第20卷 第3期
1988年5月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 20, No. 3
May, 1988

轴对称实体迴转杂交应力元

田 宗 漱
(北京中国科技大学研究生院)

提要 用杂交应力法导出一系列新的八节点、四边形轴对称实体迴转元. 对每种元,边界二次位移插值函数相同,内部应力场各异. 对两类不同选择假定应力场的方法进行了对比研究. 以内压力作用下的厚壁筒及厚球为例,对各种应力场进行了数值比较,并选出了一种较好的元,该元给出了远较传统的八节点轴对称假定位移元准确的应力分布.

关键词 轴对称、杂交应力法、实体迴转元、零能模式、不变性.

一、前 言

用杂交应力法导出的有限元,常常可以提供比一般的假定位移元更为准确的应力分布,并对其收敛性有所改善. 这里关键在于选择假定的应力场. 对于选择满足平衡方程的应力场,轴对称实体迴转元由于平衡方程以柱坐标表示,因而比平面问题的杂交应力元困难.

四节点轴对称杂交应力实体元,卞学璜教授和 Spilker 首先作过研究[1,2],应用了准确满足平衡方程的假设应力场;以后卞教授和本文作者又用理性杂交应力元的方法,对此问题进行了研究[3,4],即应力场最初假设为自然坐标内的完整多项式,位移也是完整的多项式,并使之对应的应变是具有和应力同阶的完整多项式,平衡方程通过附加位移作为 Lagrange 乘子被引入. 这样得到的元,数值算例表明: 给出了比用假定位移法,及一般杂交应力法所得的轴对称元更为准确的应力及位移值;几何各向同性;而且对元几何形状的歪斜不敏感.

本文目的之一是进一步研究八节点轴对称实体迴转杂交应力元. 首先应用两类不同方法导出了六种假设应力场: 其中前三种(元 A、B、C)是由假定应力、应变一一对应的方法导出; 后三种(元 D、E、F)是将各应力分量表示为相同多项式的方法导出. 这六种应力场,均准确满足平衡方程;不具有多余的零能模式;并且刚度矩阵具有不变性.

以内压力作用下的厚壁筒及厚球为例,在比较了元内中点的应力值、元的应力分布,以及位移结果后,找出了其中相对较好的一种元.

本文另一目的是在满足平衡方程前提下,对以上两类方法进行比较何者为佳. 目前的结果表明,用后一类方法——应力分量表示为相同的多项式——导出的元,往往给出较前者更好的应力及位移结果.

本文于1986年11月28日收到.

二、单元刚度矩阵的导出

根据 Hellinger-Reissner 变分原理，当元采用协调位移时，可得：

$$\pi_R = \int_{V_n} \left[-\frac{1}{2} \sigma^T S \sigma + \sigma^T (D u) \right] dV \tag{2.1}$$

上式中：

σ：应力

S：材料弹性阵

u：位移

V_n：第 n 个元的体积

D：微分算子阵，借助于柱坐标 (r, z) 及自然坐标 (ξ, η)，可表为：

$$D = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) & 0 \\ \frac{|J|}{r} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ \left(-\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$|J|$ 为 Jacobian.

引用表达式：

$$\sigma = P \beta \tag{2.3}$$

$$u = N q \tag{2.4}$$

式中：β 为应力参数，q 为节点位移，P 与 N 分别为应力与位移插值函数.

将(2.3)、(2.4)式代入(2.1)式中，并利用下列表达式：

$$B = D N \tag{2.5}$$

$$H = \int_{V_n} P^T S P dV \tag{2.6}$$

$$G = \int_{V_n} P^T B dV \tag{2.7}$$

即得：

$$\pi_R = -\frac{1}{2} \beta^T H \beta + \beta^T G q \tag{2.8}$$

此式经过变分，即得单元刚度矩阵[5]：

$$k = G^T H^{-1} G \tag{2.9}$$

实际当应力满足齐次平衡方程时，π_R 已退化为修正的余能原理：

$$-\pi_{mc} = \int_{V_n} -\frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV + \int_{\partial V_n} T^T u dS \tag{2.10}$$

这里仍用 π_R，是由于用式(2.7)计算阵 G 方便.

