

分形(fractal)几何与岩石断裂

谢和平 陈至达

(中国矿业学院)

摘要 岩石断口的不规则性可以统计地认为具有自相似性,由此本文应用新几何——分形(fractal)几何来描述这种不规则性。建立了穿晶以及沿晶界和穿晶相耦合的微观断裂fractal模型。用电镜和光学显微镜观察了大量岩石断口的fractal特征,得到了fractal维数与岩石宏观断裂力学量之间的初步对应关系。

关键词 分形维数, fractal 模型, 穿晶脆断, 沿晶脆断, 岩石, 断口分析。

一、引言

地质和采矿科学面临的难题之一是岩石类材料的断裂模拟,而宏观断裂力学对岩石类材料很难适用,因为它没有考虑到岩石类材料本身微结构的复杂性和影响因素的多样性。美国机械工程学会最近提出固体力学研究趋势的报告中列出地质材料力学的研究课题之一就是^[1]: 确定一些能描述材料组织的微结构参数,组构演化的微观力学分析及其与变形和破坏性质的关系,以及发展一些能测量微结构参数变化的实验技术。由此,建立一个岩石类材料的脆性断裂微观模型,在岩石微结构层次上寻求某一特征参量与宏观力学量之间的关系是很有理论价值和现实意义的。

岩石的最终宏观破裂是与其内部微结构及外载情况紧密相关的,岩石断裂后断裂面粗糙不平,这种粗糙不平程度就是其微结构和载荷以及其他复杂因素的一个综合反映。而从数学角度去考察这种粗糙不平程度,反映出来的仅是一个不规则的几何特征。Mandelbrot^[2](1976, 1983)提出一种新几何——fractal几何,并应用于各个领域来描述自然界充满着的不规则性现象。文献[3]研究了金属断口的fractal特征并得到了初步的结果。本文就是应用这种新几何建立了岩石微观断裂的fractal模型,对岩石断口的fractal特征进行了分析,得到了一些初步结果。

二、分形(fractal)几何

fractal词来源于拉丁语 fractus (意思是: *to break to create irregular fragment*),它是起源于1875年至1925年由Weierstrass构造的一个连续但不可微的函数引起的数学危机。在这个时期,经典的Koch曲线和Peano空间充填曲线的提出,以及Cantor由集合论证明一条线段上的点能够和正方形的点建立一一对应,虽然这不是连续地从线段到正方形的对应;但确实证明:维数已不是点的多少的事情,也不是为了固定点的位置所

本文于1986年12月12日收到。

需用的坐标个数。这就对传统的整数维数,曲线的定义及度量等概念发生了冲击,从而相继产生了分数维数,自相似维数和分形维数,继而形成一门新的几何——fractal 几何^[2]。在下仅只列出分形几何的几个主要定义。

1. 统计自相似性

在欧氏空间 R^E , 存在一个实数比 $r > 0$, 决定了一个自相似变换, 把点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d, \dots, x_E)$, 变换到点 $r(x) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_d, \dots, rx_E)$, 即把集合 J 变换成集合 $r(J)$ 。

一个任意有界集合 J 关于比率 $r > 0$ 和整数 N 是统计自相似的, 仅当 J 是 N 个非交迭子集 $J_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的并, 且具有形式 $r(J_i)$ 的每个子集同余于 J 的分布。

2. 自相似维数

对于 D 维规则图形(如正方形, 平行六面体等), 把图形的每一界面分成 b 份, 则图形被分成 $N = b^D$ 份, 它总满足相似比

$$r = \frac{1}{N^{1/D}} \quad (2.1)$$

其等效表达式为:

$$D = \lg N / \lg \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.2)$$

对于不规则图形, 为使自相似性比率具有(2.1)式形式, 唯一要求是图形具有自相似性。 D 称为自相似维数。

3. Hausdorff Besicovitch 维数

Hausdorff(1919) 提出维数 d 可以是分数。并给出测试函数 $h(\rho)$, 用一个半径为 ρ_m 的球进行集合 J 的有限覆盖, 就得到测度 $\sum h(\rho_m)$, 它的下确界形式为 $\inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m)$ 。当 $\rho \rightarrow 0$ 时具有极限:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m)$$

这个极限定义了 E 维 h -测度。当具有 $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$ 形式时, h -测度称为 d -测度^[7] (d 维的测度)。

