

充满液体的封闭圆柱壳受轴向 冲击塑性失稳的研究

韩锦宝* 杨青春** 王仁*

(*北京大学)

(**机械部北京机电研究所)

提要 本文在理论上和实验上对充满水的封闭圆柱壳,受轴向冲击荷载作用动力塑性失稳进行了研究.其结果与内空圆柱壳^[6]相比:塑性的屈曲波形是以轴对称为主;波数略有减少;第二临界速度值有明显提高.理论计算和实验结果基本一致.

关键词 塑性屈曲;壳体动力稳定性.

一、引言

由于工程上的需要,早在三十年代,Flügge^[1]就用小变形理论研究了静态内压和轴压联合作用下圆柱壳的弹性失稳问题,结果得出内压对失稳临界载荷没有影响.五十年代对该问题从实验和理论方面都做了进一步的研究^[2-4],发现Flügge的结论有很大的局限性.从大变形的理论分析得出:在一定的内压范围内,失稳临界载荷将随内压的增加而提高,只有当内压超过某个值时,失稳临界载荷才为常量,与小变形理论的解一致.实验中还发现由于内压的存在,会使圆柱壳受轴压失稳的菱形波沿周向拉长,轴向变扁,趋于轴对称形式.关于动载问题,最近Barez等^[5]从理论和实验两个方面研究了充满液体的管子,受冲击后,认为流体的粘性对弹性纵波的传播没有影响,并可以忽略径向惯性力,应用薄膜理论能得到满意的结果.文章讨论的失稳问题都是在弹性范围内进行的,而圆柱壳在轴向和内压联合作用下的塑性失稳(无论是动载还是静载)则未见到有文章发表.

结合实际工程问题,作者在文[6]工作的基础上,对充满液体的封闭圆柱壳在轴向冲击荷载下的塑性失稳问题从理论和实验两个方面进行了探讨,其结果得出:文[6]中提出的第二失稳临界速度的概念和理论判据可以用于有内压的冲击塑性失稳中.由于内压的存在与无内压时相比较,轴向失稳半波数略有减少;第二失稳临界速度提高,大塑性失稳形式以轴对称失稳形式为主.

二、理论分析

受轴向冲击荷载作用的充满液体的封闭圆柱壳如图1所示.在理论分析中采用如下几个假定:

1. 壳体材料取刚塑性线性强化模型,即:

$$\sigma = \sigma_0 + E_h \epsilon$$

本文于1986年1月27日收到.

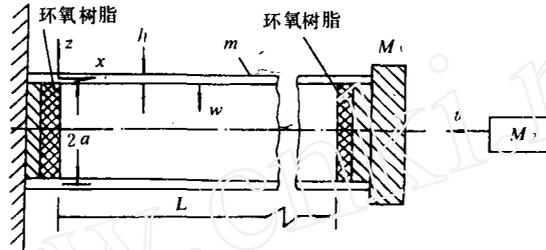


图 1

其中: σ_0 ——屈服应力.
 σ 和 ϵ 分别为有效应力和有效应变.
 E_n ——强化模量.

$$(\sigma)^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_0 - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$$

$$(\epsilon)^2 = 2/3 (\epsilon_x^2 + \epsilon_r^2 + \epsilon_z^2)$$

- 壳体在冲击速度 v 小于第二失稳临界速度 v_{c2} 时的失稳变形满足小变形理论及平截面假定.
- 液体是理想不可压缩的, 其轴向运动与壳体运动相同, 略去液体中径向惯性项.
- 不考虑应力波的效应.

1. 应力应变:

当撞击速度 v 在 $v_{c1} < v < v_{c2}$ 范围中, 壳体的屈曲模态看成是在均匀的基本运动上发展起来的扰动运动, 取文〔7〕类似的应变率形式 (参照图 1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\frac{v_0}{L} + z\dot{w}'' \\ \dot{\epsilon}_r &= -\left[\frac{\dot{w}_1}{a} + \frac{\dot{w}}{a}\right] \left(1 - \frac{z}{a}\right) \\ \dot{\epsilon}_z &= -(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_r) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: a ——中面半径; L ——壳体长度.

w_1, w 分别为基本运动和扰动运动的中面径向位移 (向内为正).

v_0 ——撞击瞬时壳体的被冲击端的轴向速度.