三、轴对称实体迴转元的应力场

对于具有一般四边形的轴对称实体元（图 1），本文共导出表 1 中所列举的六种杂交

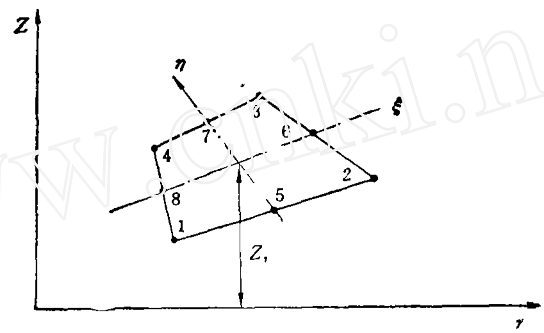

图 1　实体迴转元横截面形状

表 1.　每个杂交应力元从方程(3.1)中消去的应力参数

假定应力场	β 数	消去的应力参数或彼此的关系
A	15	β_{16}，β_{17}，β_{19}，β_6，β_{23}，β_{20}，β_{28}，β_{29}，β_{21}，β_{30}，β_{27} $\beta_{22}=\beta_{18}$，$\beta_{24}=-\beta_{11}$，$\beta_{25}=-\frac{1}{2}\beta_{13}$，$\beta_{26}=-\frac{1}{3}\beta_{15}$
B	16	β_{17}，β_{19}，β_6，β_{23}，β_{20}，β_{29}，β_{21}，β_{27}，$\beta_{22}=\beta_{18}$ $\beta_{24}=-\beta_{11}$， $\beta_{28}=\beta_{16}$，$\beta_{15}=-3\beta_{26}$，$\beta_{25}=-\frac{\beta_{13}}{2}$，$\beta_{30}=-2\beta_{28}$
C	17	β_{19}，β_6，β_{23}，β_{29}，β_{21}，β_{27}，$\beta_{22}=\beta_{18}$，$\beta_{20}=-3\beta_{17}$ $\beta_{28}=\beta_{16}$，$\beta_{24}=-\beta_{11}$，$\beta_{15}=-3\beta_{26}$，$\beta_{25}=-\frac{1}{2}\beta_{13}$，$\beta_{30}=-2\beta_{28}$
D	17	β_{17}，β_{19}，β_{23}，β_{20}，β_{29}，β_{21}，β_{27}，$\beta_{25}=-\frac{1}{2}\beta_{13}$，$\beta_{26}=-\frac{\beta_{15}}{3}$ $\beta_{22}=\beta_{18}$，$\beta_{24}=-\beta_{11}$，$\beta_{28}=\beta_{16}-\frac{1}{2}\beta_6$，$\beta_{30}=\beta_6-2\beta_{16}$
E	21	$\beta_{22}=\beta_{18}$，$\beta_{23}=2\beta_{19}$，$\beta_{24}=-\beta_{11}$，$\beta_{28}=\beta_{16}-\frac{1}{2}\beta_6$ $\beta_{29}=3\beta_{17}-\beta_{20}$，$\beta_{30}=\beta_6-2\beta_{16}$，$\beta_{25}=-\frac{1}{2}\beta_{13}$， $\beta_{26}=-\frac{\beta_{15}}{3}$，$\beta_{27}=\beta_{20}-3\beta_{17}$
F	16	$\beta_6=2(\beta_8+\beta_{16})$，$\beta_{22}=\beta_{18}$，$\beta_{23}=2\beta_{19}$，$\beta_{10}=-\beta_2$， $\beta_{24}=-\beta_{11}$ $\beta_{14}=-(3\beta_{16}+2\beta_8)$，$\beta_{28}=-\beta_8$，$\beta_{15}=-3\beta_{19}$， $\beta_{29}=3\beta_{17}-\beta_{20}$ $\beta_{21}=-\frac{1}{2}(5\beta_{17}+\beta_{20}+2\beta_{22})$，$\beta_{30}=2\beta_8$， $\beta_{25}=-\frac{1}{2}\beta_{13}$，$\beta_{26}=\beta_{19}$，$\beta_{27}=\beta_{20}-3\beta_{17}$

应力元的应力场．它们分别是由下式，

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \beta_4+\beta_2\frac{1}{r}+\beta_5\frac{z}{r}+\beta_7 z+\beta_8\frac{z^2}{r}+\beta_{16}r+\beta_{17}r^2+\beta_{18}z^2+\beta_{19}rz \\
\sigma_\theta &= \beta_1+\beta_3 z+\beta_6 r+\beta_{22}z^2+\beta_{23}rz+\beta_{20}r^2 \\
\sigma_z &= \beta_{12}+\beta_{10}\frac{1}{r}+\beta_{24}\frac{z}{r}+\beta_{13}z+\beta_{14}r+\beta_{28}\frac{z^2}{r}+\beta_{15}rz+\beta_{29}z^2+\beta_{21}r^2
\end{aligned}\right\}\quad(3.1)$$

$$\sigma_{rz}=\beta_{11}+\beta_9\frac{1}{r}+(\beta_1-\beta_4)\frac{z}{r}+\beta_{30}z+\beta_{25}r+\frac{1}{2}(\beta_3-\beta_7)\frac{z^2}{r}+\beta_{26}r^2+\beta_{27}rz$$

消去表 1 中所列举的应力参数得到.

例如,对于元 E 为:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\beta_4+\beta_2\frac{1}{r}+\beta_5\frac{z}{r}+\beta_7z+\beta_8\frac{z^2}{r}+\beta_{12}r+\beta_{17}r^2+\beta_{18}z^2+\beta_{19}rz\\ \sigma_\theta&=\beta_1+\beta_3z+\beta_6r+\beta_{18}z^2+2\beta_{19}rz+\beta_{20}r^2\\ \sigma_z&=\beta_{12}+\beta_{10}\frac{1}{r}-\beta_{11}\frac{z}{r}+\beta_{13}z+\beta_{14}r+\left(\beta_{16}-\frac{1}{2}\beta_6\right)\frac{z^2}{r}\\ &\quad+\beta_{15}rz+(3\beta_{17}-\beta_{20})z^2+\beta_{21}r^2\\ \sigma_{rz}&=\beta_{11}+\beta_9\frac{1}{r}+(\beta_1-\beta_4)\frac{z}{r}+(\beta_6-2\beta_{16})z-\frac{1}{2}\beta_{13}r\\ &\quad+\frac{1}{2}(\beta_3-\beta_7)\frac{z^2}{r}-\frac{1}{3}\beta_{15}r^2+(\beta_{20}-3\beta_{17})rz\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

它包含了 21 个应力参数 β. 对八节点轴对称元,为扫除多余的零能模式,所需最少的 β 数为 15,即元 A 的 β 数.

这六种元分别由两类不同的出发点导出:

第一类(应力场 A、B、C): 首先选取具有 15 个参数的三次位移场,得到相应的应变场,再选择一个应力参数与一个应变分量相对应,从而得到最初假设的应力场.

