n$ 阶及 $N \times 6n$ 阶准对角阵记作 $\hat{\mathbf{U}}$ 及 $\hat{\mathbf{k}}$, 则(14)及(22)式可综合为以下矩阵公式:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\Phi} \hat{\mathbf{v}} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{k}}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (24)$$

(23)式中的速度旋量 $\hat{\mathbf{v}}$ 可利用旋量 $\hat{\mathbf{v}}$ 及矩阵 $\hat{\mathbf{T}}$ 导出:

$$\hat{\mathbf{v}} = -\hat{\mathbf{T}}^T \hat{\mathbf{v}} = -(\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}})^T \dot{\mathbf{q}} \quad (25)$$

利用(15)式写出 B_i 的旋量形式牛顿/欧拉方程:

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i + \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{Q}}_i = \hat{\mathbf{E}}^g - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{S}}_{ij} (\hat{\mathbf{E}}_j^n + \hat{\mathbf{E}}_j^a) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (26)$$

其中 $\hat{\mathbf{E}}^g (i = 1, \dots, n)$ 为 B_i 上作用的重力相对 $\mathbf{e}^{(i)}$ 的旋量, $\hat{\mathbf{E}}_j^n, \hat{\mathbf{E}}_j^a (j = 1, \dots, n)$ 为 O_j 铰关联的刚体偶对 $B_{i(j)}$ 作用于 B_i 的理想约束力及主动力相对 $\mathbf{e}^{(i)}$ 的旋量. 将 $\hat{\mathbf{E}}^g, \hat{\mathbf{E}}_j^n, \hat{\mathbf{E}}_j^a (i, j = 1, \dots, n)$ 排成的 $6n$ 阶列阵记作 $\hat{\mathbf{E}}^g, \hat{\mathbf{E}}^n, \hat{\mathbf{E}}^a, \hat{\mathbf{v}}_i (i = 1, \dots, n)$ 排成的 $6n$ 阶准对角阵记作 $\hat{\mathbf{v}}$, 则方程组(26)可综合为一个矩阵方程:

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}} + \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{E}}^g + \hat{\mathbf{S}} (\hat{\mathbf{E}}^n + \hat{\mathbf{E}}^a) = \mathbf{0} \quad (27)$$

将上式各项左乘 $\hat{\mathbf{T}}$, 改造为

$$\hat{\mathbf{T}} (\dot{\hat{\mathbf{Q}}} + \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{E}}^g) + \hat{\mathbf{E}}^n + \hat{\mathbf{E}}^a = \mathbf{0} \quad (28)$$

此方程的第 j 分量表示由 O_j 铰联结的全部外侧刚体组成的第 j 子系统 $\{B_j\}$ 的动力学方程. 显然, 用 n 个子系统 $\{B_j\} (j = 1, \dots, n)$ 代替 n 个刚体 $B_i (i = 1, \dots, n)$, 可使每个方程内只出现一个铰约束力, 从而减少未知变量的耦合. 进一步简化可将方程(28)各项左乘 $\hat{\mathbf{k}}$ 化作

$$\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}} (\dot{\hat{\mathbf{Q}}} + \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{E}}^g) + \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}^n + \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}^a = \mathbf{0} \quad (29)$$

由于 $\hat{\mathbf{E}}_j^n$ 的各分量分别与 $\mathbf{k}_{js} (s = 1, \dots, N_j')$ 及 $\mathbf{l}_{jr} (r = 1, \dots, N_j'')$ 正交, $\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}^n$ 的各元素均为零, 因此方程(29)自动消除了铰的理想约束反力. $\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}^a$ 的第 j 子矩阵 $(\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}^a)_j$ 是由 O_j 铰沿各滑移轴的主动力或绕各转动轴的主动力矩组成的 N_j 阶列阵, 包括弹簧及阻尼作用力以及按预定规律变化的主动控制力, 前者通常是广义坐标及其导数的线性函数, 后者是时间的已知函数,

$$(\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}^a)_j = -\mathbf{D}_j \dot{\mathbf{q}}_j - \mathbf{K}_j \mathbf{q}_j + \mathbf{C}_j(t) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (30)$$

