

自增强厚壁圆筒的弹塑性应力应变分析

朱务学 查子初

(华东工学院应用力学系)

摘要 本文考虑了材料的应变强化和Bauschinger效应, 导出了自增强厚壁筒应力的解析解. 根据材料实验, 将单轴拉压的应力应变关系作了简化. 对开端口自增强的情况, 本文给出了一个理论修正系数. 本文的理论结果与实验符合较好.

关键词 厚壁筒; 混合强化核型; 应力; 解析解.

1. 引言

厚壁圆筒自增强技术^[1,2], 目前还是以理想弹塑性材料模型为理论基础. 而一般材料, 尤其是高强度钢, 总存在一定的应变强化和明显的Bauschinger效应, 所以理论计算结果与实际差别较大^[3,4]. 许多研究者为解决此问题做了很多工作. 现在用的较多的方法是采用经验修正系数来考虑Bauschinger效应的影响^[5,6,7,8], 或采用数值法来计算自增强厚壁筒的残余应力^[5,6,7,8], 但计算繁琐, 得到的数值结果不利于推广应用. 文[9]考虑了实际材料的性能, 导出了一个残余应力的计算公式. 但所作的假设过于简化, 得到的公式比较繁杂, 应用起来也不大方便. 因此建立更接近于实际材料的模型, 导出比较简单的残余应力计算公式, 同时顾及到应用的方便, 具有很重要的实际意义.

本文采用更接近于实际材料的混合强化模型, 通过理论分析和推导, 得到了厚壁筒自增强过程中加压应力、卸压应力及残余应力的解析表达式, 且形式简单, 便于分析和应用. 与实验结果比较表明, 理论与实际符合较好.

2. 理论模型

混合强化模型是等向强化和运动强化的组合^[10], 它构成了更一般的模型, 能较好地反映实际情形, 其数学表达式为

$$f(s_{ij} - \alpha_{ij}) = F(q) \quad (1)$$

式中 α_{ij} 代表屈服面中心的平移, 它依赖于塑性变形量. 参数 q 为单元所经历的塑性变形量的累积

$$q = \int d\epsilon^p = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p \quad (2)$$

F 是与材料有关的函数, 与变形历史有关. 取 f 为Mises屈服函数, 则(1)式成为

$$\sqrt{\frac{3}{2}} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) = F(q) \quad (3)$$

一般自增强厚壁筒是广义平面应变问题. 由于受到约束, 轴向塑性变形较小, 所以在计

本文于1984年12月21日收到.

算中略去 $\epsilon_{z,p}$, 得

$$\epsilon_{z,p} = 0, \quad \epsilon_{r,p} = -\epsilon_{\theta,p} \quad (4)$$

由于 α_{ij} 只依赖于 ϵ_{ij}^p , 所以有

$$\alpha_z = 0, \quad \alpha_r = -\alpha_{\theta} \quad (5)$$

从而可堆得

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_{\theta}) \quad (6)$$

上式对闭端条件较为准确, 且对其端面合力条件精确满足, 但对开端条件精确性差一些.

经推导, (1) 式可化为

$$f\left[\frac{1}{2}(\sigma_{\theta} - \sigma_r) - \alpha_{\theta}(\epsilon_{\theta,p}), 0, -\frac{1}{2}(\sigma_{\theta} - \sigma_r) + \alpha_{\theta}(\epsilon_{\theta,p})\right] = F\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \int |d\epsilon_{\theta,p}|\right) \quad (7)$$

上式中的函数关系可通过以下材料试验模拟得到. 由纯扭试验可得剪应力与塑性剪应变的关系为

$$\tau = g_1(\gamma_p) \quad (8)$$

另, 纯扭状态应满足 (1) 式; 所以得

$$f\left[\tau - \alpha\left(\frac{1}{2}\gamma_p\right), 0, -\tau + \alpha\left(\frac{1}{2}\gamma_p\right)\right] = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \int |d\gamma_p|\right) \quad (9)$$

比较 (7) 式和 (9) 式可知, 只要将 $\frac{1}{2}(\sigma_{\theta} - \sigma_r)$, $2\epsilon_{\theta,p}$ 分别与 τ , γ_p 相对应, 则两式在形式上完全一致. 所以 $\frac{1}{2}(\sigma_{\theta} - \sigma_r)$ 与 $2\epsilon_{\theta,p}$ 的关系就可采用 (8) 的函数关系

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\theta} - \sigma_r) = g_1(2\epsilon_{\theta,p}) \quad (10)$$

上式即可作为计算自增强厚壁筒内应力应变的重要关系式, g_1 函数由纯扭转试验得到.