第二类(应力场 D、E、F):开始将所有的应力分量均选择为相同的二次式,即:

$$\underset{\sim}{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \sigma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{P}_0&0&0&0\\ 0&\underset{\sim}{P}_0&0&0\\ 0&0&\underset{\sim}{P}_0&0\\ 0&0&0&\underset{\sim}{P}_0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{36}\end{Bmatrix}\tag{3.3}$$

这里

$$\underset{\sim}{P}_0=\left[1\quad\frac{1}{r}\quad\frac{z}{r}\quad z\quad r\quad\frac{z^2}{r}\quad r^2\quad z^2\quad rz\right]\tag{3.4}$$

由于是轴对称元,因此在假设应力场时,包括了$\frac{1}{r}$、$\frac{z}{r}$、$\frac{z^2}{r}$ 等 r 负次幂项.

将开始假设的应力场,经调整系数及应力参数,以达到同时满足以下三方面的要求,从而得到表 1 中所列举的应力场.

(A). 满足齐次平衡方程:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}&-\frac{1}{r}&0&\frac{\partial}{\partial z}\\ 0&0&\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \sigma_{rz}\end{Bmatrix}=0\tag{3.5}$$

对于第二类应力场,由于开始的 β 数且较多,有的应力场在导出时,还利用了协调方程

$$\nabla^2(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z)=0\tag{3.6}$$

再消去一些 β.

(*B*). 不具有多余的零能模式:

为满足此要求,由所导出的诸应力场算得的阵 $\underset{\sim}{G}$,即:

$$\underset{\sim}{G}=2\pi\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underset{\sim}{P}^{T}\underset{\sim}{B}r\,d\xi\,d\eta \tag{3.7}$$

应是满秩的[6].

例如,对应力场 E,可算得:

$$\underset{\sim}{G}=8\pi\begin{bmatrix}
1&0&0&1/3&0&1&0&0&0&0&0&1/3&0&0&0\\
&1&0&0&0&0&0&1/3&0&0&0&0&0&0&0\\
&&1&0&0&0&1/3&0&1/3&0&0&0&0&0&1/5\\
&&&1&0&-1&0&0&0&0&0&-1/2&0&0&0\\
&&&&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&&&1&0&r_0&0&0&0&5/4&0&0&0\\
&&&&&&1&0&-1/2&0&0&0&0&0&-3/10\\
&&&&&&&1&0&0&0&0&0&0&0\\
&&&&&&&&1&0&0&0&0&0&1/5\\
&&&&0&&&&&1&0&0&0&1/3&0\\
&&&&&&&&&&1&0&-1&0&0\\
&&&&&&&&&&&1&0&0&0\\
&&&&&&&&&&&&1&0&\frac{24r_0}{5}\\
&&&&&&&&&&&&&1&0\\
&&&&&&&&&&&&&&1
\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

可见是满秩的,故元 E 不具有多余的零能模式.

(*C*). 具有不变性:

即单元刚度矩阵不因元作刚体运动而改变．这个条件对杂交应力元并不自动满足.

对轴对称元,刚体运动只是沿 z 轴的移动 z_T(图 1). 如以 $\bar{z}$ 表示局部坐标,则:

$$z=\bar{z}+z_r \tag{3.9}$$

定义一组新的应力参数 $\bar{\beta}$,使其与已有参数 β 的关系为:

$$\underset{\sim}{\beta}=\underset{\sim}{L}\bar{\beta} \tag{3.10}$$

当阵 $\underset{\sim}{L}$ 满足以下关系时:

$$\bar{\underset{\sim}{P}}(r,\bar{z})\underset{\sim}{L}=P(r,z) \tag{3.11}$$

则单元刚度矩阵 $\underset{\sim}{k}$ 与 z_T 无关,即具有不变性[2]．上式中 $\underset{\sim}{P}(r,z)$ 及 $\bar{\underset{\sim}{P}}(r,\bar{z})$ 分别代表将 z 与 $\bar{z}$ 代入方程(2.3)时,所得到的二个阵.

以上导出的诸应力场均满足不变性要求.

四、数 值 结 果

1. 厚壁筒承受内压力

无限长厚壁筒承受均匀内压力,沿径向取出一条,分别用粗网格 I (二个元,图 2) 及

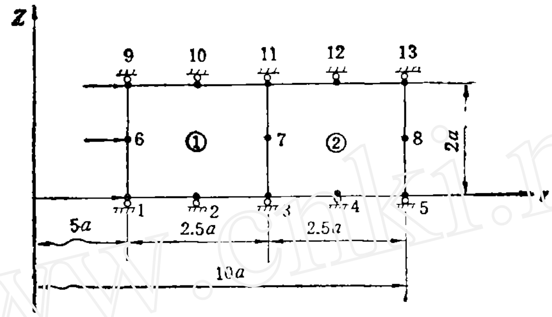

图 2 厚壁筒承受内压力有限元网格(网格 I)

表 2 应力 σ_r 及 σ_θ 沿径向 r 误差百分比

(厚壁筒承受内压力,网格 I,1×2)