其中 $\mathbf{K}_j, \mathbf{D}_j$ 为 O_j 铰的 $N_j \times N_j$ 阶刚度矩阵及阻尼矩阵, $\mathbf{C}_j(t)$ 为 N_j 维控制函数. 将 $\mathbf{K}_j, \mathbf{D}_j (j = 1, \dots, n)$ 排成的 $N \times N$ 阶准对角阵记作 $\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{C}_j(t) (j = 1, \dots, n)$ 排成的 N 阶列阵记作 $\mathbf{C}(t)$, 则方程(29)简化为

$$\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}} (\dot{\hat{\mathbf{Q}}} + \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{E}}^g) - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (31)$$

刚体数不多时, 可利用(31)式导出解析形式的动力学方程. 对于刚体数庞大的复杂系统, 也可进行计算机推导或直接数值计算. 为此将(23)、(25)式代入方程(31), 整理后化作与 RW 方法类似的 $\mathbf{q}$ 的二阶方程:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B} \quad (32)$$

其中 $N \times N$ 阶系数矩阵 $\mathbf{A}$ 及 N 阶列阵 $\mathbf{B}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}}) \hat{\Phi} (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}})^T \\ \mathbf{B} &= -(\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}}) \left\{ \left[\hat{\Phi} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}})^T + \hat{\mathbf{v}} \hat{\Phi} (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{T}})^T \right] \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{E}}^g \right\} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{C} \end{aligned} \quad (33)$$

五、低副系统

工程技术中多采用单自由度铰,即机构学中的低副。由于 $N_i = 1$, 低副树系统的自由度 N 与刚体数 n 相等。引入铰的类型参数 v_j , 规定 $v_j = 0$ 对应于转动铰, $v_j = 1$ 对应于滑移铰。将滑移距离 z_j 或转角 θ_j 取作广义坐标 q_j :

$$q_j = v_j z_j + (1 - v_j) \theta_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (34)$$

为便于计算过程的程式化,对 B_i 及 $B_{i(j)}$ 的连体基 $\underline{e}^{(i)}$ 及 $\underline{e}^{(i)}$ 作以下规定: 令 $\underline{e}_3^{(j)}$ 沿 O_j 铰的滑移轴或转动轴, $\underline{e}_1^{(i)}$ 同时与 $\underline{e}_3^{(j)}$ 及 $\underline{e}_3^{(i)}$ 正交, $\underline{e}_3^{(j)}$ 与 $\underline{e}_3^{(i)}$ 之间的距离及夹角为 a_j 及 α_j , 无滑移时 $\underline{e}_1^{(i)}$ 与 $\underline{e}_1^{(j)}$ 之间的距离为 b_j (见图 3)。组成旋量变换矩阵 $\hat{A}^{(ij)}$ 的子矩阵 $\underline{A}^{(ij)}$ 及 $\underline{B}^{(ij)}$ 有以下普遍形式:

$$\underline{A}^{(ij)} = \begin{bmatrix} c(1 - v_j)q_j & -s(1 - v_j)q_j & 0 \\ c\alpha_j s(1 - v_j)q_j & c\alpha_j c(1 - v_j)q_j & -s\alpha_j \\ s\alpha_j s(1 - v_j)q_j & s\alpha_j c(1 - v_j)q_j & c\alpha_j \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^{(ij)} = \begin{bmatrix} 0 & -(b_j + v_j q_j)c\alpha_j & -(b_j + v_j q_j)s\alpha_j \\ (b_j + v_j q_j)c\alpha_j & 0 & -a_j \\ (b_j + v_j q_j)s\alpha_j & a_j & 0 \end{bmatrix} \underline{A}^{(ij)} \quad (35)$$

