

再论有限变形梯度的“和分解”

姜耀东 谢和平
(中国矿业学院)

提要 本文就文献[1]提出对有限变形梯度“和分解”的疑问进行讨论。

关键词 有限变形梯度, 和分解。

有限变形如何度量一直是变形体力学的一个难题, Truesdell 和 Noll 将变形体的空间运动分解为纯变形和准刚性转动依次作用的结果, 由于左右两种分解形式的不唯一性及在三维情形下分解的困难性, 使得该理论很难得以应用. 陈至达教授在文献[2]提出了变形梯度的“和分解”定理(S-R分解定理), 把形变梯度分解为正交与对称两个子变换的直和:

$$F_i = \tilde{R}_i + S_i \quad (1)$$

并由张量数学方法导出了 $\tilde{R}_i$ 和 S_i 的具体计算式见文献[2].

S-R分解定理引入了拖带坐标描述法, 从而使标准尺规和拖带系的自然尺规的区别, 张量分量与物理分量的量纲差异处于更重要的地位. 由张量数学只能得到广义量纲方程. 具体力学问题尚需考虑其物理量纲. 而这些基本概念往往被人们忽视, 致使文献[1]的作者对 S-R分解定理提出疑问, 本文就此作一些讨论.

(一)

变形体发生形变时, 任一点邻域的线段转动是随方向变化的分布函数. 这一点在概念上和刚性转动有根本的区别. 以简单拉伸为例, 由图1易见, 除了 0° 和 90° 的纤维没有转动外其它每条纤维在伸长过程中都有转动, 我们讲简单拉伸没有转动, 其真实含意是相对不动点邻域线段转动的某种统计平均值为零, 而并非线段没有转动.

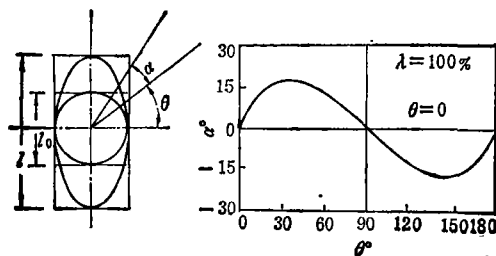


图 1

本文于1985年4月1日收到第一稿, 于1987年9月28日收到修改稿。

再考虑简单剪切,如图 2 所示. 我们会发现除了 0° 纤维以外, 0 点邻域内每条纤维都有转动. 而且十分有趣的是最大的纤维转角不是剪切角 45° , 居然有转角大于 45° 的纤维存在. 这是以前没有揭示出来的现象.

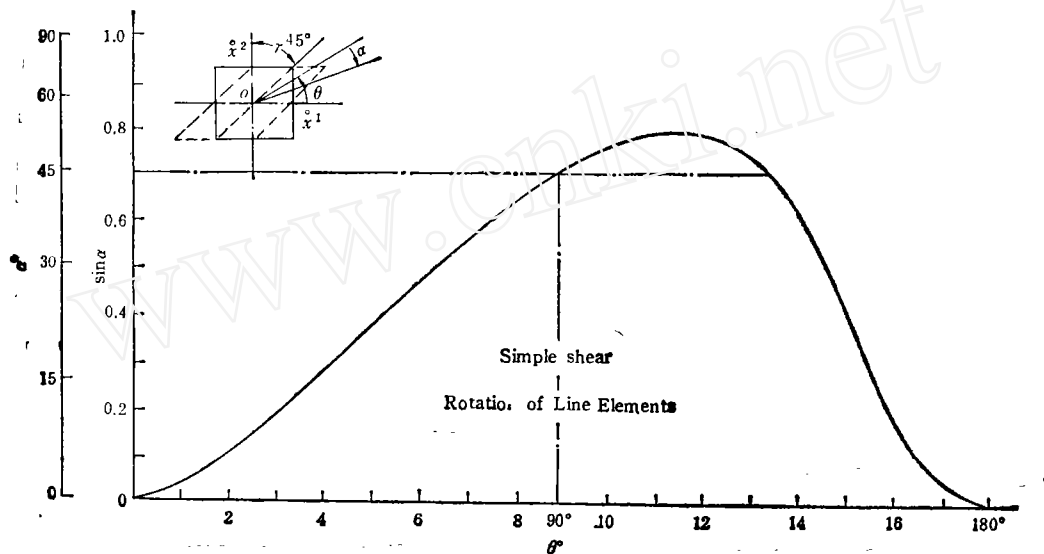


图 2

由此可见,变形体一点的局部转动比刚体转动要复杂得多,把变形体的局部转动归并到“刚体转动”一个概念之下是过于简单化. 我们知道在极分解中:

$$F_i^k = R_i^k U_i^k = V_i^k R_i^k \quad (2)$$

如果只有转动而没有形变,则 R_i^k 代表刚性转动张量. 同样在和分解中

$$F_i^k = \tilde{R}_i^k + S_i^k \quad (3)$$

如果只有转动而没有形变, $\tilde{R}_i^k$ 也代表刚性转动张量,这已有严格证明^[2],而且在这种情况下:

$$R_i^k = \tilde{R}_i^k \quad (4)$$

当形变和转动同时发生时,无论是极分解中的 R_i^k 还是和分解中的 $\tilde{R}_i^k$ 都只是作为一种转动参数来描述物体的局部转动效应,而决不是表示物体的刚性转动. 如果 R_i^k 是表示物体的刚性转动的话,那么在图 2 中极分解有

$$\left. \begin{aligned} K &= \operatorname{tg}(45^\circ) = 1 \\ \theta &= \arctan(K/2) = 26.57^\circ \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这表示哪一条纤维的刚性转动呢?同样在和分解中,此时有

$$\hat{\theta} = \arcsin(\sin(45^\circ)) = 20.705^\circ \quad (6)$$

也不表示该点的刚性转动.

由于极分解和 S-R 分解中所用的数学方法及坐标描述法不同,因而一般情况下 $R_i^k \neq \tilde{R}_i^k$ 是显然的. 文献 [1] 中的(8)至(13)式的推导显然是错误的. 当物体发生形变和转动时,无论 θ 还是 $\hat{\theta}$ 都只作为一种参数来描述局部转动效应,正如大量分子运动的绝对热量可以用不同的温标来描述一样.

文献[3]中已经指出“无论应用乘积分解定理或和分解定理, 决定线段长度比的准确公式都包含有转动项”。因而没有必要再对[1]中(17), (18)式进行讨论, 只要细心阅读文献[4]就会理解这一点。

(二)

S-R 分解定理中的 $\tilde{R}_i$ 和 S_i 是在拖带系中定义的, 由此拖带系的自然尺规和标准尺规相比不一定是单位长度, 其量纲也不一定为长度, 例如简单拉伸变形, 变换函数为:

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

变形后度规:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

应变张量分量:

$$\begin{bmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

应变张量的物理分量为

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_1^1 & \hat{S}_2^1 \\ \hat{S}_1^2 & \hat{S}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{1 + \lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

可见应变张量 S_i 是没有考虑变形后拖带系尺规的改变得到的张量空间的应变分量, 而其物理分量考虑了这种尺规的改变, 才是物理空间的应变分量。

文献[2]的作者正是引入拖带坐标通过抽象的张量数学才导出 S-R 分解定理的具体表达式。然而张量数学导出的仅是广义量纲方程。在物理空间来考虑变形梯度能否和分解时就应使用张量分量的物理分量。因为物理分量才是代表物理空间的量, 而张量分量则代表张量空间的量, 两者不能混淆, 就如实数域与复数域截然不同一样, 在实数域中 $|\sin \theta| \leq 1$, 而在复数域存在 $|\sin z| > 1$ 的情况。最新研究成果^[9]已经证明在物理空间:

$$|\sin \hat{\theta}|_p = \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{u}|_p \leq 1 \quad (11)$$

只要是物理可能的变换, 则和分解是无条件的, 唯一的, 不会出现 $|\sin \hat{\theta}| > 1$ 的情况, 否则是物理不可能的。

而在张量空间, 一般情况下都会出现

$$|\sin \theta| > 1 \quad (12)$$

例如有限转动与伸长复合问题 (图 3):

$$\begin{bmatrix} u^1|_1 & u^1|_2 \\ u^2|_1 & u^2|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \lambda) \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ (1 + \lambda) \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \\ \theta = \pm \arcsin \left[\frac{-(2 + \lambda) \sin \theta}{2} \right] \end{array} \right. \quad (13)$$