Element			A	B	C	D	F	E	Disp.
No. of β's			15	16	17	17	16	21	---
σ_r	Error %	$r=5.528$	−4.05	−4.21	−4.47	−0.74	−0.05	−0.22	0.10
		6.250	−6.99	−7.33	−6.51	−0.55	−0.43	−0.79	−11.71
		6.972	−5.72	−6.00	−6.25	−0.13	−0.07	−0.80	0.11
		8.028	−4.42	−4.59	−6.25	−0.61	−0.07	−0.48	0.10
		8.750	−9.43	−9.88	−8.45	−0.72	−1.94	−1.15	15.35
		9.472	−14.07	−14.76	−21.56	0.01	0.27	0.05	0.13
σ_θ	Error %	$r=5.528$	−14.44	−14.14	−13.59	0.13	−0.34	−0.33	0.29
		6.250	−2.67	2.67	2.97	3.01	−0.06	−0.14	−3.31
		6.972	19.55	19.55	18.71	−0.07	−0.38	−0.45	−0.35
		8.028	−8.10	−8.10	−8.83	0.05	0.10	0.08	0.04
		8.750	1.68	1.68	−1.64	1.20	0.10	−0.09	−0.94
		9.472	10.89	10.89	11.76	0.00	−0.12	−0.15	−0.16

细网格 II(三个元),对表 1 所列的六种元进行了计算.

(A). 网格 I(1 × 2):

计算所得各元沿径向各点的径向应力 σ_r、环向应力 σ_θ、与准确解相比较的误差百分比,列于表 2 内. 元 E、C 及位移元的 σ_r 及 σ_θ 误差沿径向分布如图 3A、3B 所示. 沿径向各节点的径向位移 u_r 与准确解相比的误差百分比,在表 4 上部列出.

可以看出:对于应力 σ_r,元 D、E、F 给出的结果远较其它元准确. 对元内各点(不仅是元的中点),其最大误差绝对值,以上三种元均小于 2%;位移元为 15.4%;元 C 误差最大,高达 21.6%. 如考虑元的边界点在内,则如图 3A 所示,位移元的误差最大,增至 38.4%;元 C 的误差变化比较平缓;元 E 的误差波动最小.

应力 σ_θ,其最大误差绝对值仍然元 E、F 最大,元内各点均小于 0.5%;元 D 及位移元次之,介于 3~3.5%;元 A、B、C 误差均相当大,高峰值接近 20%. 如同时考虑边界点,则位移元及元 C 的误差均有所增加,元 C 的结果仍最不好(图 3B).

对于位移 u_r,由表 4 可见:各种元的误差都不大. 相比较位移元、元 D、E、F 略好

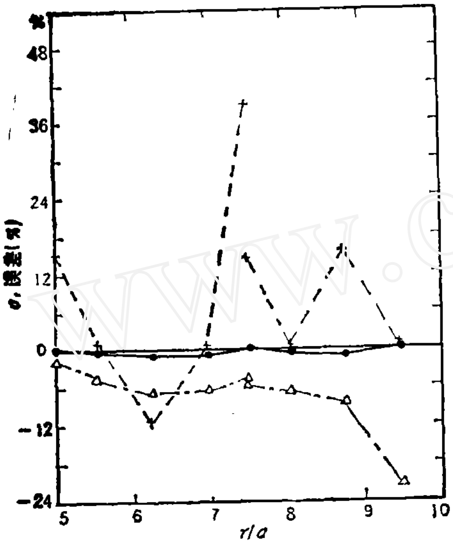

图 3 A　厚壁筒承受内压力——(网格 I，1×2)
应力 σ_r 沿径向变化
——杂交应力元 E－－－杂交应力元 C
---假定位移元

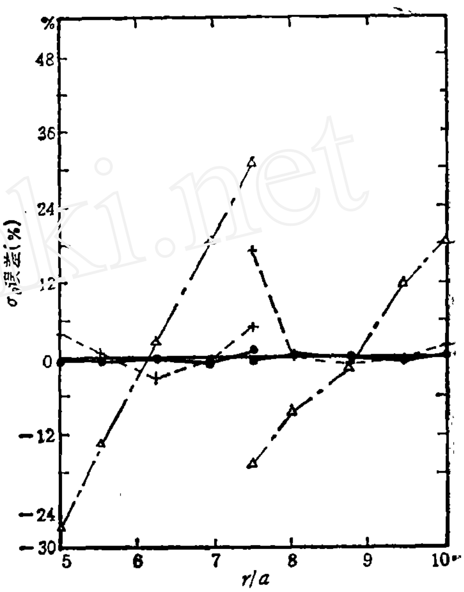

图 3 B　厚壁筒承受内压力——(网格 I，1×2)
应力 σ_θ 沿径向变化
——杂交应力元 E －－－杂交应力元 C
---假定位移元

表 3　应力 σ_r 及 σ_θ 沿径向 r 误差百分比
(厚壁筒承受内压力，网格 II×3)

Element			*A*	*B*	*C*	*D*	*F*	*E*	Disp.
No. of β's			15	16	17	16	16	21	--
σ_r	Error %	$r=5.352$	−1.97	−1.97	−2.07	−0.26	−0.02	−0.11	0.03
		5.833	−3.86	−3.35	−3.32	−0.20	−0.11	−0.26	−5.47
		6.314	−2.44	−2.53	−2.48	0.04	−0.03	−0.23	0.02
		7.019	−0.86	−1.90	−2.62	−0.19	−0.03	−0.06	0.02
		7.500	−3.08	−3.15	−3.44	−0.17	−0.27	0.22	−4.96
		7.981	−2.54	−2.63	−3.77	0.01	−0.04	−0.11	0.02
		8.686	−2.54	−2.62	−3.14	−0.24	−0.01	−0.17	0.03
		9.167	−5.51	−5.71	−5.89	−0.31	−0.53	−0.43	−9.09
		9.648	−8.33	−8.63	−10.60	−0.04	−0.06	−0.19	0.03
σ_θ	Error %	$r=5.352$	−11.14	−11.14	−10.82	0.04	0.17	0.11	0.12
		5.833	1.32	1.32	1.46	1.55	0.02	−0.05	−1.17
		6.314	13.76	13.76	13.61	−0.03	−0.14	−0.17	−0.13
		7.019	−7.48	−7.48	−7.61	0.02	0.04	0.04	0.04
		7.500	0.92	0.92	0.93	0.80	0.02	−0.04	−0.61
		7.981	9.08	9.08	9.27	−0.01	−0.07	−0.07	−0.06
		8.686	−5.14	−5.18	−5.22	−0.01	−0.02	0.01	0.01
		9.167	0.73	0.73	0.75	−0.46	0.00	0.54	−0.35
		9.648	6.35	6.35	6.52	0.00	−0.03	−0.04	−0.04

