

横观各向同性轴对称问题的 加权残数法及其工程应用

章亮焱 丁浩江
(浙江大学)

提要 利用文[1, 5]的理论,本文提出用两个调和函数的方法求解横观各向同性的轴对称问题. 将它引入加权残数法,推得了一系列简洁的边界型最小二乘法公式. 就结构工程和岩土工程的两个例题作了计算,得到了有用的结论. 本文的方法比列赫尼茨基的重调和函数法更为简便.

一、引言

工程实际中有很多的横观各向同性轴对称问题,一直受到学者们的重视^[1-3]. 早在五十年代,胡海昌和列赫尼茨基^[4]曾用重调和函数求解了若干典型问题.

利用文[1, 5]的理论,本文用两个调和函数求解轴对称问题^[4]. 不仅由于数学上对调和函数研究得比较透彻,便于求得理论解;还因为由此推得的一系列公式非常简洁,适宜加权残数法的应用. 本文采用边界型最小二乘法,分析了两个实例,结果良好,对点载荷试验提出有益的意见.

二、公式推导

对于横观各向同性弹性体轴对称问题,宜用柱坐标 (r, z) 来表示,容易从[2]导出通解:

$$u_r = \sum_{j=1}^2 \left(-\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right), \quad u_z = - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\alpha - \gamma s_j^2}{s_j^2} \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}. \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_j^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_j = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (2)$$

式中

$$s_{1,2} = [\gamma^2 + \alpha\beta - 1 \pm \sqrt{(\gamma^2 + \alpha\beta - 1)^2 - 4\alpha\beta\gamma^2}] / (2\beta\gamma) \quad (3)$$
$$\alpha = B_{11}/B_{13}, \quad \beta = B_{33}/B_{13}, \quad \gamma = B_{44}/B_{13}.$$

根据式(1)则不难写出应力表达式.

对于单连通凸区域,式(2)有解

本文于1985年9月6日收到第一次稿,于1986年9月29日收到修改稿.

$$\varphi_j(r, s; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega'_n \phi_n(r, s; z), \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

式中 ω'_n 是待定系数, ϕ_n 是 n 次齐次调和多项式. 但对图 1 所示的多联通区域, 尚须叠加下列函数:

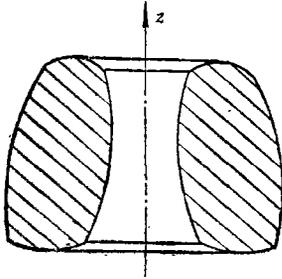


图 1

$$\bar{\varphi}_j(r, s; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda'_n [\phi_n(r, s; z) \ln r + Q_n(r, s; z)], \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

式中 Q_n 是 n 次齐次多项式, λ'_n 是待定系数. 为了方便和明确起见, 记号 $\phi_n = \phi_n(r, z)$, $\phi'_n = \phi_n(r, s; z)$, $Q_n = Q_n(r, z)$, $Q'_n = Q_n(r, s; z)$ 等等.

通常利用下列递推公式来计算 ϕ_n 和 Q_n 等.

$$\begin{aligned} \phi_n &= z\phi_{n-1} - \frac{r^2}{n}\phi_{n-1}, & \phi_0 &= 1. \\ \psi_n &= n\phi_{n-1} + z\phi_{n-1}, & \psi_0 &= 0. \\ Q_n &= zQ_{n-1} - \frac{r^2}{n}\pi_{n-1}, & Q_0 &= 0. \\ \pi_n &= nQ_{n-1} + z\pi_{n-1} - \frac{2}{n+1}\psi_n, & \pi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

此外还须利用下列微分公式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_n}{\partial r} &= -r\phi_{n-1}, & \frac{\partial \phi_n}{\partial z} &= n\phi_{n-1}, & \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial r \partial z} &= -nr\phi_{n-2}. \\ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial r^2} &= \phi_{n-1} - n(n-1)\phi_{n-2}, & \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} &= n(n-1)\phi_{n-2}. \\ \frac{\partial Q_n}{\partial r} &= -r\pi_{n-1}, & \frac{\partial Q_n}{\partial z} &= nQ_{n-1}, & \frac{\partial^2 Q_n}{\partial r \partial z} &= -nr\pi_{n-2}. \\ \frac{\partial^2 Q_n}{\partial r^2} &= \pi_{n-1} + 2\phi_{n-1} - n(n-1)Q_{n-2}, & \frac{\partial^2 Q_n}{\partial z^2} &= n(n-1)Q_{n-2}. \end{aligned} \quad (7)$$

利用 (6) 和 (7), 容易将位移和应力写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \left(\omega'_n \begin{pmatrix} u'_{nj} \\ u''_{nj} \\ B_{66}\sigma'_{nj} \\ B_{66}\sigma''_{nj} \\ B_{66}\sigma''_{nj} \\ B_{66}\sigma''_{nj} \end{pmatrix} + \lambda^j_n \begin{pmatrix} \bar{u}'_{nj} \\ \bar{u}''_{nj} \\ B_{66}\bar{\sigma}'_{nj} \\ B_{66}\bar{\sigma}''_{nj} \\ B_{66}\bar{\sigma}''_{nj} \\ B_{66}\bar{\sigma}''_{nj} \end{pmatrix} \right). \quad (8)$$