对每个集合 J 存在一个实数 D , 使得 d -测度对于 $d < D$ 是无限的, 而对于 $d > D$ 是零, 这样的 D 就称为 J 的 Hausdorff Besicovitch 维数。

4. 分形(fractal)维数

分形是一个集合, 它的 Hausdorff Besicovitch 维数严格大于它的拓扑维数 D_T , 即

$$d_f = \{D | D > D_T\} \quad (2.3)$$

分形往往具有自相似性或统计自相似性, 因此它的维数可由相似维数的定义来求得。

5. fractal 曲线的度量^[2,4]

设由度量尺度 ε 去量度一般的 fractal 曲线的总长度 $L(\varepsilon)$, 则

$$L(r\varepsilon) = rNL(\varepsilon), \quad L(1) = 1$$

$$\text{如果 } d_f = \lg N / \lg \left(\frac{1}{r} \right), \text{ 则 } L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-d_f} \quad (2.4)$$

三、岩石微观断裂的 fractal 模型

对于脆断, Irwin^[2] 提出了裂纹临界扩展力准则, 裂纹临界扩展力定义为:

$$G_{\text{crit}} = 2\gamma_s \quad (3.1)$$

这里 γ_s 为单位宏观量度的面积的表面能, 并认为裂纹是沿平坦路径扩展的. 如从晶粒尺寸上研究裂纹扩展, (3.1) 式是相当近似的. 事实上, 在岩石中裂纹的扩展是成 Z 字形前进的^[7], 大 Z 字形中套小 Z 字形如(图版 I) 照片 1 所示. 也就是实际的断裂面积要大于宏观量度的面积. 对于单位厚度的断裂面积可以认为^[4] $A_{\text{实}} = [L(\varepsilon)/L_0(\varepsilon)]A_{\text{宏}}$ 这里 $L_0(\varepsilon)$ 为该 fractal 曲线为直线的量度.

裂纹临界扩展力应推广为:

$$G_{\text{crit}} = 2[L(\varepsilon)/L_0(\varepsilon)]\gamma_s \quad (3.2)$$

显然, 在一定范围内, 晶粒尺寸越小, fractal 表面的面积越大, 由 Mandelbort^[2], $L_i(\varepsilon_i) = L_0^d \varepsilon_i^{(1-d)}$, 当选 L_0 为单位长度 (1cm) 以 l 表示晶粒尺寸时, 则

$$G_{\text{crit}} \approx 2\gamma_s l^{(1-d)} \quad (3.3)$$

岩石是粗晶粒结构, 其断裂表现为脆性断裂, 主要表征为沿晶脆断, 穿晶脆断以及两者的偶合形式. 这几种断裂形式的裂纹扩展路径均是不规则的, 并且可以考虑为统计自相似的, 所以可以用 fractal 来模拟.

1. 沿晶脆断的 fractal 模型

在沿晶脆断时, 裂纹是沿晶粒边界传播的如(图版 II)照片 2 所示. 文献[4]提出了两种沿晶断裂的 fractal 模型如图 1 所示.

$$(a) \quad N = 2, \quad r = \frac{1}{1.732} \quad d_f = \frac{\log 2}{\log 1.732} = 1.26$$

$$(b) \quad N = 4, \quad r = \frac{1}{3} \quad d_f = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

这里 N 为生成物数, r 为相似比 ($N = L_i/\varepsilon_{0i}$, $r = \varepsilon_{0i}/L_{0i}$).

相应的裂纹临界扩展力由(3.2)式得

$$G_{\text{crit}} = 2\gamma_s [L_{0i}/\varepsilon_{0i}] = 2\gamma_s \left(\frac{1}{r}\right)^{d_f-1} \quad (3.4)$$



图 1 沿晶脆断 fractal 模型

$$(a) \quad G_{\text{crit}} = 1.73^{0.26} \times 2\gamma_s = 1.15 \times 2\gamma_s, \quad (b) \quad G_{\text{crit}} = 3^{0.26} \times 2\gamma_s = 1.33 \times 2\gamma_s$$

可见 (a) 情形较 (b) 情形耗散能小, 容易发生.