于元 *A*、*B*、*C*，前四种元最大误差绝对值均小于 0.4%；后三种元介于 2.5～3.5%。

表 4　位移 u_r 沿径向 r 误差百分比
(厚壁筒承受内压力，网格 I 及网格 II)

Mesh I									
Element			A	B	C	D	F	E	Disp.
No. of β's			15	16	17	17	16	21	--
u_r	Error %	$r=5.000$	1.44	1.18	−0.26	−0.39	−0.26	−0.26	−0.13
		6.250	2.50	2.65	3.42	0.16	0.00	0.00	0.00
		7.500	1.41	1.24	0.18	0.00	0.18	0.18	0.00
		8.750	1.54	1.74	1.93	0.00	0.00	−0.19	−0.19
		10.000	1.24	1.24	0.62	0.00	0.00	0.21	0.00
Mesh II									
u_r	Error %	$r=5.000$	0.66	0.52	−0.13	−0.13	−0.13	−0.13	0.00
		5.833	1.19	1.33	1.78	0.15	0.00	0.00	0.00
		6.667	0.65	0.65	0.0	0.00	0.16	0.00	0.00
		7.500	0.88	1.06	1.24	0.00	0.00	0.00	0.00
		8.333	0.56	0.38	0.19	−0.19	−0.19	0.00	−0.19
		9.167	0.79	0.79	0.99	0.00	0.00	0.00	0.00
		10.000	0.62	0.62	0.41	0.00	0.00	0.00	0.00

(B). 网格 II (1 × 3):

算得各元应力 σ_r 及 σ_θ 的误差如表 3 所示. 沿径向各点位移 u_r 的误差列于表 4 下部:

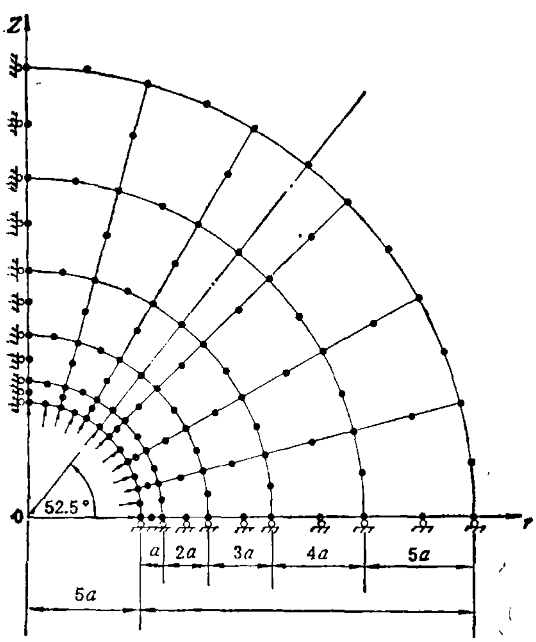

图 4　厚球承受内压力有限元网格 (网格 II, 6 × 5)

可以看出: 对于应力 σ_r，考虑所有元内点及边界点在内，元 D、E、F 给出的结果仍最好，其最大误差绝对值均小于 0.6%；其余的元 A、B、C 中，C 为好；位移元最差；元内至 9.1%，边界处高至 15%；而元 C 较平稳.

对于环向应力 σ_θ，如网格 I 的结果一样，元 E、F 的精度最好；元 D 及位移元次之；A、B、C 误差均相当大.

对径向位移 u_r，由表 4 可见: 当网格由二个元加至三个元时，元 D、E、F 及位移元的最大误差绝对值均小于 0.2%；元 A、B、C 也介于 1～2%，都十分接近准确解.

2. 厚球承受内压力

具有内半径 $5a$ 及外半径 $20a$ 的厚球，承受均布内压力. 分别用粗网格 I (半球分成 9 个元)，及细网格 II (图 4，半球分成 30 个元) 进行计算.