式中 u'_{nj} , \bar{u}'_{nj} 等都是 ϕ'_n , ϕ''_n , Q'_n 和 π'_n 的函数. 将 (4) 和 (5) 级数截取有限项, 得到位移和应力的近似表达式, 利用边界条件, 计算边界残差 $R_{\partial\Omega}$, 然后求解残差方程:

$$\int_{\partial\Omega} W_{\partial\Omega} R_{\partial\Omega} d\Omega = 0,$$

求出系数 ω'_n 和 λ'_n 后, 即可得到位移和应力的近似的解析表达式, 式中 $W_{\partial\Omega}$ 是适当的权

函数矩阵^[6]。

三、实例计算及分析

应用以上公式,计算了不少的有意义的例题,在文中仅给出两例。在计算中,采用最小二乘等距配点法,并取弹性系数 $G_{\perp} = E_{\perp} / 2(1 + \nu_{\perp})$ 。

例 1 以金属镁制成的实心柱体,是一种横观各向同性弹性体,两端受如下形式分布的自平衡力系作用:

$$z = \pm h: \sigma_z = 1 - 2r^2, \quad \tau_{rz} = 0.$$

弹性常数取自文 [3]。圆柱体的端部问题早

就受到人们的注意,作过大量的研究^[3,7],通常均采用本征函数法或 Fourier 级数法,由于求得的解析解级数收敛甚慢,为了得到一定精度的数值结果,往往要截取很多项。1978

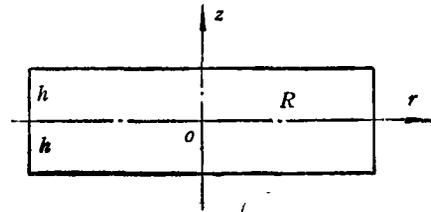


图 2

表 1 镁柱 $z = 0$ 截面上的应力

r/R	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$h/R = 0.05$ σ_r	0.0988	0.0978	0.0947	0.0897	0.0826	0.0735	0.0623	0.0492	0.0340	0.0169	0.0000
$h/R = 0.20$ σ_r	0.0666	0.0657	0.0627	0.0576	0.0505	0.0417	0.0316	0.0214	0.0135	0.0063	0.0000
$h/R = 0.05$ σ_{θ}	0.0988	0.0957	0.0866	0.0715	0.0502	0.0229	-0.0105	-0.0500	-0.0955	-0.1491	-0.2033
$h/R = 0.20$ σ_{θ}	0.0666	0.0636	0.0545	0.0393	0.0181	-0.0092	-0.0424	-0.0810	-0.1238	-0.1669	-0.2100

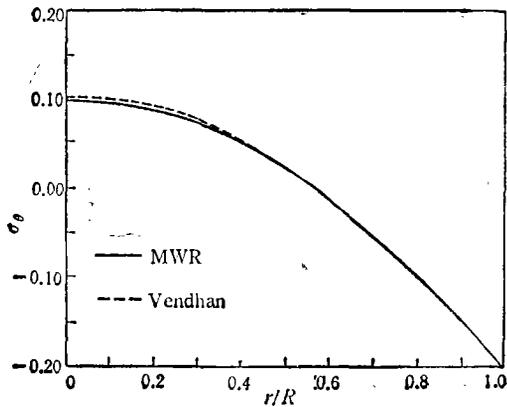


图 3

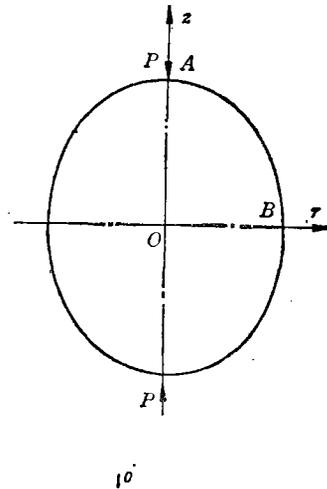


图 4

年 Vendhan 和 Archer 截取级数的前 53 项对上述镁柱问题作了计算^[3]。本文取 40 个配点, 并分别取前 22 项 ($h/R = 0.05$) 和 20 项 ($h/R = 0.2$) 作试函数, 计算同一问题。表 1 给出了 $z = 0$ 截面上 σ_r 和 σ_θ 的分布。

将表 1 中的数据绘制成图, 与 Vendhan 的结果作比较, 情况表明, 用本文方法, 只须以少得多的工作量和方便得多的计算手段, 就获得了与 Vendhan 解相当精度的结果。图 3 给出了 $z = 0$ 截面上的周向应力 σ_θ 分布曲线 ($h/R = 0.05$)。