加撇 “'” 表示关于 x 求导.

加点 “·” 表示对时间 t 求导.

扰动前, 基本运动 ($\dot{w} = 0$), 则 (1) 式为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\frac{v_0}{L} \\ \dot{\epsilon}_r &= -\frac{\dot{w}_1}{a} \left(1 - \frac{z}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_z = -(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_\theta) \quad \Bigg\}$$

因为壳体的内腔体积在变形过程中假设保持不变, 则有

$$\pi \left[\left(a - \frac{h}{2} \right) - w_1 \right]^2 (L - v_0 t) = \pi \left(a - \frac{h}{2} \right)^2 L$$

$$w_1 = -\frac{a}{2} \frac{v_0}{L} t \left(1 + \frac{v_0}{L} t \right) \left(1 - \frac{h}{2a} \right)$$

故
$$\dot{w}_1 = -\frac{a}{2} \frac{v_0}{L} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t \right) \left(1 - \frac{h}{2a} \right) \quad (3)$$

由假设 3, 则流体轴向速度分布为 $v_x = -\frac{v_0}{L} x$; 并设流体径向速度沿 r 方向线性分布: 即

$r = 0, v_r = 0; r = a - \frac{h}{2}, v_r = \dot{w}_1$. 计算出 $t = 0$ 时刻各部分的动能, 当略去二阶小量时, 撞

击瞬时系统的能量关系是:

$$\frac{1}{2} M_2 v^2 = \frac{1}{2} (M_2 + M_1) v_0^2 + \frac{1}{6} (m + m_F) v_0^2 + \frac{1}{16} \frac{a^2}{L^2} (2m + m_F) \left(1 - \frac{h}{a} \right) v_0^2$$

$$v_0 \doteq \beta v \sqrt{\frac{M_2}{M_1 + M_2 + (m + m_F)/3}} \quad (4)$$

式中:

β ——速度恢复系数, M_1 ——壳端垫块对壳体产生的附加质量;

M_2 ——子弹的质量, m ——壳体质量, m_F ——液体的质量, h ——壳体的厚度.

扰动前壳体的运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{\theta_0}) - \frac{\sigma_{\theta_0}}{r} + \rho \dot{w}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{x_0}}{\partial x} - \rho \ddot{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

理想流体运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho_F \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_F \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因为设 $v_x = \dot{u} = \frac{x}{L} V_0$, 又 $\dot{w}_1 \ll \dot{u}$, 故不考虑流体的径向惯性项, 则上式可得:

$$p = p(t) \quad (7)$$

设 σ_{θ_0} 沿壳壁线性分布, 为
$$\sigma_{\theta_0} = \sigma_z = -\frac{p(t)}{h} \left(\frac{h}{2} - z \right) \quad (8)$$

由于壳体满足 Levy-Mises 增量理论, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_0} &= \lambda (2 \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_\theta) + \sigma_{\theta_0} \\ \sigma_{\theta_0} &= \lambda (2 \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_x) + \sigma_{x_0} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\epsilon} \quad]$$

将(3),(8)式代入(5)式,并借用(9)的第二式,可得

$$\frac{\partial \sigma_{\theta_1}}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta_1} - \sigma_{z_1}}{r} + \rho \ddot{w}_1 = 0$$

即

$$\frac{p(t)}{h} = \frac{\lambda(2\epsilon_0 + \epsilon_1)}{r} \rho \ddot{w}_1 \quad (10)$$

再将(3)式代入(2)式,略去小量,得

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{L}{v_0} \sigma$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}$, $r = a + z$, (10)式可写成:

$$\frac{\sigma - \sigma_z}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \ddot{w}_1 = 0$$

由(3),(8),(9)式得到:

$$p = \frac{h}{a} \left[\frac{2}{3} \sigma \left(2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} - \frac{h}{a} \frac{v_0}{L} t \right) + \rho \frac{a^2}{L^2} \left(1 - \frac{h}{2a} \right) v_0^2 \right] \quad (11)$$