其中 c, s 为 $\cos, \sin$ 的缩写。系统内任意二刚体之间的变换矩阵可利用 (35) 及公式 (8) 导出。由于已规定 O_j 铰的滑移轴或转动轴均为 $\underline{e}_3^{(j)}$, 因此 (20) 式定义的 $\hat{k}_j$ 是只有第 3 或第 6 元素不为零的 6 阶行阵:

$$\hat{k}_j = [0 \ 0 \ v_j \ 0 \ 0 \ (1 - v_j)] \quad (36)$$

因此 $\hat{k}\hat{\Gamma}$ 等于将 $\hat{\Gamma}$ 的各子矩阵 $\hat{\Gamma}_{i,j}$ 用其第 $\mu_i = 3(2 - v_i)$ 子行阵代替后的 $n \times 6n$ 阶矩阵, 公式 (23)、(31) 均得以简化。

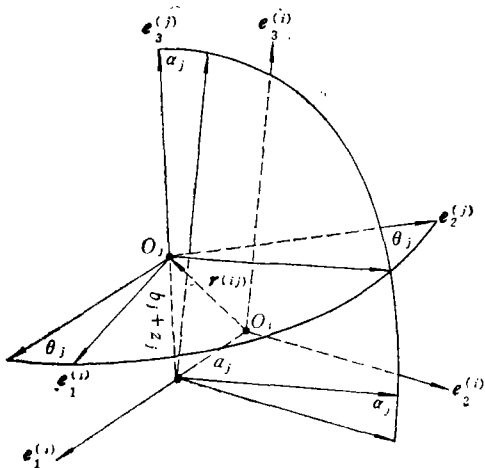


图 3

$B_{i^-(r)}$, $i^+(r)$ 及 $i^-(r)$ 均为 r 的整型函数。规定 O_{n+r} 固定于 $B_{i^-(r)}$, 以 O_{n+r} 为原点建立参考基 $\underline{e}^{(n+r)}$ 。

建立由 $n \times m$ 个 6×6 阶子矩阵组成的 $6n \times 6m$ 阶回路矩阵 $\hat{U}$:

六、非树系统

设非树系统 $\{B\}$ 由 n 个刚体 $B_i (i = 1, \dots, n)$ 及 $n + m$ 个铰 $O_j (j = 1, \dots, n + m)$ 组成, 其中至少存在 m 个回路。选择其中不重合且包含刚体数最少的 m 个回路为基本回路, 记作 $L_r (r = 1, \dots, m)$ 。在各基本回路内选择多余铰, 使切断此铰后系统成为树形, 称为原系统的派生树。对派生树按前述规则编号后, 继续对 m 个多余铰标号, 记作 $O_{n+r} (r = 1, \dots, m)$ 。在 O_{n+r} 联结的刚体偶对中令标号较小者为 $B_{i^+(r)}$, 标号较大者为

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{U}}_{jr}], \quad \hat{\mathbf{U}}_{jr} = U_{jr} \hat{\mathbf{A}}^{(j, n+r)} \quad (37)$$

$U_{jr} (j = 1, \dots, n, r = 1, \dots, m)$ 定义为

$$U_{jr} = \begin{cases} 1 & O_j \text{ 在 } L_r \text{ 内, 且在 } B_{i-(r)} \text{ 至 } B_0 \text{ 的通道上,} \\ -1 & O_j \text{ 在 } L_r \text{ 内, 且在 } B_{i+(r)} \text{ 至 } B_0 \text{ 的通道上,} \\ 0 & O_j \text{ 不在 } L_r \text{ 内.} \end{cases}$$

以图 2 为例(虚线为多余铰), 其回路矩阵为

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbf{A}}^{(25)T} & \hat{\mathbf{A}}^{(35)T} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\hat{\mathbf{A}}^{(36)T} & \hat{\mathbf{A}}^{(46)T} \end{bmatrix}^T$$