2. 穿晶脆断的 fractal 模型

岩石中存在大量的微孔隙和微裂纹, 在岩石断裂中, 穿晶脆断比较普遍. 穿晶断裂的主要特征是在一个结晶平面上形成一个解理裂纹的相对不平面, 即在一个晶粒平面内形

成台阶, 如(图版 II)照片 3 所示。由此我们简化成 fractal 模型如图 2 所示。

$$N = 3, r = \frac{1}{2.236} \quad d_f = \log 3 / \log 2.236 = 1.365$$

临界裂纹扩展力为:

$$G_{crit} = (2.236)^{0.365} \times 2\gamma_s = 1.34 \times 2\gamma_s$$

以上看到, 穿晶断裂比任何一种沿晶断裂均要耗散更多的能量。

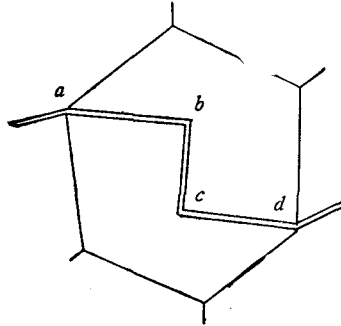


图 2 穿晶脆断 fractal 模型

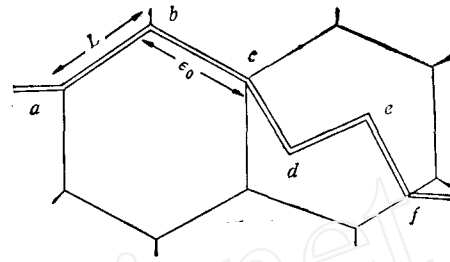


图 3 沿晶穿晶耦合断裂 fractal 模型

3. 穿晶和沿晶相耦合断裂的 fractal 模型

在任何一个岩石断口上总能找到沿晶界断裂和穿晶断裂两种断裂花样。因为岩石内部晶粒中的微孔隙、微裂纹、夹杂等引起局部应力集中, 而导致穿晶断裂, 而一般地会沿晶断裂 (因耗散较小的能量), 所以一个岩石断裂表面一般地是沿晶和穿晶断裂的偶合体, 如(图版 II)照片 4 所示。

我们简化其 fractal 模型如图 3 所示。

$$N = 5, r = \frac{1}{3.445} \quad d_f = \log 5 / \log 3.445 = 1.30$$

相应的临界扩展力为

$$G_{crit} = (3.445)^{0.3} \times 2\gamma_s = 1.45 \times 2\gamma_s$$

将以上分析结果和相应的实测值列于表 1, 可以看到: 本文分析结果是与实际情况相符的, 对同一晶粒尺寸下的脆性断裂最容易发生沿晶断裂形式给出了定量的表述。

表 1 不同脆断形式下的 fractal 维数和 G_{crit} 值

断裂形式	fractal 维数 d_f 的分析值	实测大理石 d_f 值 (直接拉伸)	晶粒尺寸均为 10^{-2}cm 时 G_{crit} 值 $G_{crit} = 2\gamma_s \times l^{1-d_f}$	对同一 γ_s 值岩石断裂发生可能性程度
沿晶 (a)	1.26	1.18	$3.31 \times 2\gamma_s$	容易
沿晶 (b)	1.26	1.18	$3.31 \times 2\gamma_s$	容易
穿 晶	1.365	1.31	$5.37 \times 2\gamma_s$	难
沿晶和穿晶相耦合	1.30	1.29	$3.98 \times 2\gamma_s$	较难