将文 (6) 的实验结果与本文实验结果相比较, 可见材料的单轴拉压试验曲线与纯扭转试验曲线在形式上非常相似. 由于材料单轴拉压试验易于实现, 在实际中便于应用, 所以本文考虑以单轴拉压试验近似代替纯扭试验. 由单轴拉压试验得单轴应力与单轴塑性应变的关系为

$$\sigma = g(\epsilon_p) \quad (11)$$

纯扭和单轴拉压两者的应力强度分别为 $\sqrt{3}\tau$, σ , 等效塑性应变为 $\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_p$, ϵ_p . 根据应力强度和等效塑性应变的对应关系, 由 (8) 和 (11) 得

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right) \quad (12)$$

所以 (10) 式可化为

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon_{\theta,p}\right) \quad (13)$$

图 1 是一根试样的单轴拉压试验曲线及简化图. 对拉伸塑性段, 应力应变关系采用线性

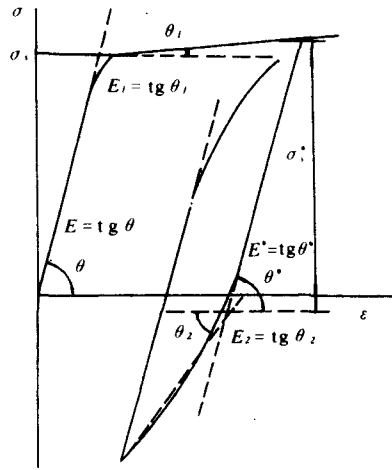


图 1

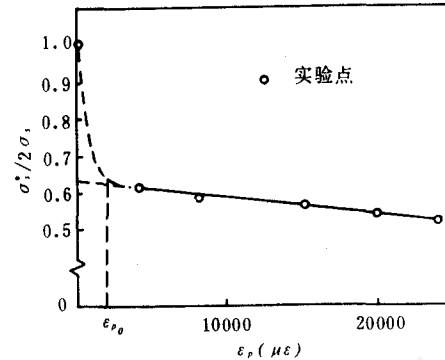


图 2 屈服圆半径的变化曲线

近似

$$\sigma = \sigma_s + H \epsilon_p \quad (14)$$

反向压缩时, 其反向屈服阶段也采用线性近似

$$\sigma^* = \sigma_s^* + H^* \epsilon_p^* \quad (15)$$

其中 $H = E_1 / (1 - E_1/E)$, $H^* = E_2 / (1 - E_2/E)$, σ_s^* 、 ϵ_p^* 分别表示由卸载和反向加载而引起的单轴应力和单轴塑性应变的减少量, σ_s^* 是屈服圆直径, 它随拉伸塑性变形量的不同而改变. 根据文[12]的实验曲线及本文的实验结果 (见图2), 对 σ_s^* 采用如下近似表达式

$$\sigma_s^* = \begin{cases} \sigma_s^*(\epsilon_p) & \epsilon_p < \epsilon_{p0} \\ 2(\sigma_{s0} - H_2 \epsilon_p) & \epsilon_p \geq \epsilon_{p0} \end{cases} \quad (16)$$

上式实际上是对 $\epsilon_p \geq \epsilon_{p0}$ 段作线性拟合, ϵ_{p0} 一般较小. σ_{s0}/σ_s 是此拟合直线在纵轴的截距. 设拉伸终了时应力应变为 σ' 、 ϵ' , 在 $\epsilon_p' \geq \epsilon_{p0}$ 的情况下, (15) 式化为

$$\sigma^* = 2(\sigma_{s0} - H_2 \epsilon_p') + H^* \epsilon_p^* \quad (17)$$

由 (13)、(14) 及 (17) 式得圆筒的应力应变在加压塑性区内满足

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s + \frac{4}{3} H \epsilon_{\theta p} \quad (18)$$