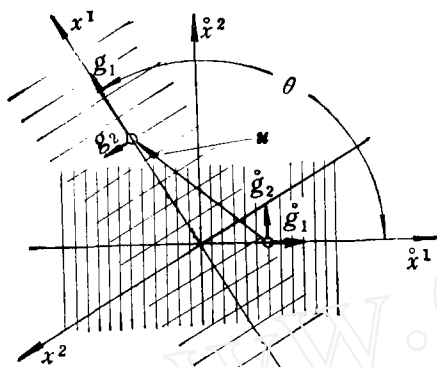


图 3

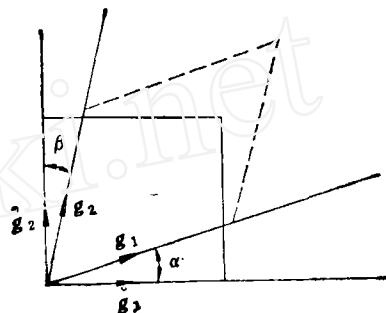


图 4

如 $\theta = 120^\circ$, $\lambda = 1$, 则 ϑ 无解, 但只要用物理分量就能很好地解决这个问题.

$\sin \hat{\vartheta} = \frac{1}{2} [(\hat{u}^1|_2 - \hat{u}^2|_1)^2 + (\hat{u}^2|_3 - \hat{u}^3|_2)^2 + (\hat{u}^3|_1 - \hat{u}^1|_3)^2]^{\frac{1}{2}}$ 是反映变形后基矢方向改变的一个平均量, 显然可以反映出一点邻域的局部转动. 如二维问题, $\hat{g}_1$ 转动 α , $\hat{g}_2$ 转动 $(-\beta)$, 如图 4 所示, 则

$$\sin \hat{\vartheta} = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

当 α 和 β 微小时, 上式化为经典线性理论的结果. 几何意义是明确的, 存在性也是一目了然的.

(三)

由张量数学推导 S-R 分解定理表达式时, 平均整旋角 $\hat{\vartheta}$ 出现了四组解, 这并不为奇, 就象求解微分方程一样, 当没有给定初始条件和边值条件时, 数学上存在多组解. 然而只有一个解是物理可能的, 必须根据其有限变形过程的运动条件来确定. 极分解在确定旋转角时同样存在这个问题, 可参见 Biot 的二维公式^[4]:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 + a_{11} + a_{22}} \quad (14)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{a_{21} - a_{12}}{2 + a_{11} + a_{22}} \quad (15)$$

我们都知道 $\operatorname{arctg} \frac{a_{21} - a_{12}}{2 + a_{11} + a_{22}}$ 与 $\operatorname{arc} \sin (\Sigma)$ 同样是多值函数. (这里 Σ 定义见[1]).

(四)

文献[1]作者提出了[1]中(36)与(37)两式差异的不理解, 其实这个问题在[2]中已阐述得很清楚.

因位移是一个相对量, 为体现这一特征, 故位移矢量 u 仍以初始正交曲线坐标系为基准:

$$\mathbf{u} = u^i \hat{\mathbf{g}}_i \quad (16)$$

不变量 $d\mathbf{u}$ 在拖带系中分解: (拖带系初始与正交曲线系同构)

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s^i} ds^i = u^i |_{,i} \hat{\mathbf{g}}_i dx^i \quad (17)$$

又

$$d\mathbf{u} = (\hat{u}^i |_{,i} \hat{\mathbf{e}}_i) ds^i \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_{(ij)}}} \hat{\mathbf{g}}_i \text{ (单位矢量)}; \quad ds^i = \sqrt{g_{(ii)}} dx^i \quad (19)$$

(19)式代入(18)式与(17)式比较得

$$\hat{u}^i |_{,i} = \sqrt{\frac{\hat{g}_{(ii)}}{g_{(ii)}}} u^i |_{,i} \quad (20)$$

位移矢量 $\mathbf{u}$ 也可在瞬时拖带系上分解,则

$$\mathbf{u} = \tilde{u}^i \mathbf{g}_i \quad (21)$$

$$d\mathbf{u} = (\tilde{u}^i |_{,i} \mathbf{e}_i) ds^i = \tilde{u}^i |_{,i} \mathbf{g}_i dx^i \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{(ij)}}} \mathbf{g}_i \text{ (单位矢量)} \quad (23)$$