四、岩石断口的分形 (fractal) 分析

1. 宏观实验

我们进行了岩石的直接拉伸和三点弯曲断裂破坏实验。试件按约定条件加工而成。

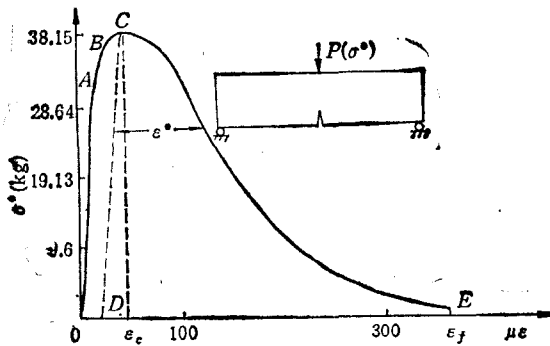


图 4 大理石在三点弯曲下典型实验曲线

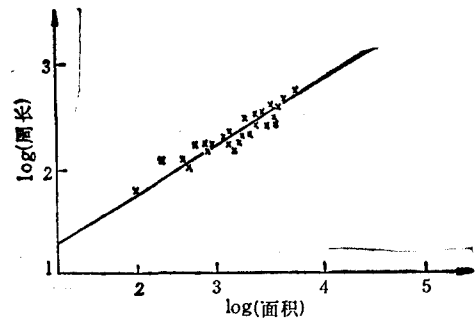


图 5 大理石断口(直接拉伸) log(周长)与 log(面积)的关系

三点弯曲的典型实验曲线如图 4 所示。当应力达到峰值 C 点时, 试件内存有足够的能量, 裂纹不稳定扩展至断裂, 应力降至零。作直线 $\overline{CD}$ 平行于初始弹性加载段 $\overline{OA}$; 即认为材料在 C_0 点处具有弹性卸载特性。则在 $\overline{OABCD}$ 中的面积就代表材料变形中消耗的塑性功, 而 $\overline{DCE}$ 下的面积则是材料损伤断裂耗散能 G_f , 我们总能得到 G_f 的表达式为:

$$G_f = \frac{1}{2} \frac{\sigma_c}{E} + \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_f} \sigma d\epsilon \quad (4.1)$$

这里 ϵ_c 和 ϵ_f 分别表示在应力峰值时的应变值和断裂时的应变值。

2. 岩石断口的分形估计和测定

对于二维, 一般规则图形(如正方形、圆等)的周长与面积之间可以找到一个统一的关系:

$$(\text{周长}) \propto (\text{面积})^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

类似地对于不规则图形(如云彩、夹杂等)的周长和面积有关系^[2]

$$(\text{周长})^{1/d_f} \propto (\text{面积})^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

上式表示非标准周界的周长和标准面的面积之间的关系, 由(4.3)式可得到

$$\frac{1}{d_f} \log(\text{周长}) = \text{常数} + \frac{1}{2} \log(\text{面积}) \quad (4.4)$$

$$d_f = 2 \frac{\Delta \log(\text{周长})}{\Delta \log(\text{面积})} \quad (4.5)$$

由宏观断裂实验得到的岩石断口表面形状是不规则的, 当认为具有统计自相似性时, 它就是一种 fractal, 故此可由(4.5)式来测定它的 fractal 维数。

当我们对岩石断口表面镀金(或镀炭)后磨去一层又一层(平行于断裂表面), 凸出部分就成为象云彩一样的岩石岛如(图版 II) 照片 5 所示。在光学显微镜下用固定码尺精确地测量出这些岩石岛的非规则周界的长度及相应的面积。发现在一系列的 $\log(\text{周长})$ 和 $\log(\text{面积})$ 数据中具有很好的线性对应关系如图 5 所示。这样对实测到的 n 组 ($\log(\text{面积})$, $\log(\text{周长})$) 值进行线性回归, 就可得到分形(fractal)的估计:

$$d_f = 2 \frac{\sum_{i=1}^n \log(\text{面积})_i \times \log(\text{周长})_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \log(\text{面积})_i \times \sum_{i=1}^n \log(\text{周长})_i \right)}{\sum_{i=1}^n [\log(\text{面积})_i]^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \log(\text{面积})_i \right]^2} \quad (4.6)$$

五、结果与讨论

我们对大理石直接拉伸和三点弯曲断口进行了分形分析, 得到了相应的 fractal 维

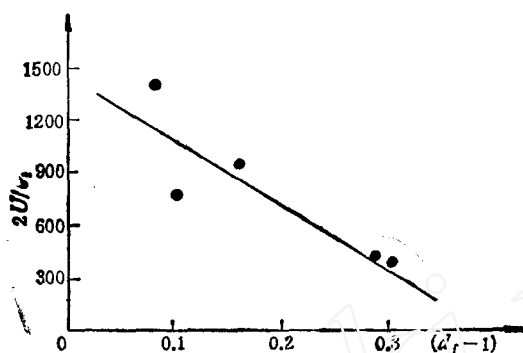


图6 大理石直接拉伸断口 $(d_f - 1)$ 与 $2U/\sigma_t$ 的关系曲线

数值。现在的问题是这些微观几何特征量与哪些宏观力学量有关系呢? 对于岩石直接拉伸, 得到的宏观力学量仅只抗拉强度 σ_t , 弹性应变能 $U = \frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2}{E}$, 它们与 fractal 维数的关系如图6所示。对三点弯曲大理石断口, 首先我们把在三点弯曲实验中测定的宏观力学量: 破坏时载荷 $P_{\max}$, 应力强度因子 K_{Ic} 及几何尺寸因子 (a 为切缝长度, W 为试件高度)