在反向屈服区内满足

$$\sigma_\theta^* - \sigma_r^* = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_{s0} - \frac{8}{3} H_2 \epsilon_{\theta p}' + \frac{4}{3} H^* \epsilon_{\theta p}^* \quad (19)$$

式中 $\epsilon_{\theta p}'$ 对应于加压终了时筒壁内的切向塑性应变, σ_θ^* 、 σ_r^* 和 $\epsilon_{\theta p}^*$ 表示由于卸压筒壁内的切向应力、径向应力和切向塑性应变的减少量. (19) 式只有当 $\frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_{\theta p}' \Big|_{r=b^*} \geq \epsilon_{p0}$ 时才有效, 其中 b^* 是反向屈服区半径. (18)、(19) 分别是计算加压塑性区内和卸压反向屈服区内应力应变的重要关系式.

3. 公式推导

设厚壁筒内半径为 R_1 , 外半径为 R_2 . 加压时屈服区由内向外扩展, 屈服区半径为 b . 在屈服区内平衡方程和协调方程必须得到满足

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (20)$$

$$r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} = \epsilon_r - \epsilon_\theta \quad (21)$$

弹性应变分量和应力满足广义虎克定律. 取轴向应力与弹性状态时相同, 即: $\sigma_z = k(\sigma_\theta + \sigma_r)$, 对开端条件、闭端条件和平面应变、 k 的取值分别为0、1/2 和 μ , 则有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{re} &= \beta_1 \sigma_r - \beta_2 \sigma_\theta \\ \epsilon_{\theta e} &= \beta_1 \sigma_\theta - \beta_2 \sigma_r \\ \beta_1 &= \frac{1-k\mu}{E}, \quad \beta_2 = \frac{\mu(1+k)}{E} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

应变分量满足下面的关系

$$\epsilon_\theta = \epsilon_{\theta e} + \epsilon_{\theta p}, \quad \epsilon_r = \epsilon_{re} - \epsilon_{\theta p} \quad (23)$$

联解(18)、(20)、(21)、(22) 和(23) 式, 再结合塑性区边界条件得加压塑性区内应力、塑性应变解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} \\ p &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \ln \frac{b}{R_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_1^2} - 1 \right) \right\} \\ \epsilon_{\theta p} &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3} E} \frac{1-k\mu}{(1+\alpha_1)} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中 $\alpha_1 = \frac{4}{3} H \cdot \frac{1-k\mu}{E}$ 利用(21)、(22) 式可求得其它应变分量. 上式当 $\alpha_1 = 0$ 时, 即与用理想弹塑性模型解得的结果一致.

对卸压情况, 由于一般材料的 Baushinger 效应比较显著, 所以自增强厚壁筒的反向屈服情形是普遍的. 设当内压减小值为 p^* 时, 反向屈服区半径为 b^* . 由于实际中过应变量大, 而反向屈服区较小, 所以一般都能满足 $\frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon'_{\theta p} \Big|_{r=b^*} \geq \epsilon_{p0}$. 将(24) 式中的 $\epsilon_{\theta p}$ 作为 $\epsilon'_{\theta p}$ 代入到(19)

中, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^* - \sigma_r^* &= \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_s \left\{ t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \right\} + \frac{4H^*}{3} \epsilon_{\theta p}^* \\ t &= \sigma_{s0} / \sigma_s, \quad \alpha_2 = \frac{4H_2}{3} \frac{1-k\mu}{E} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