表 5　应力 σ_R 及 σ_T 沿径向误差百分比（$\phi=15^\circ$）
（厚球承受内压力，网格 I 3×3）

Element			A	B	C	D	F	E	Disp.
No. of β's			15	16	17	17	16	21	--
σ_R	Error %	$r=5.634$	−3.44	−1.45	−3.19	1.37	3.39	−0.50	2.63
		6.500	−8.49	−1.47	−5.81	3.77	2.70	0.29	−19.17
		7.366	−10.30	−1.77	−4.77	2.32	0.27	0.53	−2.40
		9.057	−4.04	−1.63	−3.25	1.40	−0.18	−0.17	3.07
		10.500	−8.27	−1.50	−6.58	4.61	−0.45	0.04	−23.06
		11.943	−9.49	−1.38	−4.68	3.87	3.56	0.52	−2.99
		14.479	−3.84	−1.19	−1.17	2.37	−1.34	−0.36	3.34
		16.500	−12.56	−0.90	−10.25	8.55	0.08	−0.57	35.56
		18.521	−28.07	−2.04	−17.96	13.95	12.17	−0.78	8.29
σ_T	Error %	$r=5.634$	−16.92	−10.56	−10.87	−4.56	1.49	−2.86	3.81
		6.500	−20.53	4.06	2.88	5.40	−4.04	3.02	−15.89
		7.366	17.70	16.88	15.66	5.87	−2.13	2.89	−6.68
		9.057	−11.13	−8.32	−9.04	−1.79	−3.72	−1.25	3.88
		10.500	−6.90	2.41	1.57	3.62	−0.44	1.23	−13.80
		11.943	14.82	11.01	11.10	3.73	0.96	0.80	−5.34
		14.479	−5.43	−4.46	−5.47	0.21	−1.44	−1.09	2.69
		16.500	−2.71	0.96	0.86	1.70	1.11	0.63	−6.85
		18.521	7.59	6.89	5.68	2.84	2.59	1.08	−2.21

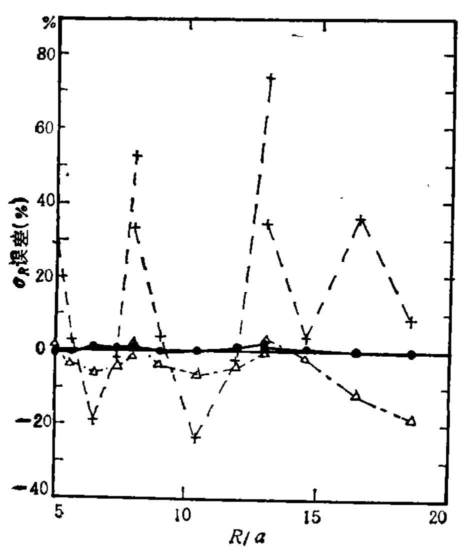

图 5A　厚球承受内压力——(网格 I，3 × 3)
应力 σ_R 沿径向变化（$\phi=15^\circ$）
——杂交应力元E ———杂交应力元 C
---假定位移元

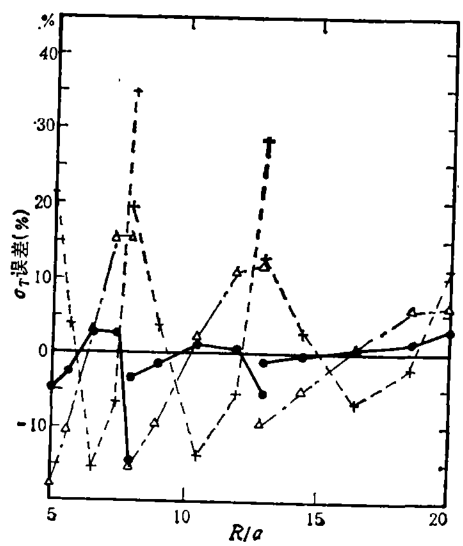

图 5B　厚球承受内压力——(网格 I，3 × 3)
应力 σ_T 沿径向变化($\phi=15^\circ$)
——杂交应力元 E———杂交应力元 C
---假定位移元

(*A*). 网格 I (3 × 3)：

计算所得元内沿径向（$\phi=15^\circ$）各点的径向及切向应力 σ_R、σ_T 的误差，由表 5 给

表 6A 应力 σ_R 沿径向误差百分比（$\phi=52.5°$）
（厚球承受内压力，网格 II 6×5）

	Element		A	B	C	D	F	E	Disp.
	No. of β's		15	16	17	17	16	21	--
σ_R	Error %	$r=5.211$	−0.44	−0.34	−0.35	−0.08	−1.46	−0.15	0.15
		5.500	−1.12	−0.85	−0.67	−0.49	−1.65	−0.08	−2.97
		5.789	−1.04	−0.79	−0.44	−0.55	−0.32	−0.15	−0.20
		6.423	0.13	−0.03	−0.24	0.28	−0.25	−0.27	0.55
		7.000	−0.45	−1.03	−1.14	−0.36	−0.78	−0.47	−7.51
		7.577	0.00	−0.89	−0.90	−0.27	0.27	0.08	−0.59
		8.634	0.02	−0.38	−0.42	0.11	−0.05	−0.26	0.79
		9.500	−0.23	−1.39	−1.58	−0.45	−1.15	−0.72	−9.80
		10.370	0.70	−1.11	−1.34	−0.20	−0.13	0.01	−0.80
		11.850	−0.17	−0.69	−0.66	0.03	0.03	−0.21	0.88
		13.000	0.02	−1.73	−1.95	−0.51	−1.28	−0.83	−11.42
		14.150	1.59	−1.38	−1.63	−0.16	−0.21	0.00	−0.95
		16.060	−0.28	−1.34	−1.20	−0.20	−0.03	−0.33	1.19
		17.500	1.33	−3.18	−3.53	−0.35	−3.22	−1.52	−21.60
		18.940	8.23	−4.17	−5.63	−0.36	−5.95	−1.10	−3.31