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} \left[2.9 - 4.6 \frac{a}{W} + 21.8 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 37.6 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 38.7 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]$$

与 fractal 维数联系起来如图7所示。似乎有一定的对应关系, 但规律性不很理想。我们又把宏观实验中得到的损伤断裂耗散能 G_f 与 d_f 联系起来, 得到了令人满意的结果, 如图8所示。这种关系可以表达为:

$$d_f = 2.49 - 0.045 \times 10^{-3} \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma_c^2}{E} + \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_f} \sigma d\epsilon \right] \quad (5.1)$$

写成一般形式:

$$d_f = K_1 - K_2 G_f \quad (5.2)$$

式中 K_1 和 K_2 为岩石材料常数, 它可能与材料的微结构、受力方式相关。

这表明: 岩石断裂后断裂表面表现出来的不规则性反映了在断裂时损伤断裂的能量耗散, 而这种不规则性又可由分形(fractal)几何得到很好的模拟。这样, 根据岩石断口的分形(fractal)可能追逆到岩石断裂时的力学行为, 尽管 G_f 是岩石力学行为的一个综合量(能量), 但给人们一个新的方法直接从材料破坏之后的断口分析去推测它的断裂性质, 这对于材料的断裂分析和工程实际均具有现实意义。

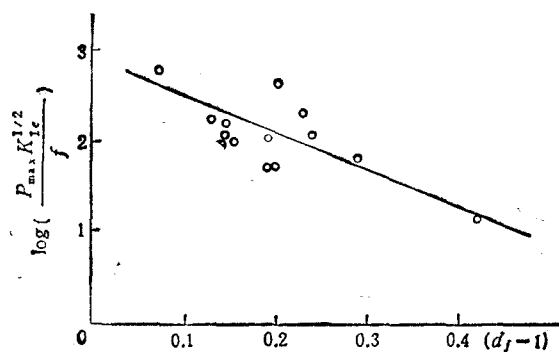


图7 三点弯曲大理石断口 $(d_f - 1)$ 与 $\log(\frac{P_{max} \sqrt{K_{IC}}}{f})$ 的关系曲线

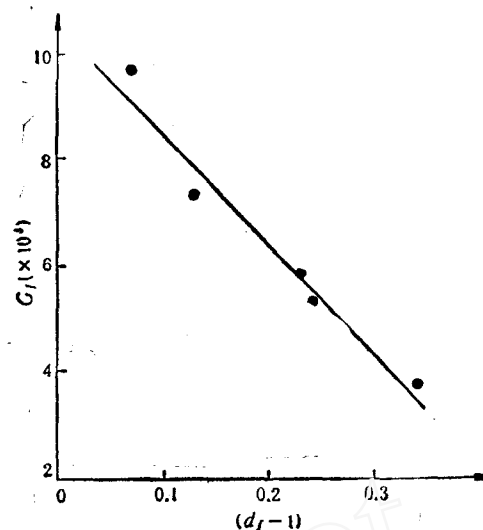


图8 三点弯曲大理石断口 $(d_f - 1)$ 与 G_f 的关系曲线

只能说,本文应用分形几何对岩石断裂作了一些试探性的研究,从所得到的初步结果表明: fractal 维数对岩石断裂分析可能很有用。fractal 维数可能是岩石材料组织微结构,组构演化,变形和破坏性质相关的综合几何参量,可能将为我们用微观和宏观力学相结合来研究岩石断裂提供一条新的途径。

致谢 本文的研究得到了美国 IBM 研究中心 B. B. Mandelbrot 教授和中国科学院沈阳金属研究所龙期威研究员的支持和指导。宏观实验得到了武汉中国科学院岩土力学所吴绵拔,高建光同志的帮助,在此谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] 王仁,地质材料的力学问题,力学与实践,8,4(1986).
- [2] Mandelbrot, B. B., The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Company(1983).
- [3] Mandelbrot, B. B., Passoja D. E. and Paullay A. J., Fractal character of fracture surfaces of metals, *Nature*, 308, 19(1984), 721.
- [4] Lung, C. W.(龙期威), Fractals and fracture of cracked metals, Preprint of the Int. Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, IC/85/123.
- [5] Cherepanov, G. P., Mechanics of Brittle Fracture, McGraw-Hill Int. Book Company. New York,(1979), 130.
- [6] 龙期威,董连科,微观与宏观相结合的断裂力学 I, 第45期《应用数学和力学》讲座讲义,(1986).
- [7] 谢和平,岩石蠕变损伤非线性大变形分析及其微观断裂的 fractal 模型,中国矿业学院博士论文(1987).