同样 σ_{ij}^* 、 ϵ_{ij}^* 满足平衡方程、协调方程以及 ϵ'_{ij} 、 σ'_{ij} 满足广义虎克定律. 与上面一样的推导得反向屈服区内卸压应力和塑性应变的解答为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r^* &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{2[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \ln \frac{r}{b^*} - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \left(1 - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) - \frac{t(1+\alpha_1)+\alpha_2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \right] \left(1 - \frac{b^{*2}}{r^2} \right) \right\} \\
 \sigma_\theta^* &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{2[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(1 + \ln \frac{r}{b^*} \right) - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \left(1 - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) - \frac{t(1+\alpha_1)+\alpha_2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \right] \left(1 + \frac{b^{*2}}{r^2} \right) \right\} \\
 p^* &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{2[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \ln \frac{b^*}{R_1} + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \left(1 - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} + 1 \right) - \frac{t(1+\alpha_1)+\alpha_2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \right] \left(\frac{b^{*2}}{R_1^2} - 1 \right) \right\} \\
 \varepsilon_{\theta p}^* &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}E} \frac{2(1-k\mu)[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(\frac{b^{*2}}{r^2} - 1 \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中 $\alpha_3 = \frac{4H^*}{3} \cdot \frac{1-k\mu}{E}$. 卸压终了后, $p^* = p'$, 所以由 (24)、(26) 两式得卸压终了后反向屈服区半径 b^* 与加压终了的塑性区半径 b 的关系

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{1+\alpha_1} \ln \frac{b}{R_1} + \frac{2[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \ln \frac{b^*}{R_1} &= -\left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \left(\frac{b^{*2}}{R_1^2} - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right) \\
 &\quad + \frac{t(1+\alpha_1)+\alpha_2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(\frac{b^{*2}}{R_1^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_1^2} - 1 \right) \quad (27)
 \end{aligned}$$

圆筒自增强处理后的残余应力由加压应力和卸压应力两者之差求出

$$\sigma_r^R = \begin{cases} \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \ln \frac{r}{b} - \frac{2[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \ln \frac{r}{b^*} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \right. \\ \quad \left. \cdot \left(1 - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) - \frac{t(1+\alpha_1)+\alpha_2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \right] \left(1 - \frac{b^{*2}}{r^2} \right) \right\} & R_1 \leq r \leq b^* \\ \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \ln \frac{r}{b} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right. \\ \quad \left. \cdot \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right) \right\} & b^* \leq r \leq b \\ \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ -\frac{b^2}{2R_2^2} + \frac{b^{*2}}{R_2^2} \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \right\} \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right) & b \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right) - \frac{2[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(1 + \ln \frac{r}{b^*} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2} \right) + \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1 \right) \right] \left(1 - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} + 1 \right) \right] \left(\frac{b^{*2}}{r^2} - 1 \right) \right\} \right.$$

$$\sigma_{\theta}^R = \begin{cases} -\frac{t(1+\alpha_1)+\alpha_2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(1 + \frac{b^{*2}}{r^2}\right) & R_1 \leq r \leq b^* \\ \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+\alpha_1} \left(1 + \ln \frac{r}{b}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{R_2^2}\right) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1\right) \right] \frac{b^{*2}}{R_2^2} \left(\frac{R_2^2}{r^2} + 1\right) \right\} & b^* \leq r \leq b \\ \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{b^2}{2R_2^2} - \frac{b^{*2}}{R_2^2} \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1\right) \right] \right\} \left(\frac{R_2^2}{r^2} + 1\right) & b \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (29)$$

径化简得残余应力 $(\sigma_{\theta}^R - \sigma_r^R)$ 的表达式如下

$$\sigma_{\theta}^R - \sigma_r^R = \begin{cases} \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - 2t + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) - \frac{2\alpha_3[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(\frac{b^{*2}}{r^2} - 1\right) \right\} & R_1 \leq r \leq b^* \\ \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1\right) \right] \frac{2b^{*2}}{r^2} \right\} & b^* \leq r \leq b \\ \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1+\alpha_1+2\alpha_2}{1+\alpha_1} - \left[t - \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{b^{*2}} - 1\right) \right] \frac{2b^{*2}}{b^2} \right\} \frac{b^2}{r^2} & b \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (30)$$

上式中令 $r = R_1$, 得内表面切向残余应力计算式

$$\sigma_{\theta R_1}^R = \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - 2t - \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{1+\alpha_1} \left(\frac{b^2}{R_1^2} - 1\right) - \frac{2\alpha_3[t(1+\alpha_1)+\alpha_2]}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)} \left(\frac{b^{*2}}{R_1^2} - 1\right) \right\} \quad (31)$$