表 6B 应力 σ_T 沿径向误差百分比（$\phi=52.5°$）
（厚球承受内压力，网格 II 6×5）

	Element		A	B	C	D	F	E	Disp.
	No. of β's		15	16	17	17	16	21	--
σ_T	Error %	$r=5.211$	−2.26	−1.61	−2.01	0.68	−3.07	−0.08	0.09
		5.500	2.13	1.13	0.30	1.55	−2.96	−0.09	−2.63
		5.789	1.94	1.20	1.64	−1.56	2.13	−0.26	−0.61
		6.423	−3.29	−1.97	−1.62	0.14	−1.18	0.08	1.01
		7.000	3.41	0.69	0.28	1.77	−3.19	−0.23	−5.78
		7.577	2.51	1.06	0.80	−0.97	0.63	−0.56	−1.39
		8.634	−2.59	−1.70	−1.65	0.22	−0.97	0.17	1.34
		9.500	2.59	0.47	0.16	1.54	−2.59	−0.36	−6.21
		10.370	2.31	0.90	0.78	−0.76	0.17	−0.62	−1.48
		11.850	−2.17	−1.49	−1.48	0.16	−0.51	0.14	1.02
		13.000	1.67	0.30	0.06	1.10	−1.96	−0.32	−4.62
		14.150	2.03	0.91	0.81	−0.45	−0.05	−0.48	−1.04
		16.060	−1.61	−1.20	−1.11	−0.07	−0.30	0.07	0.55
		17.500	1.51	0.35	0.25	0.58	−1.61	−0.11	−2.66
		18.940	2.21	1.29	1.17	−0.04	−0.21	−0.21	−0.55

出．同样，元 E、C 及位移元的 σ_R、σ_T 误差沿径向分布，也分别由图 5A 及 5B 给出． 球内边缘径向位移 u_R 的误差，列于表 7 上部．

由表 5 可见，对元内各点应力 σ_R，元 E 产生的误差最小，其最大绝对值为 0.8%；位移元最差，为 35.6%；其余的元中，元 B 较好；剩下各元的排列顺序是：F、D、C 及 A．如考虑元的边界点在内，由图 5A 可见：位移元的误差上升至 73.3%，而元 C 显然波动较小，

表 7　位移 u_R 沿径向误差百分比（厚球承受内压力，网格 I 及网格 II）

Mesh I

Element			*A*	*B*	*C*	*D*	*F*	*E*	Disp.
No. of β's			15	16	17	17	16	21	--
u_R	Error %	$\theta=$ 0°	−49.55	−21.32	−2.40	−26.43	0.00	−12.61	−0.60
		15°	28.83	15.02	4.50	−15.32	0.60	7.51	−0.90
		30°	−29.13	−18.32	−2.40	−22.22	−1.80	−9.61	−0.90
		45°	16.52	10.86	3.90	11.11	9.61	4.20	−1.20
		60°	−16.82	−14.11	−5.41	−15.62	−22.52	−7.21	−0.90
		75°	15.02	6.61	3.30	6.91	13.21	3.60	−2.10
		90°	55.66	−14.71	−20.42	−24.92	−39.04	−21.92	−4.50

Mesh II

Element			*A*	B	C	D	F	E	Disp.
No. of β's			15	16	17	17	16	21	--
u_R	Error %	$\theta=$ 0°	−6.91	−2.70	0.00	−4.20	0.00	−0.90	0.00
		15°	−5.41	−3.00	0.00	−3.90	0.30	−0.90	0.00
		30°	−3.91	−2.10	0.00	−3.30	0.00	−0.30	−0.30
		45°	−2.40	−1.50	−0.30	−2.10	−3.30	−0.30	−0.30
		60°	−1.80	−1.20	−0.30	−1.50	−4.20	−0.30	0.00
		75°	−2.10	−1.20	−0.90	−1.20	−3.30	−0.30	−0.30
		90°	−6.31	−3.00	−2.40	−2.70	−5.41	−1.20	−0.60

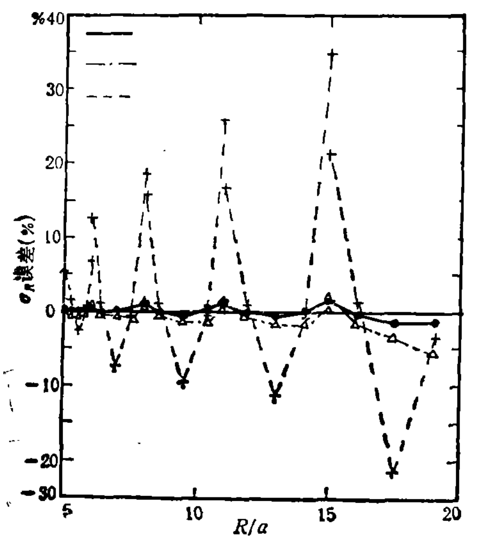

图 6A　厚球承受内压力——（网格 II，6 × 5）
应力 σ_R 沿径向变化（$\phi=52.5°$）
——杂交应力元 E —·—杂交应力元 C
---假定位移元

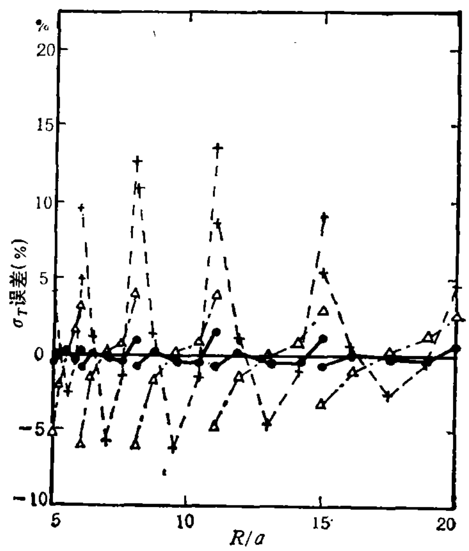

图 6B　厚球承受内压力——（网格 II，6 × 5）
应力 σ_T 沿径向变化（$\phi=52.5°$）
——杂交应力元 E —·—杂交应力元 C
---假定位移元

元 E 基本平稳.