将上式代入(8)式可得 σ_{z_1} , 再将 σ_{z_1} 代入(9)式, 则

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_1} &= -\frac{2}{3} \sigma \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{v_0}{L} t + \frac{1}{4} \frac{h}{a} \right) + \frac{z}{2a} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) \right] + \sigma_{z_1} \\ \sigma_{\theta_0} &= \frac{2}{3} \sigma \left[\left(2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} - \frac{h}{a} \frac{v_0}{L} t \right) - \frac{z}{a} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) \right] + \sigma_{z_1} \\ \sigma_{z_1} &= -\frac{1}{a} \left(\frac{h}{2} - z \right) \left[\frac{2}{3} \sigma \left(2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} - \frac{h}{a} \frac{v_0}{L} t \right) + \rho \frac{a^2}{L^2} \left(1 - \frac{h}{2a} \right) v_0^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

将(2)式对 t 积分,可求出三个应变分量,代入应变比能计算式:

$$E = \sigma_{\theta_0} \epsilon_{\theta_0} + \sigma_{\theta_1} \epsilon_{\theta_1} + \sigma_{z_1} \epsilon_z \quad (13)$$

当保留一阶小量得到

$$E = \frac{v_0}{L} t \sigma$$

假定系统的初始动能全部转换成壳体的内能,取 σ 的平均力 $\sigma = \alpha_0 + \frac{1}{2} E_h \epsilon \doteq \alpha_0 + \frac{1}{2} E_h \frac{v_0}{L} t_f$,

对上式整个壳体进行积分, 则有

$$\frac{1}{2} M_2 v^2 = \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} E_h T \right) T \frac{m}{\rho}$$

可得: $(T \equiv \frac{v_0}{L} t_f)$

$$T = -\frac{\alpha_0}{E_h} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{E_h} \right)^2 + \frac{M_2 v^2 \rho}{m E_h}} \quad (14)$$

T 可以作为壳体失稳轴向缩短的近似计算式.

扰动后:

将(3)式代入(1)式, 得出壳体扰动后的应变率表达式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\frac{v_0}{L} + z \dot{w}'' \\ \dot{\epsilon}_y &= \left[\frac{1}{2} \frac{v_0}{L} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) - \frac{\dot{w}}{a} \right] \left(1 - \frac{z}{a} \right) \\ \dot{\epsilon}_z &= -(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

对上式积分, 并考虑到初始条件 $w|_{t=0} = \bar{w}$

则得:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{v_0}{L} t + z (w - \bar{w})'' \\ \epsilon_y &= \left[\frac{1}{2} \frac{v_0}{L} t \left(1 + \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) - \frac{w - \bar{w}}{a} \right] \left(1 - \frac{z}{a} \right) \\ \epsilon_z &= -(\epsilon_x + \epsilon_y) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

此时: $\dot{\epsilon} = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z)$ 利用(15)式得:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{v_0}{L} - \frac{2}{3} \left\{ z \dot{w}'' \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{v_0}{L} t + \frac{h}{4a} \right) + \frac{z}{2a} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{w}}{a} \left[\left(2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) - \frac{z}{a} \left(1 + 4 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{a} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

利用(16)式得:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{v_0}{L} t - \frac{2}{3} \left\{ z (w - \bar{w})'' \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{v_0}{L} t + \frac{h}{4a} \right) + \frac{z}{2a} \left(1 + \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{w - \bar{w}}{a} \left[\left(\frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) - \frac{z}{a} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{a} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

根据(9)式, 扰动后的应力为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{3} \frac{L}{v_0} \sigma \left\{ \frac{v_0}{L} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{v_0}{L} t + \frac{h}{4a} \right) + \frac{z}{2a} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - z \dot{w}'' \left[\left(\frac{1}{2} + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) - \frac{z}{a} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{3} \frac{h}{a} \right) \right] + \frac{\dot{w}}{a} \left[\left(1 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) - \frac{z}{a} \left(2 + \frac{8}{3} \frac{v_0}{L} t - \frac{2}{3} \frac{h}{a} \right) \right] \right\} + \sigma_r \\ \sigma_\theta &= \frac{2}{3} \frac{L}{v_0} \sigma \left\{ \frac{v_0}{L} \left[\left(2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} \right) - \frac{z}{a} \left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) \right] + z \dot{w}'' \left[\left(1 + 2 \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{z}{a} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v_0}{L} t - \frac{1}{6} \frac{h}{a} \right) \right] - 2 \frac{\dot{w}}{a} \left[1 - \frac{z}{a} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{v_0}{L} t + \frac{1}{3} \frac{h}{a} \right) \right] \right\} + \sigma_r \\ \sigma_r &= -\frac{1}{a} \left(\frac{h}{2} - z \right) \left\{ \frac{2}{3} \sigma \left(2 \frac{v_0}{L} t - \frac{h}{2a} - \frac{h}{a} \frac{v_0}{L} t \right) + \rho \frac{a^2}{L^2} \left(1 - \frac{h}{2a} \right) v_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