令 $\hat{\mathbf{y}}^c$ 为 $B_{i-(r)}$ 相对 $B_{i+(r)}$ 的以 $\mathbf{e}^{(n+r)}$ 为基的相对速度旋量, 其独立变量数等于 O_{n+r} 铰的自由度 N^c , 切断铰的总独立变量数为 $N^c = \sum_{r=1}^m N^c$. 令 $\hat{\mathbf{y}}^c (r = 1, \dots, m)$ 排成的列阵为 $\hat{\mathbf{y}}^c$, 派生树的相对速度旋量为 $\hat{\mathbf{y}}$, 根据多余铰切断前后刚体位置的相容一致性导出以下附加约束条件:

$$\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}^c = 0 \quad (38)$$

将 O_{n+r} 铰切断后 $B_{i+(r)}$ 对 $B_{i-(r)}$ 的作用力相对 $\mathbf{e}^{(n+r)}$ 的旋量记作 $\hat{\mathbf{E}}^c (r = 1, \dots, m)$, 所排成的列阵为 $\hat{\mathbf{E}}^c$, 则派生树的各子系统动力学方程可根据(31)式修改为

$$\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{E}}^c) - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{E}}^c = 0 \quad (39)$$

(38)、(39)式包含 $N + 6m$ 个标量方程, 对于给定的控制规律 $\mathbf{C}(t)$, 可确定 $N + N^c$ 个广义坐标及 $6m - N^c$ 个切断铰约束力分量.

只含一个回路的系统为单链系统. 如将输出杆 B_n 与 B_0 的联系铰 O_{n+1} 选作多余铰, 则切断后成为开链(见图 4). 对于低副单链系统, 方程(23)、(38)、(39)简化为

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = -\Phi_i \sum_{j=1}^i (\hat{\mathbf{A}}_{\mu_j}^{(j)})^T \dot{\mathbf{q}}_j \quad (i = 1, \dots, n) \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^n (\hat{\mathbf{A}}_{\mu_j}^{(j, n+1)})^T \dot{\mathbf{q}}_j - \hat{\mathbf{y}}_1 = 0 \quad (41)$$

$$\sum_{i=j}^n \hat{\mathbf{A}}_{\mu_j}^{(ij)} (\hat{\mathbf{Q}}_i + \hat{\mathbf{y}}_i \hat{\mathbf{Q}}_i - \hat{\mathbf{E}}_i^c) - \mathbf{D}_{\mu_j} \dot{\mathbf{q}}_j - \mathbf{K}_{\mu_j} \mathbf{q}_j + \mathbf{C}_{\mu_j} - \hat{\mathbf{A}}_{\mu_j}^{(j, n+1)} \hat{\mathbf{E}}_1^c = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (42)$$

其中 $\hat{\mathbf{A}}_{\mu_j}^{(ij)}$ 表示 $\hat{\mathbf{A}}^{(ij)}$ 的第 μ_j 子行阵.

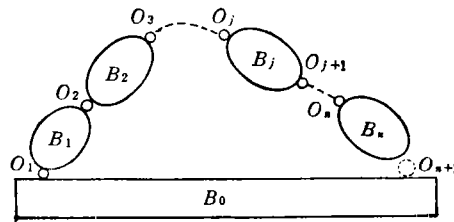


图 4

七、算例——操作机器人

讨论三环节 RRP 操作机器人^[5]。当工作臂端部以球铰 O_4 与沿地面上光滑导轨运动的工件联结时为闭链系统(见图 5)。令 O_4 为多余铰, 则工作臂脱离地面时的开链为系统的派生树。各刚体偶对的参数如下表所示:

j	a_j	b_j	α_j	ν_j	μ_j	q_j	ρ_{j1}	ρ_{j2}	ρ_{j3}
1	0	b_1	0	0	6	θ_1	0	0	$-\rho_1$
2	0	b_2	$\pi/2$	0	6	$\pi/2 - \theta_2$	0	0	$-\rho_2$
3	0	0	$\pi/2$	1	3	z_3	0	0	$-\rho_3$