则推得

$$\tilde{u}^i |_{,i} = \sqrt{\frac{g_{(ii)}}{\hat{g}_{(ii)}}} \hat{u}^i |_{,i}$$

当拖带系退化为正交曲线坐标系时,可得到

$$\hat{u}^i |_{,i} = \sqrt{\frac{\hat{g}_{(ii)}}{g_{(ii)}}} u^i |_{,i} \quad (24)$$

(20)式和(24)式分别对应[1]中的(37)式和(36)式。[1]中的(31)、(32)式及(38)式和(39)式均是[1]的作者基本概念不清所得的错误结论,已在前二节讨论过,不再重复。

结 束 语

S-R 分解定理之所以能取代经典有限变形理论,就在于它引入了拖带坐标描述法,使之能将变形体的形变量与旋转量用数学方法合理地分离开来。用这个定理可以导出经典理论各家的正确结果,并且已经广泛地应用于工程实际,在有限元和边界元法程序上已得到了实施^[6-8],板壳大变形分析及动力学分析^[9]等方面均取得了满意的结果,解决了极分解不能解决或很难解决的许多问题^[10-13]。S-R 分解定理的广泛应用并取得成功使人们开始重视并逐步接受。当然 S-R 分解定理作为一种新的理论,还得不断去研究探讨,这也是 S-R 分解定理能得以发展的必然途径。

参 考 文 献

- [1] 傅惠民,陈宜歌,对有限变形梯度“和解”的一点探讨,力学学报,2(1985),187—192.
- [2] 陈至达,有理力学,中国矿业学院北京研究生部讲义(1980).
- [3] 陈至达,对“关于有限变形梯度的‘和解’”一文的答复,力学学报,3(1981).
- [4] Biot, Mechanics of Incremental Deformations, John Wiley (1965).
- [5] Chen Zhida, On the Representation of Finite Rotation in Nonlinear Field Theory of Mecha-

- nics, Proceedings of The Int. Conf. On Nonlinear Mech., Shanghai, China, (1985), 229—234.
- 【6】 Xie Heping, Chen Zhida, Nonlinear Finite Element Analysis of Large Deformation For Continua in Gravity Field, Proc. of The Int. Conf. on Nonlinear Mech. Shanghai, China, (1985), 1337—1341.
- 【7】 谢和平, 陈至达, 非线性大变形边界元法探讨, 中国矿业学院学报, No. 4 (1986), 101—104.
- 【8】 Shang Yong, Chen Zhida, Analysis of Large Elastic and Plastic Deformation by Finite Element Method Using Co-Moving Coordinate System, Proc. of Int. Conf. on Nonlinear Mech., Shanghai, China, (1985), 1294—1300.
- 【9】 陈至达, 杆、板、壳大变形分析, 中国矿业学院北京研究生部讲义(1982).
- 【10】 Y. D. Jiang, Z. D. Chen (姜耀东, 陈至达), Spectral Analysis of Finite Strain and Finite Rotation, Proc. 20th. Midwestern Mechanics Conference, Purdue Univ. U. S. A. 1987, 31. Aug—2 Sept.
- 【11】 秦忠, 基于新的大变形理论的非线性有限元及其应用, 中国矿院博士学位论文, (1986, 7).
- 【12】 谢和平, 岩石流变损伤非线性大变形分析及微观断裂的 FRACTAL 模型, 中国矿业学院博士学位论文(1987, 2).
- 【13】 尚勇, 带有接触摩擦边界弹塑性大变形问题的理论和有限元分析, 中国矿业学院博士学位论文(1987, 4).

A FURTHER DISCUSSION ON THE PAPER“FURTHER DISCUSSION ON THE ADDITIVE DECOMPOSITION OF THE FINITE DEFORMATION GRADIENT”

Jiang Yaodong, Xie Heping

(China Institute of Mining & Technology)

Abstract In this paper, we discuss the S-R decomposition theorem of finite deformation gradient in greater detail and point out that the views drew in literature [1] are erroneous. The finite rotation of a deformation body is different from the rigid rotation in physical concept. In physical space, a linear differential transformation of motion can always be decomposed into the sum of two subgroups——orthogonal and symmetric groups, and the result is unique.

Key words finite deformation gradient, additive decomposition