2. 壳体扰动运动方程及其求解:

小变形理论薄壳运动方程可取为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{N_\theta}{a} + q + [N_x(w - \bar{w})]'_x + \frac{1}{12} \rho h^3 \frac{\partial u''}{\partial x} - \rho h (\dot{w} - \dot{\bar{w}}) &= 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho h \ddot{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中: $q = \left(1 - \frac{h}{2a}\right) \rho (i)$

因为基本运动的诸量也满足上式, 并设定 $\ddot{u} = 0$, $N'_x = 0$ 故 (20) 式简化成:

$$\frac{\partial^2 \Delta M_x}{\partial x^2} + \frac{\Delta N_\theta}{a} + \Delta q + N_{x0} w'' - \rho h \dot{w} = 0 \quad (21)$$

式中: $\Delta M_x = M_x - M_{x0}$, $\Delta N_\theta = N_\theta - N_{\theta0}$, $\Delta q = q - q_0$

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz$$

$$\Delta M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_x z \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz$$

$$\Delta N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_\theta dz$$

$$\Delta q = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{a}\right) \Delta p$$

将 (11) 式代入上式, 得:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{2}{3} \sigma^0 h \left(\frac{3}{2} - \frac{v_0 t}{L} + \frac{h}{4a}\right) - \frac{1}{2} h a \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{a}\right) \rho v_0^2 / L^2 \\ \Delta M_x &= -\frac{1}{18} \frac{h^3}{a} \left\{ E_h \left[a(w - \bar{w})'' \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{v_0 t}{L} + \frac{1}{2} \frac{h}{a}\right) - \frac{w - \bar{w}}{a} \left(1 - \frac{h}{6a}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{v_0} \sigma^0 \left[a \dot{w}'' \left(\frac{1}{2} + \frac{v_0 t}{2L} - \frac{h}{2a}\right) + \dot{w} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{6a}\right) \right] \right\} \\ \Delta N_\theta &= \frac{1}{18} E_h h \frac{v_0^2}{a^2} \left\{ a(w - \bar{w})' \left(1 - \frac{v_0 t}{L} + \frac{h}{3a}\right) - \frac{w - \bar{w}}{a} \left[\frac{8a^2}{h^2} \left(2 \frac{v_0 t}{L} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{h}{2a}\right) \left(\frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{2a}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \frac{v_0 t}{L} - \frac{2}{3} \frac{h}{a}\right) \right] \right\} - \frac{1}{18} \frac{L}{v_0} \sigma^0 h \left[h^2 \frac{\dot{w}''}{a} \left(1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{3} \frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{6a}\right) + 24 \frac{\dot{w}}{a} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将上式代入 (21) 式, 得到扰动运动方程:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{w}'''' + A_2 \dot{w}'' + A_3 \dot{w} + A_4 (w - \bar{w})'''' + A_5 (w - \bar{w})'' + \\ + A_6 (w - \bar{w}) + A_7 w'' + A_8 \dot{w} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

式中: $A_1 = -\frac{1}{18} h^3 \frac{L}{v_0} \sigma^0 \left(\frac{1}{2} + 2 \frac{v_0 t}{L} - \frac{1}{2} \frac{h}{a}\right)$

$$A_2 = -\frac{1}{9} \frac{h^3}{a^2} \frac{L}{v_0} \sigma'' \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{6a} \right)$$

$$A_3 = -\frac{4}{3} \frac{L}{a^2 v_0} \sigma^0$$

$$A_4 = -\frac{1}{18} h^3 E_h \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{v_0 t}{L} + \frac{h}{2a} \right)$$

$$A_5 = \frac{1}{18} \frac{h^3}{a^2} E_h \left(2 - \frac{v_0 t}{L} + \frac{h}{6a} \right)$$