至于切向应力 σ_T，如表 5 下部所示，元 E、F、D 仍给出好的结果；元 C、B 次方；元 A 最差. 位移元的结果也不好，由图 5B 可见，其在边界点处的误差相当大，最大值高达 34.6%.

(B). 网格 II (6×5):

元内沿径向 ($\phi = 52.5°$) 各点应力 σ_R 及 σ_T 的误差分别由表 6A、6B 给出. 元 E、C 及位移元的误差沿径向分布也分别绘于图 6A 与 6B 中. 球内边缘各点径向位移 u_R 的误差列于表 7 下部.

对于应力 σ_R，表 6A 的结果表明：所有给出的杂交应力元 $A \sim F$，当网格加密时，σ_R 精度的提高均较位移元快. 正如表 6A 及图 6A 所示，这时元 E、D 仍给出最好结果，最大误差绝对值小于 1.6%；元 B 稍差，为 4.2%；元 C、F、A 次之，均不超过 8.5%；位移元最差，它在元内及边界上均给出的误差最大，其绝对值分别为 21.6% 及 34.6%.

在细网格 II 时，所有杂交应力元中应力 σ_T 精度的提高也较位移元快. 由表 6B 可见，此时元 A 的误差已与网格 I 不同，较位移元小了. 最好的元 E 这时误差最大值已降至 -0.6%；元 D、B、C 次方，介于 $\pm 2\%$ 左右；位移元仍给出最低的精度，其在元内点的最大误差为 -6.2%，在边界点上高至 13.4%(图 6B).

用以上两种网格计算所得径向位移 u_R，由表 7 可见：在网格 I 中，位移元给出的精度远比杂交应力元好，其中元 A 最差；但位移元的这种优势到网格 II 时已不明显，这时杂交应力元的位移收敛很快，精度都迅速提高：元 E 位移的最大误差已降至 -1.2%，十分接近位移元对应值 -0.6%；元 D、C、B 的误差绝对值也均小于 4.2%.

总之，由以上二个算例可以看出：就应力及位移而言，这些元中，元 E 给出了相对最精确的应力分布，在较细网格时，也给出了与位移元十分接近的准确位移值；元 D 次之. 对厚壁筒的应力 σ_r，及厚球的应力 σ_R 与 σ_T (网格较细时) 的结果表明：位移元的精度最差；他们排列的大致顺序是：E、D、B、F、C、A 及位移元. 只在厚壁筒的应力 σ_θ 计算时，位移元给出的精度较元 A、B、C 好一些，与元 D 结果相近，但仍较元 E、F 差.

五、小　结

用两类方法，导出了六种八节点轴对称实体迴转杂交应力元. 它们都准确满足平衡方程、不具有多余的零能模式、并且单元刚度矩阵具有不变性.

对于给出不仅元内中点的应力值、而且给出应力分布方面，计算结果表明，现导出的杂交应力八节点轴对称元，远较传统的假定位移八节点轴对称元准确；并且当网格较密时，也给出了与假定位移元十分接近的准确位移值.

用第二类方法导出的应力场(元 D、E、F)，即：诸应力分量开始均表示为相同的多项式，利用平衡方程或协调方程消去一些应力参数，并在检查零能模式及不变性时，对有关项进行必要的调整. 这样得到的应力场，从目前研究结果表明，往往比开始选择应力、应变分量一一对应，再调整参数以同时满足以上三方面的要求，所得的应力场更为合理.

正如我们已作过的四节点轴对称元的结果一样[3]，具有扫除多余零能模式所需最少 β 数的应力场(元 A)常常并不一定是较好的应力场.

参 考 文 献

[1] Spilker, R. L. and Pian, T. H. H. A study of axisymmetric solid of revolution elements based on the assumed-stress hybrid model, *Computers and Structures*, 9, (1978), 273—279.

[2] Spilker, R. L. Improved hybrid stress exisymmetric element including behavior of nearly incompressible materials, *Int. J. Num. Engng.*, 17, (1981), 483—501.

[3] Tian, Z. S. and Pian, T. H. H. Axisymmetric solid elements by a rational hybrid stress method, *Computers and Structures*, 20, (1985), 141—149.

[4] Pian T. H. H. and Sumihara, K. Rational approch for assumed stress finite element, *Int. J. Moth. Engng.*, 20, (1984), 1685—1695.

[5] Pian, T. H. H. Derivation of element stiffness metrices by assumed stress distributions, *AIAA J.* 2, (1964), 1333—1336.

[6] Pian T. H. H. and Chen, D. P., On the suppression of zero enersy deformation modes, *Int. J. Num. Meth. Engng*, 19, (1983), 1741—1752.

AXISYMMETRIC SOLID-OF-REVOLUTION ELEMENTS BASED ON THE ASSUMED-STRESS HYBRID MODEL

Tian Zongshu

(Graduate School, Academia Sinica)

Abstract A series of axisymmetric solid-of-revolution elements with 8-node and quadrilateral cross section have been developed based on the assumed-stress hybrid model. A quadratic boundary displacement assumption is employed for each element and a variety of interior stress assumptions have been made. Two different kinds of method used for developing stress field have been studied. Example problems of a thick cylinder under internal pressure and a thick sphere under internal pressure are utilized to evaluate the various elements, and a desirable stress assumption has been identified. Comparions of present results with those obtained by the use of 8-node element based on the assumed displacement model indicate that this hybrid stress element is far superior in predicting the stress distribution.

Key words axisymmetric, hybrid stres method, solid-of-revolution element, zero-energy mode, invariance.