反向屈服区半径 b^* 的计算可由(27)式用数值计算即可求得。

前面的公式推导中, 由 $\epsilon_{z_p} = 0$ 的假设, 导出了 $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_{\theta})$ 的结果, 此对闭端条件较为准确, 但应用于开端条件时必须进行修正。由于开端条件和闭端条件在弹塑性交界面上的压力相差一个系数^[11]

$$g(b) = 1 \sqrt{1 + \frac{b^4}{3R_2^4}} \quad (32)$$

考虑壁厚比为2的圆筒, $g(b)$ 的值从 $b = R_1$ 时的0.99到 $b = R_2$ 时的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以取 $g(b)$ 在一段区间内的平均值作为修正系数对所得公式进行修正。在实际中, 一般过应变只有70%左右, 所以取

$$\overline{g(b)} = \frac{1}{0.7} \int_1^{1.7} \frac{1}{\sqrt{1 + (1/48)\xi^4}} d\xi = 0.963 \quad (33)$$

作为修正系数, 将此修正系数作用在 σ_s 前, 等效地看作屈服应力 σ_s 降低, 将 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ 乘上0.963

得 $1.11\sigma_s$, 从而将前面得到的所有公式中 $\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}$ 换成 $1.11\sigma_s$, 即可应用于开端条件的情形。

4. 实验

实验分两部分, 第一是材料性能试验, 另一部分是圆筒的自增强试验。试验所用材料为高强度合金钢40CrNi3MoV。

1) 材料性能试验

试验过程是先拉伸后压缩然后再拉伸, 不同的试样其塑性变形量不同. 图3给出了其中两根试样的实验曲线. 曲线的简化及数据处理见图1. 图2是由试验结果得到的材料屈服圆半径关于拉伸塑性变形量的曲线, 由图中可看出 ϵ_{p0} 较小, 能满足实际计算中 $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cdot \epsilon'_{\theta p} |_{r=b^*} \geq \epsilon_{p0}$ 的要求. 数据处理见表1.

此材料的泊松比 $\mu = 0.27$. 由实验结果知材料的卸载弹性模量 E^* 随拉伸变形量的增加而减小, 在残余应力的计算中, 一般不考虑 E^* 的这种变化的影响, 但在计算内压-外切向应变关系时, 必须考虑, 否则将会给计算结果带来较大的误差.

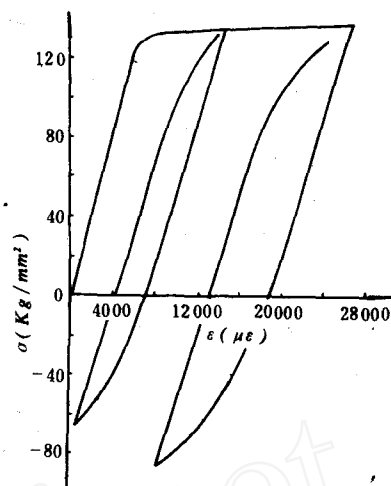
图3 两根试样的 $\sigma-\epsilon$ 曲线

表 1

E	σ_s	E_1	H_1	E_2	H	H^*	σ'_s
2.043×10^4	123	363	572	1×10^4	370	1.959	80.8

2) 圆筒的自增强试验

实验用圆筒的内径为30mm, 外径为60mm, 壁厚比为2, 端面条件为开端, 这样由表2的数据及 $k=0$, 计算得 $\alpha_1 = 0.0246$, $\alpha_2 = 0.0384$, $\alpha_3 = 1.28$, $t = 0.631$. 由本文理论考虑修正后的内压-外切向应变关系为

$$\epsilon_{\theta R_2} = \begin{cases} \frac{p}{E} \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} & p \leq p_e = 1.11\sigma_s \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \\ \frac{1.11\sigma_s}{E} \frac{b^2}{R_2^2} & p_e \leq p \leq p_s \end{cases} \quad (34)$$

$$\epsilon_{\theta R_2}^* = \begin{cases} \beta \frac{p^*}{E} \cdot \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} & p^* \leq p_e^* = 1.11\sigma_s \left[t - \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} \left(\frac{b^2}{R_1^2} - 1 \right) \right] \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \\ \beta \frac{1.11\sigma_s}{E} \left[t - \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} \left(\frac{b^2}{R_1^2} - 1 \right) \right] \frac{2b^{*2}}{R_2^2} & p^* \geq p_s^* \end{cases} \quad (35)$$