$$A_6 = -\frac{1}{9} \frac{h}{a^2} E_h \left[8 \left(2 \frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{2a} \right) \left(\frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{2a} \right) + \frac{h^2}{a^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{v_0 t}{L} - \frac{h}{3a} \right) \right]$$

$$A_7 = -\frac{2}{3} h \sigma'' \left(\frac{3}{2} - \frac{v_0 t}{L} + \frac{h}{4a} \right) - \frac{1}{2} \frac{a h^2}{L} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{a} \right) v_0^2 \rho$$

$$A_8 = \rho h$$

$$\sigma'' = \sigma_0 + E_h \frac{v_0}{L} t$$

设 $w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi}{L} x$

$$\bar{w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\dot{\bar{w}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

(23) 式得:

$$\ddot{w}_n + B_1 \dot{w}_n + B_2 w_n = B_3 a_n \quad (24)$$

式中:

$$B_1 = \frac{(s_1 + s_2 \eta)}{36} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1^2 (n\pi)^4 (1 + 4\eta - \alpha_1) - \frac{1}{3} \alpha_1^2 (n\pi)^2 (6 + 4\eta - \alpha_1) + 24 \alpha_1^3 \right\}$$

$$B_2 = B_3 - (n\pi)^2 \left\{ \frac{(s_1 + s_2 \eta)}{12} (6 - 4\eta + \alpha_1) + \frac{1}{6} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} (3 - 2\alpha_1) \right\}$$

$$B_3 = \frac{s_2}{36} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1^2 (n\pi)^4 (3 - 3\eta + \alpha_1) + \frac{1}{6} \alpha_1^2 (n\pi)^2 (12 - 6\eta + \alpha_1) + 2 \alpha_1^3 [2(4\eta - \alpha_1)(2\eta - \alpha_1) + \frac{1}{3} \alpha_1^2 (1 + 2\eta - \alpha_1)] \right\}$$

其中: $\alpha_1 = \frac{h}{a}$, $\alpha_2 = \frac{h}{L}$, $\alpha_3 = \frac{L}{a}$, $\eta = \frac{v_0 t}{L}$, $s_1 = \frac{\sigma_0}{(1/2) \rho v_0^2}$, $s_2 = \frac{E_h}{(1/2) \rho v_0^2}$.

初始条件为:

$$w_n(0) = a_n, \quad \dot{w}_n(0) = \frac{L}{v_0} b_n \quad (25)$$

(24) 的解可以写成:

$$w_n(\eta) = A_n(\eta)a_n + B_n(\eta)b_n \quad (26)$$

式中 $A_n(\eta)$ 和 $B_n(\eta)$ 是缺陷的放大因子, 它们依赖于冲击速度 v 和半波数 n . 用数值计算可以得出 $A_n(\eta)$ 和 $B_n(\eta)$. 按 [7] 给出的初扰动分析, 失稳模态 (用轴向失稳半波数 n 表示) 取成使 $A_n(\eta)$ 或 $B_n(\eta)$ 达到最大时的 n . 计算表明: $A_n(\eta)$ 、 $B_n(\eta)$ 及 $A_n(\eta)$ 是 η 的增函数, n 随 η 变化不大 (相差不超过 1), 由 $A_n(\eta)$ 和 $B_n(\eta)$ 确定的 n 差别也不大 (不超过 2). 根据文 [6], 取终止时刻 (此时 η 为 T) $A_n(T)$ 和 $B_n(T)$ 所确定的 n 的平均值为失稳模态 n .

3. 第二失稳临界速度的计算

文 [6] 中提出应变率反向作为第二失稳临界速度的理论判据, 在本文只考虑初始位移缺陷 ($b_n = 0$), 根据已知的失稳模态 n , 则由 (26) 式扰动位移为

$$w(\eta) = A_n(\eta)a_n \sin \frac{n\pi}{L}x \quad (27)$$

当扰动很小时, 应变率的主要成份则为基本运动形式 (2), 在不发生反向时有:

$$\dot{\epsilon}_x < 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta > 0, \quad \dot{\epsilon}_z < 0 \quad (28)$$

将 (27) 式代入 (15) 中, 注意 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{u}{L} \frac{\partial}{\partial \eta}$, 则得到对三个应变率反向的不等式.