FRactal GEOMETRY AND FRACTURE OF ROCK

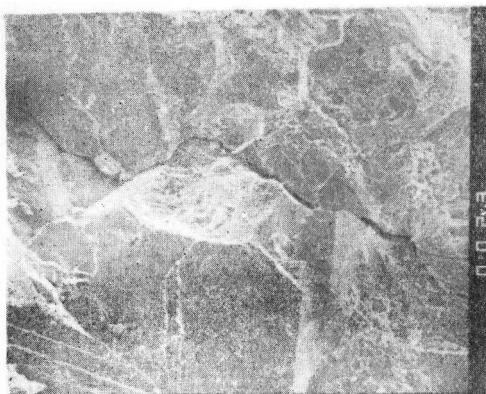
Xie Heping Chen Zhida

(China Institute of Mining & Technology)

Abstract The irregular and rough profile of fracture surfaces of rock can be regarded as having self-similarity statistically. The authors apply a new geometry-fractal geometry to describe this irregularity. Fractal models of transgranular fracture and combination of intergranular fracture with transgranular fracture of rock are established. The fractal character of fracture surface of rock is examined by electron scanning and optical fractographic analysis. Finally, the relation between fractal dimension and macromechanics quantities of rock fracture is obtained.

Key words fractal dimension, fractal model, transgranular brittle fracture, intergranular brittle fracture, rock, fractography

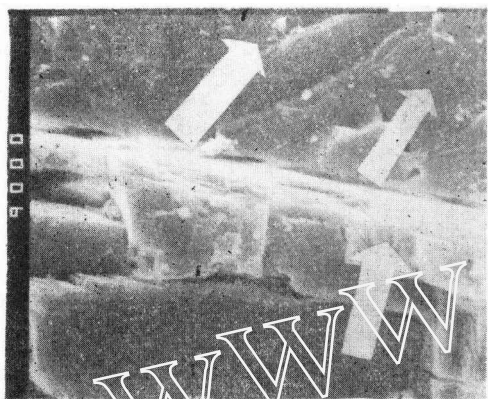
www.cnki.net



照片1 压缩载荷下大理石中亚裂纹扩展路径
(扫描电镜×70)



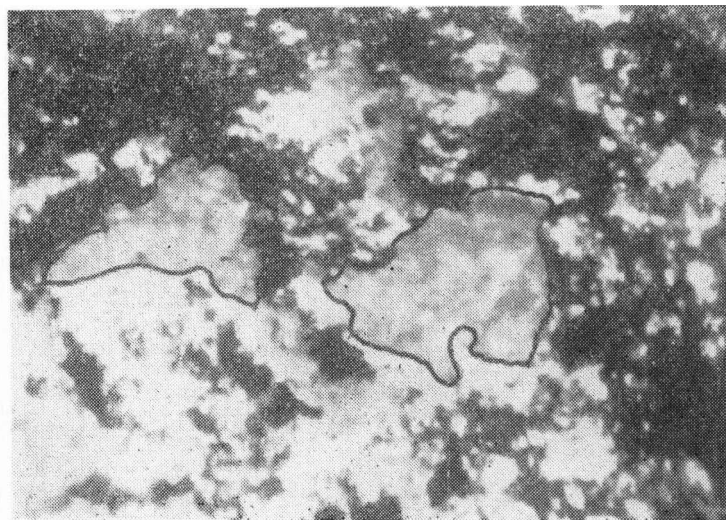
照片2 三点弯曲大理石断口沿晶胞断花样
(扫描电镜×450)



照片3 三点弯曲大理石断口晶粒面上的解理台阶
(扫描电镜×1000)箭头表示局部裂纹传播方向



照片4 三点弯曲大理石断口沿晶A和穿晶B耦合
断裂花样(扫描电镜×45)



照片5 云彩一样的岩石岛(光学显微镜)