上式中 β 是考虑材料 E^* 的变化而引入的, 其值可由圆筒的内压-外切向应变关系的卸压弹性段用(35)的前一式来确定, 实验只是验证(34)和(35)的后一式. 实验过程用外切向应变来控制. 图4-7给出了圆筒的内压和外切向应变关系的测定结果和理论计算结果的比较. 各圆筒的实验参数见表2.

表3列出了外表面切向残余应变的测量值和理论计算及偏差.

实验和理论比较表明两者基本上是符合的.

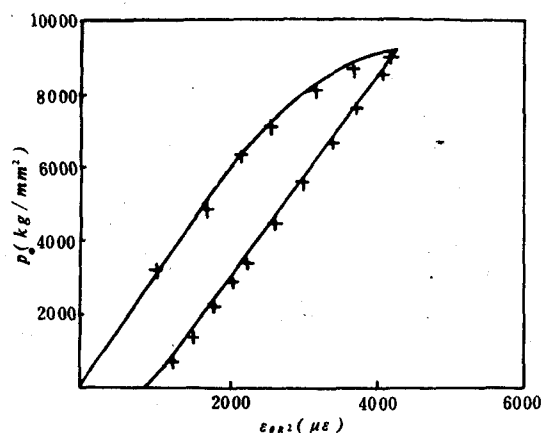


图4 1号筒内压-外表面切向应变的
实测值与理论值的比较
——计算值
++实验值

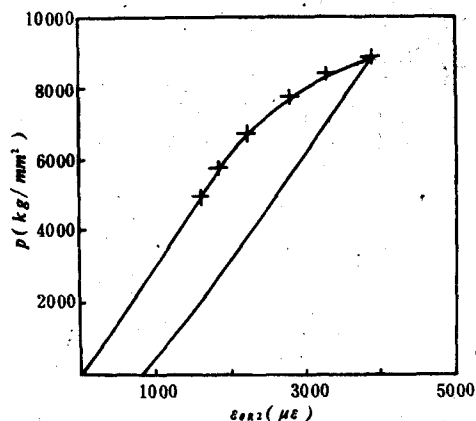


图5 3号筒内压-外表面切向应变的
实测值与理论值比较
——计算值
++实验值

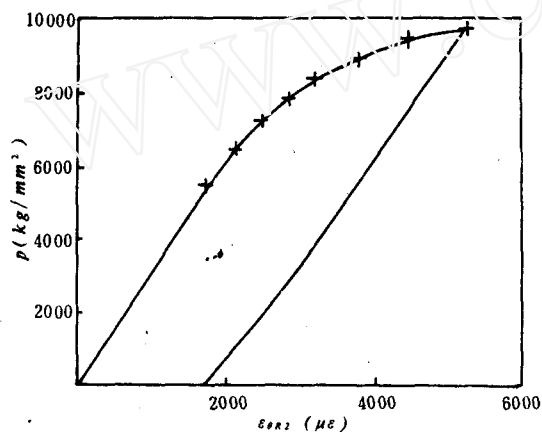


图6 4号筒内压-外表面切向应变的
实测值与理论值的比较
——计算值
++实验值

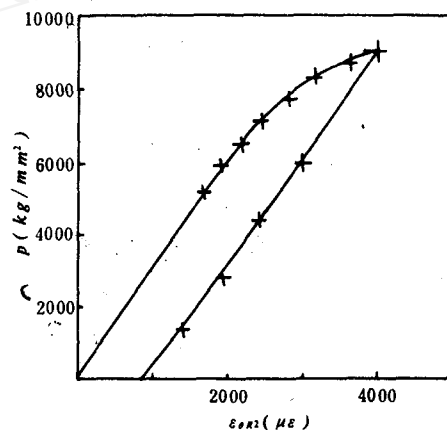


图7 6号筒内压-外表面切向应变的
实测值与理论值的比较
——计算值
++实验值

表2 各圆筒的实验参数

试样号	1	3	4	6
外表面最大切向应变(με)	4239	3922	5240	4020
过应变量(%)	56.1	50.2	73.6	52.1

表3 外表面切向残余应变的
理论值与实验比较

试样号	外表面切向残余应变(με)		偏差
	实验值	理论值	
1	952	931	-2.2%
3	778	784	-0.8%

续表 2 各圆筒的实验参数

试样号	1	3	4	6