如 $\dot{\epsilon}_x$ 反向, 则有:

$$\dot{\epsilon}_x = -\frac{v}{L} - z \dot{A}_n(\eta) a_n \frac{v_0}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{L}x > 0$$

或
$$\frac{v_0}{L} \leq -z \dot{A}_n(\eta) a_n \frac{v_0}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{L}x \quad (29)$$

对正弦屈曲波纹, 只要在凸出部位的最外点或凹进部位的最内点发生反向, (29) 式可写成:

$$\frac{v_0}{L} \leq \left| \frac{h}{2} \dot{A}_n(\eta) a_n \frac{v_0}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right| = \left| \frac{n^2 \pi^2 h}{2L^2} \dot{A}_n(\eta) a_n \right|$$

临界情况上式取等号, 由于 $\dot{A}_n(\eta) > 0$ 是增函数, 可得 $\dot{\epsilon}_x$ 反向的判别式:

$$\left| \frac{n^2 \pi^2 h}{2L^2} \dot{A}_n(\eta) a_n \right| \geq 1 \quad (30a)$$

同样分析可得:

$$\text{对 } \dot{\epsilon}_\theta \quad \left| \frac{2 \dot{A}_n(\eta) a_n}{a(1 + 2\eta - \frac{1}{2} \alpha_1)} \right| \geq 1 \quad (30b)$$

$$\text{对 } \dot{\epsilon}_z \quad \left| \frac{\dot{A}_n(\eta) [(n^2 \pi^2 h/L) + (2/a)] a_n}{1 - 2\eta + \frac{1}{2} \alpha_1} \right| \geq 1 \quad (30c)$$

由 (30) 式确定的三个速度中, 以 $\dot{\epsilon}_z$ 反向计算出的速度为最低, 故取它为第二失稳临界速度 v_{c2} , 它对应壳体局部变薄并伴随某波形增大的失稳形式, 在塑性失稳中也是最容易出现的一种形

式。

三、实验描述和观察结果

实验装置的简图见图2。主要设备有口径为 $\phi 21$ mm射出子弹 M_2 速度可达200 m/s的压缩空气枪;用DCS-453晶体管测速仪(精度 $1 \mu\text{s}$)测量时间系统。

试件用AMT (相当于中国国家标准GB 604-66LF 2) 铝棒制成的,其长度100 mm, 外径20.8 mm, 厚度为:

$h_1 = 1.00$ mm和 $h_2 = 1.42$ mm两种厚度的圆管,管内充满水,管子的两端用环氧树脂密封。

实验的主要结果归纳如下几点:

1. 有内压时,在轴向缩短 ΔL 和冲击速度 v 的关系曲线上(参照图3),也会出现如无内压时在某一个 ΔL 下有一速度“跳跃”,但这速度“跳跃”的幅度比无内压时小。