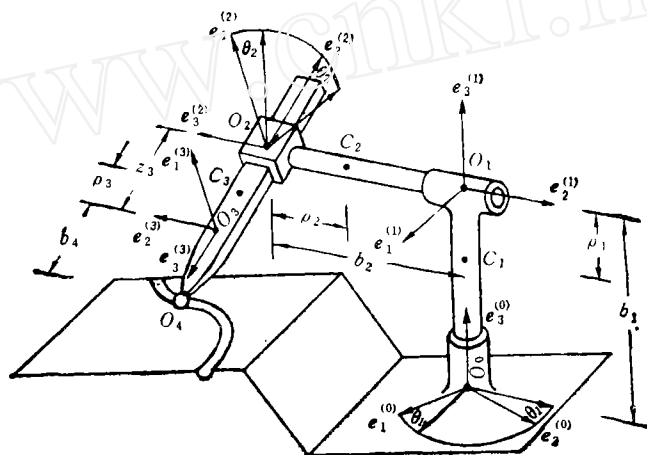


图 5

设导轨的曲线方程为

$$x_1 = x_1(\xi), \quad x_2 = x_2(\xi), \quad x_3 = 0$$

参变量 ξ 为 O_4 沿导轨滑移的曲线坐标。写出 O_4 的滑移速度 V^c 在与 $e^{(3)}$ 平行的 $e^{(4)}$ 基上的投影 $V_i^c (i = 1, 2, 3)$:

$$V_1^c = \dot{\xi} s \theta_2 c(\theta_1 - \phi), \quad V_2^c = \dot{\xi} s(\theta_1 - \phi), \quad V_3^c = \dot{\xi} c \theta_2 c(\theta_1 - \phi) \quad (43)$$

其中 $\phi = \text{tg}^{-1}(x_2'/x_1')$ 为导轨切线相对 $e^{(0)}$ 的倾角。根据(41)式导出三个相容性条件:

$$\dot{\theta}_1 b_1 s \theta_2 - \dot{\theta}_2 (b_1 + z_3) - V_1^c = 0 \quad (44a)$$

$$\dot{\theta}_1 (b_1 + z_3) c \theta_2 + V_2^c = 0 \quad (44b)$$

$$\dot{z}_3 + \dot{\theta}_1 b_1 c \theta_2 - V_3^c = 0 \quad (44c)$$

其中 b_1 为 O_1 至 O_2 距离。工作臂受到导轨的摩擦力 $F^c = -D_c V^c$ 及理想约束力 F^n 作用, 后者在 $e^{(4)}$ 上的投影 $F_i^n (i = 1, 2, 3)$ 应满足以下条件:

$$\sum_{i=1}^3 F_i^n V_i^c = 0 \quad (45)$$

设各连体基 $e^{(i)}$ 均为 B_i 的主轴坐标系, $J_{is}(s=1, 2, 3)$ 为 B_i 的主惯量矩, 利用公式(40)计算各子系统的动量旋量, 再利用方程(42)导出各子系统的动力学方程:

$$\begin{aligned} & \{J_{13} + (J_{22} + J_{33})s^2\theta_1 + [J_{21} + J_{31} + m_3z_3(z_3 - 2\rho_3)]c^2\theta_1 + m_1b_1(b_1 - 2\rho_1) + m_1b_1^2\}\ddot{\theta}_1 \\ & + 2[J_{22} - J_{21} - J_{31} + J_{33} + m_3z_3(2\rho_3 - z_3)]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2c\theta_2s\theta_2 + m_1b_1[(\rho_1 - z_1)(\dot{\theta}_1^2c\theta_2 + \theta_1s\theta_2) \\ & + \ddot{z}_3c\theta_2 - 2\dot{\theta}_2\dot{z}_3s\theta_2] + m_1(z_3 - 2\rho_3)\dot{\theta}_1\dot{z}_3c^2\theta_2 + D_1\dot{\theta}_1 + K_1\theta_1 - C_1(t) \\ & = (F_1^n - D_cV_1^c)b_1s\theta_2 - (F_2^n - D_cV_2^c)z_3c\theta_2 + (F_3^n - D_cV_3^c)b_2c\theta_2 \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} & [J_{23} + J_{32} + m_3z_3(z_3 - 2\rho_3)]\ddot{\theta}_2 + [J_{21} - J_{22} + J_{31} - J_{33} + m_3z_3(z_3 - 2\rho_3)]\dot{\theta}_1c\theta_2s\theta_1 \\ & + m_3[(z_3 - 2\rho_3)\dot{z}_3\dot{\theta}_2 + (\rho_3 - z_3)(\dot{\theta}_1b_1s\theta_1 + gc\theta_2)] + D_2\dot{\theta}_2 + K_2\theta_2 - C_2(t) \\ & = -(F_1^n - D_cV_1^c)(b_1 + z_3) \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} & m_3[\ddot{z}_3 + b_2\ddot{\theta}_1c\theta_2 + (\rho_3 - z_3)(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2c^2\theta_2) - gc\theta_2] + D_3\dot{z}_3 + K_3z_3 - C_3(t) \\ & = F_3^n - D_cV_3^c \end{aligned} \quad (46c)$$

方程组(43)、(44)、(45)、(46)共10个标量方程, 预先给定控制规律 $C_j(t)$ ($j=1, 2, 3$), 可确定10个未知变量 θ_1 、 θ_2 、 z_3 、 ξ 、 V_i^c 、 F_i^n ($i=1, 2, 3$)。工作臂脱离地面时, 令方程组(46)的右项为零, 则3个标量方程完全确定3个未知变量 θ_1 、 θ_2 、 z_3 。

参 考 文 献

- [1] Диментберг, Ф. М., Метод винтов в прикладной механике, Машиностроение (1971).
- [2] Yang, A. T., Inertia Force Analysis of Spatial Mechanisms, *J. Eng. for Industry*, ASME, **93**, 1(1971), 27—33.
- [3] Wittenburg, J., Dynamics of System of Rigid Bodies, Teubner (1977). (多刚体系统动力学, 谢传锋译, 北京航空学院出版社, 1986)
- [4] Wittenburg, J., Duale Quaternion in der Kinematik räumlicher Getriebe, Eine anschauliche Darstellung, *Ingenieur-Archiv*, 51(1981), 17—29.
- [5] Pannock, G. R., Yang, A. T., Dynamic Analysis of a Multi-Rigid-Body Open-Chain System, *J. Mech., Transm. and Autom. in Design*, ASME, 105(1983), p. 28—34.
- [6] 周起钊, 树形多刚体系统的动力学普遍方程, *力学学报*, 3(1983), 267—277.
- [7] 刘延柱, 杨海兴, 弹性联系的多刚体系统动力学方程, *应用力学学报*, **3**, 4(1986), 1—9.

SCREW-MATRIX METHOD IN DYNAMICS OF MULTIBODY SYSTEMS

Liu Yanzhu

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University)

Abstract In present paper the concept of screw in classical mechanics is expressed in matrix form, in order to formulate the dynamical equations of multibody systems. The mentioned method can retain the advantages of the screw theory but avoid the shortcomings of the dual number. Combining the screw-matrix method with the tool of graph theory in Roberson/Wittenberg formalism, we can expand the application of the screw theory to the general case of multibody system. For a tree system, the dynamical equations for each j -th subsystem, composed of all the outboard bodies connected by j -th joint can be formulated without the constraint reaction forces in the joints. For a nontree system, the dynamical equations of subsystems and the kinematical consistency conditions of the joints can be derived using the loop matrix. The whole process of calculation is unified in matrix form. A three-segment manipulator is discussed as an example.

Key words dynamics of multibody system, matrix method in rigid body dynamics, screw theory, dynamics of manipulation robots, dynamics of spatial mechanisms.