最大内压 (kg/cm ²)	实验值 9011	8966	9664	8985
	理论值 9198	8952	9744	9033
	偏差 2.08%	-0.16%	0.83%	0.53%

续表 3 外表面切向残余应变的理论值与实验比较

试样号	外表面切向残余应变($\mu\epsilon$)		偏差
	实验值	理论值	
4	1719	1674	-2.6%
6	830	816	-1.9%

5. 讨论

对壁厚比为 2、开端条件的圆筒, 图 8 给出了圆筒内表面残余应力关于过应变量的曲线

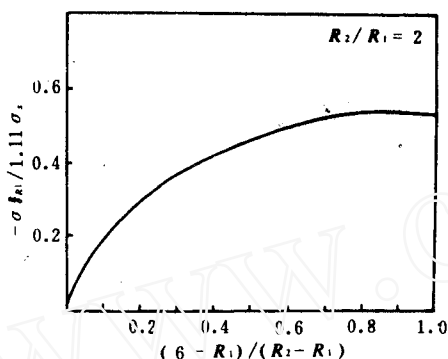


图 8 内表面残余应力关于过应变量的变化曲线

由图中可看出当过应变变量超过 70% 后, 残余应力值就增加不多了, 所以实际中过应变变量达到 70% 就可以了. 图 9 是内表面残余应力关于自增强压力 P 的变化曲线, 并且给出了理想弹塑性材料按 Tresca 屈服条件计算的结果, 当 P 在 $0.6\sigma_s$ 到 $0.7\sigma_s$ 之间时, 两者内表面残余应力的比值在 0.60 到 0.63 之间, 这与实际结论是符合的^[4]. 图 10 给出了筒壁内残余应力 $(\sigma_\theta - \sigma_r)$ 的分布情况, 在形式上它与实际测量的结果^[6,9] 较为一致. 由图 9 和图 10 可看出用理想弹塑性模型计算的结果其误差是比较大的.

在 (27) 式中令 $b^* = R_1$, $R_2/R_1 = 2$, 则可求得壁厚比为 2 的圆筒不产生反向屈服的最大加压过应变量为 13.4%, 此说明在自增强问题中, 反向屈服是普遍存在的, 所以在计算中必