2. 在速度跳跃之前,对应相同的 ΔL 在有内压时需要的速度 v 比无内压时要高,而在速度跳跃之后,有内压对应的 v 反而低于无内压的情况。

3. 当冲击速度小于或等于第二失稳临界速度 v_2 时,有内压对应的轴向失稳半波数比无内压时减少 10% 左右。

4. 参照图1,速度 v 大于第二失稳临界速度时,出现的大塑性失稳的形式和无内压时相比,较多为非均匀而轴对称的形式,非均匀非轴对称的失稳形式则较少出现。

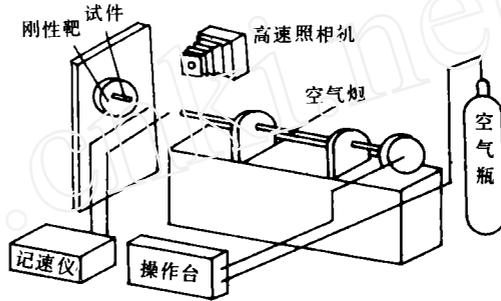


图2 装置简图

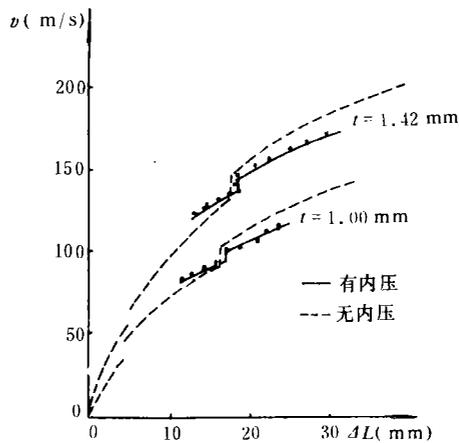
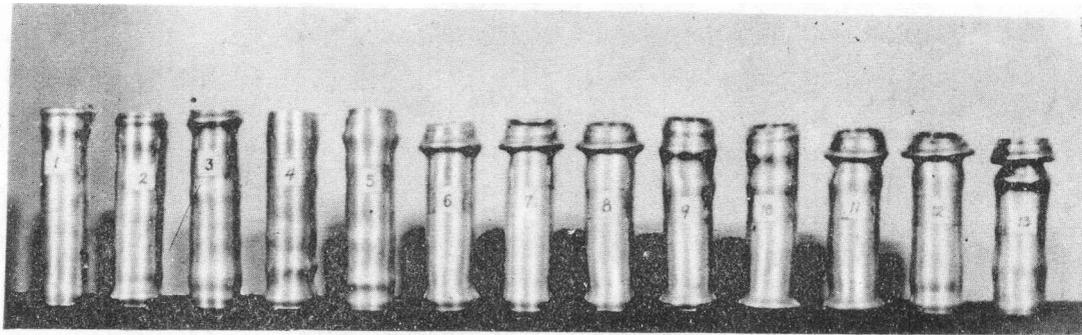


图3 $\Delta L-v$ 曲线



v 123 126 127.2 133.6 135.5 138 142.7 146 147.8 151.6 158 162 169 (m/s)

图1 有内压, $h = 1.42$ mm 圆柱壳在不同撞击速度下的失稳形式

四、结果和讨论

在(30)式计算中取 $a_n = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$, $b_n = 0$, 它相当于试件加工精度为 $\sqrt{7}$ 的表面不平整度. 计算的有内压和无内压受轴向冲击的圆柱壳的数值及实验值列于表1.

表1 有内压和无内压实验和计算值

h (mm)	σ_0 (kg/cm ²)	E_s (kg/cm ²)	p	n		v_{c_2} (m/s)			速度“跳跃”
				实验	计算	实验	计算		
							$\beta = 1$	$\beta = 0.86$	
1.00	1600	5000	无	23	23.5	80.8	67.6	78.6	92 - 104
			有	20	23	86.7	75.7	89.5	95 - 103
1.42	1700	4000	无	19	20.5	115.7	102.4	119.1	134 - 145
			有	17	19	138.0	125.4	145.8	138 - 147

1. 在上述理论计算中, 为计算方便取速度恢复系数 $\beta = 1$, 即撞击中没有能量损失. 但在实际撞击过程中是有一定的能量损失. 从无内压受轴向撞击的圆柱壳的实验结果可得 $\beta = 0.86$, 那时实验结果与理论计算相比较的误差在3%以内. 对于有内压的情况, 若也取 $\beta = 0.86$, 则理论计算与实验结果比较相差在6%以内. 若取 $\beta = 0.89$ 二者可相差2.2%以内. 说明有内压时的能量损失要小于无内压的. 表1中所列的理论计算半波数 n 与实验得出的半波数 n 也大致相符. 以上情况说明文[6]提出的 v_{c_2} 判据对有内压的情况也是适用的.

2. 相同壳体有内压和无内压情况比较. 由于有内压的存在, 失稳的半波数 n 比无内压时减少5-10%. 但是第二失稳临界速度却有提高. v_{c_2} 提高的程度与内压的大小有关. 通过(11)式可见 p 不仅和 h/a 成比例, 且与 η 和 σ 有关. 如分别计算厚度为 $h = 1.42 \text{ mm}$, $h = 1.00 \text{ mm}$ 壳体内的平均内压, 可知 $h = 1.42 \text{ mm}$ 平均内压比 $h = 1.00 \text{ mm}$ 大2.5倍, 而对应的 v_{c_2} 却提高2倍. 故可以推断, 增加内压是会使 v_{c_2} 提高.

3. 在文[6]中我们曾把 $\Delta L - v$ 曲线上的速度“跳跃”取为第二失稳临界速度 v_{c_2} , 这是因为速度 v 大于跳跃速度以后, 圆柱壳被撞击失稳时有更大的形状变化, 这一点在工程上能合理的利用或者有意控制这种现象是有益的. 但是注意, 该文中的 v_{c_2} 定义和 $\Delta L - v$ 曲线上的跳跃速度是不同的概念. 第二失稳临界速度 v_{c_2} 是指三个应变率($\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\epsilon}_3$)反向时计算出其中最小的一个值. $\Delta L - v$ 曲线上的速度跳跃是反映了当撞击速度 v 大于 v_{c_2} 时, 在一定速度范围内, 在壳体的局部将出现吸收能量高的机构, 而且常伴随着失稳形式的变化. 例如无内压的情况往往是由轴对称的失稳形式转化为非轴对称的菱形波或者局部的大环形波. 在有内压的情况, 它的失稳形式当 $v > v_{c_2}$ 时, 虽然仍为局部轴对称环形波, 但波形发展很快, 由于它没有失稳形式上的剧烈变化, 所以 $\Delta L - v$ 曲线上出现的速度跳跃幅度小于同样条件下无内压圆柱壳的速度跳跃幅度, 见图3. 在大于速度跳跃以后, 内压会使壳体的屈曲变形较为均匀, 而不象无内压的情况过分集中, 故对应于同样的冲击速度, 有内压的轴向缩短 ΔL 要大于无内压的轴向缩短, 见图2.

内压的存在, 使壳体在轴向冲击下的塑性屈曲变形较多地成为轴对称环状突起形式. 利

用本文实验中出现的现象和理论分析,我们进行了冲胀成形工艺的研究,其结果和预计相符,因而本文结果有可能被用于快速加工工艺。

参 考 文 献

- [1] Flügge, W., "Die Stabilität der Krieszylinderschale", *Ing-Archiv*, E. III, Heft 5, (1932) 463-506.
- [2] LO, H., Crate, J. and Schwartz, E. B., "Buckling of thin-walled cylinder under axial compression and internal pressure" *NACA TN 2021*, 1970.
- [3] Fung, Y. C. and Sechler, E. E., "Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure" *J. Aero. Sci.*, 24 (1957) 251-256.
- [4] Harris, L. A., Suer, H. S., Skene, W. T. and Benjamin, R. J., "The stability of thin-walled unstiffened circular cylinders under axial compression including the effect of internal pressure" *J. Aero. Sci.*, 24 (1957) 587-596.
- [5] Barez, F., Goldsmith, W. and Sackman, J. L., "Longitudinal waves in liquid-filled tubes I. Theory. II. Experiment" *Int. J. Mech. Sci.* 21, (1979) 213-236.
- [6] 王仁, 韩铭宝, 黄筑平, 杨青春, 受轴向冲击的圆柱壳塑性动力屈曲实验研究, *力学学报*, 5, (1983), 509-514.
- [7] Florence, A. L. and Goodier, J. N., "Dynamic plastic buckling of cylindrical shell in sustained axial compressive flow" *J. Appl. Mech.* 35, (1968) 80-86.
- [8] 杨青春, 韩铭宝, 黄筑平, 王仁, 撞击在刚性靶上的圆柱壳稳定性实验研究, *固体力学学报*, 2 (1985), 170-182.

ON THE PLASTIC INSTABILITY OF A LIQUID FILLED CYLLINDRICAL TUBE UNDER IMPULSIVE AXIAL LOADING

Han Mingbao* Yang Qingchun** Wang Ren*

(* Department of Mechanics, Peking University, Beijing, China)

(** Institute of Machinery & Electrics, Ministry of Maching Building, Beijing, China)

ABSTRACT The plastic instability of water-filled cylindrical tubes is investigated both experimentally and theoretically. The concept of imperfection amplification is used to get the plastic buckling wave number. The strain rate reversion is used to determine the critical velocity that causes the development of large or asymmetric buckling deformation. It is called the second critical velocity here. The results are compared to the previous ones on empty tubes. It shows that the water-filled case produces symmetric and uniform deformation instead of tending to asymmetric and large local deformation in the previous case. The wave number decreases a little while the second critical velocity increases.

KEY WORDS plastic buckling, dynamic stability of shells.