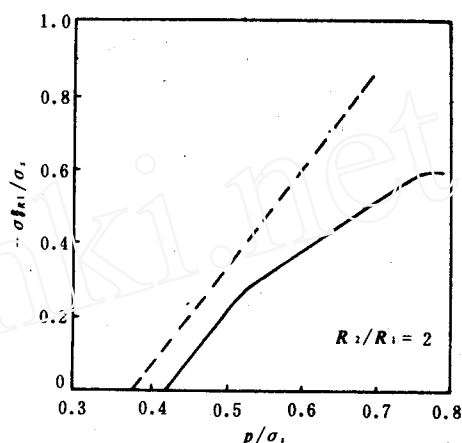


图 9 内表面残余应力关于最大内压 P 的变化曲线
--- 理想弹塑性模型的计算值
—— 本文计算值

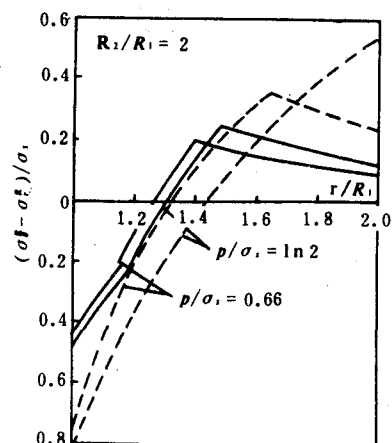


图 10 筒壁内残余应力 σ_θ, σ_r 的分布
—— 本文计算值
--- 理想弹塑性模型的计算值

须考虑它的影响。

同样在(27)式中令 $b^* = R_1$, $b = R_2$, 则可求得 R_2/R_1 的值为1.23, 它说明此种材料的圆筒不产生反向屈服的极限壁厚比为1.23, 此与用理想弹塑性模型求得的 $R_2/R_1 = 2.22$ 结论差别很大。

6. 结论

1) 本文的研究表明, 材料的应变强化和Bauschinger效应对自增强圆筒的残余应力影响较大, 所以计算时必须考虑其影响。

2) 本文提供了一种能反映材料实际性能的厚壁圆筒自增强计算方法。经实验验证, 所得到的圆筒自增强加压和卸压应力公式是正确的。

3) 本文还给出了实际中有用的残余应力计算公式(30)和(31)以及反向屈服区半径计算公式(27), 其形式简单, 便于分析和应用。

4) 由实验知, 材料屈服后卸载弹性模量 E^* 有改变, 本文在计算圆筒残余应力时未考虑此种影响, 这一问题有待进一步的分析和研究。

华东工学院的韩育礼、黄毓秀两同志参加了本文的自增强实验工作, 南京汽轮机厂罗书尚和华东工学院材力实验室的冯思艳、李海文等同志对材料试验给予了大力协助, 在此表示感谢

参 考 文 献

- [1] Nichols, R. W., Pressure Vessel Engineering Technology (1971), 451 - 453.
- [2] 通用机械研究所, 压力容器国外技术进展 (1974), 206 - 266.
- [3] Vincent Milligan, R., The Influence of the Bauschinger Effect in Reverse Yielding of Thick-Walled Cylinders, AD 717248, Oct. (1970).
- [4] 庄德恩, 自紧圆筒实际强度预测计算问题, 中国兵工学会论文选编2(总6期).
- [5] Peterc T. Chen, The Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Thick-Walled Tubes, AD 772 827 (1973).
- [6] Franklin, G. J., Autofrettage of Cylinders, Prediction of Pressure External Expansion Curves and Calculation of Residual Stresses, Proc. Instn. Mech. Engrs., 174, 35 (1960).
- [7] Sidebottom, O. M., Unloading of Thick-Walled Cylinders That Have Been Plastically Deformed, Experimental Mech., 16, 12 (1976).
- [8] 张永昌, 材料非线性混合硬化模型及自紧身管残余应力、应变的计算, 兵工学报, 坦克装甲车辆和发动机分册, 3 (1982).
- [9] 才鸿年, 液压自紧炮身(半精加工)的应力与强度, 兵工学报, 4 (1980).
- [10] Axelsson, K., Finite Element of Elastic-Plastic Materials Displaying Mixed Hardening, Int. J. Num. Mech. Engng., 14 (1979), 211 - 215.
- [11] Hill, R. (王仁译), 塑性数学理论, 科学出版社(1966).
- [12] Milligan R. V., The Bauschinger Effect in A High-Strength Steel, J. Basic Engineering June (1966), 480 - 488.

AN ELASTI-PLASTIC ANALYSIS OF AUTOFRETTAGED THICK-WALLED CYLINDERS

Zhu Wuxue Zha Zichu

(*East China Institute of Technology*)

ABSTRACT Considering the strain hardening and Bauschinger effect of materials, this paper gives the analytical solutions for the problem of autofrettage of thick-walled cylinders by using mixed hardening model. According to the experiments of materials, the uniaxial tension-compression stress-strain relationship is simplified. On the condition of open-end autofrettage, the formulae are modified with a theoretical factor. The theoretical results are in good agreement with the experimental results.

KEY WORDS thick-walled cylinders, mixed hardening model, stress, analytical solutions.