例 2 横观各向同性旋转椭球试件, 如图 4 所示, 是测定混凝土和岩石, 尤其是常规试验无法测试的低强度和严重风化的岩石强度点载荷试验中的典型试件。迄今的理论研究和实验测试的试件, 均作各向同性体处理^[8]。为了更好地模拟岩石材料, 我们首次引进横观各向同性试件模型, 材料的 $E_{\perp} = 1.0 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$, $\nu_{\perp} = 0.3$, $\nu_{\parallel} = 0.25$, 对于 E_{\parallel} 我们考虑三种情形: a) $1.40 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$, b) $1.45 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$, c) $1.50 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ 。

表 2 椭球试件加荷轴上应力 (kg/cm^2)

应力 $z(\text{cm})$	E_{\parallel}	σ_r			σ_z		
		a	b	c	a	b	c
0.0		0.6836	0.6646	0.6457	-3.3115	-3.3105	-3.3104
0.2		0.6889	0.6700	0.6511	-3.3820	-3.3808	-3.3805
0.4		0.7027	0.6835	0.6642	-3.5987	-3.5968	-3.5960
0.6		0.7195	0.6993	0.6791	-3.9808	-3.9779	-3.9760
0.8		0.7326	0.7106	0.6885	-4.5693	-4.5648	-4.5616
1.0		0.7339	0.7084	0.6827	-5.4407	-5.4341	-5.4291
1.2		0.7181	0.6854	0.6524	-6.7411	-6.7307	-6.7223
1.4		0.7000	0.6549	0.6122	-8.7597	-8.7424	-8.7279
1.6		0.6630	0.5996	0.5353	-12.0715	-12.0430	-12.0185
1.8		0.5777	0.4842	0.3899	-17.8090	-17.8090	-17.7640
2.0		0.1534	0.0046	-0.1458	-28.7373	-28.6279	-28.5288

表 3 椭球试件 $z = 0$ 截面上应力 (kg/cm^2)

应力 $r(\text{cm})$	E_{\parallel}	σ_r			σ_θ			σ_z		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c
0.0		0.6836	0.6646	0.6457	0.6836	0.6646	0.6457	-3.3115	-3.3105	-3.3104
0.2		0.6619	0.6432	0.6247	0.6876	0.6694	0.6514	-3.2505	-3.2492	-3.2489
0.4		0.5999	0.5822	0.5646	0.6985	0.6826	0.6668	-3.0752	-3.0733	-3.0723
0.6		0.5059	0.4897	0.4736	0.7132	0.7007	0.6883	-2.8068	-2.8043	-2.8026
0.8		0.3896	0.3752	0.3609	0.7275	0.7188	0.7104	-2.4741	-2.4713	-2.4691
1.0		0.2579	0.2453	0.2326	0.7359	0.7312	0.7267	-2.1068	-2.1042	-2.1021
1.2		0.1078	0.0964	0.0850	0.7314	0.7302	0.7292	-1.7306	-1.7292	-1.7278
1.4		-0.0191	-0.0297	-0.0386	0.7010	0.7024	0.7041	-1.3671	-1.3675	-1.3677
1.6		-0.0622	-0.0708	-0.0731	0.6073	0.6103	0.6136	-1.0705	-1.0740	-1.0771
1.8		-0.0293	-0.0315	-0.0324	0.5400	0.5457	0.5537	-0.9479	-0.9566	-0.9895
2.0		0.0000	0.0000	0.0000	0.4757	0.4869	0.4983	-0.8671	-0.8893	-0.9017

cm^2 来考察试件内部的应力场随材料性质的变化情况。试件的尺寸: $OA = 2.63\text{cm}$, $OB = 2.0\text{cm}$, 计算中取前 18 项作试函数, 配点数为 40。表 2 和表 3 给出了这三种情况的应力值。

四、结 论

以上的分析, 可得出如下的一些结论:

1. 由于使用公式 (1) 和 (2), 使得求解横观各向同性轴对称问题的边界型最小二乘配点法象求解各向同性情形时那样简单, 本文的方法比列赫尼茨基的重调和函数法简便。

2. 本方法能给出近似的解析表达式, 从而有利于确定应力的一些特征点位置, 如极值点, 正负应力过渡点等, 它们对于考察应力分布是很有用的。

3. 首次采用横观各向同性的点载荷试件模型, 得到了只用各向同性模型未能考虑到的若干结果。表 2 和表 3 明显地表现出, 各向同性面内的弹性模量 E_{II} 的变化, 对应力 σ_r 和 σ_θ 的影响, 尤其是 σ_r 随 E_{II} 的减少显著地增大, 在加荷轴上的过渡点位置明显移动, 这

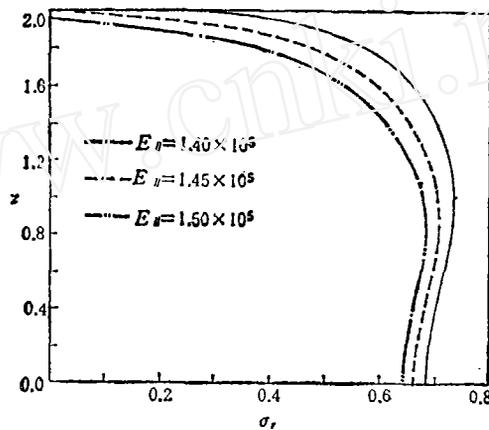


图 5

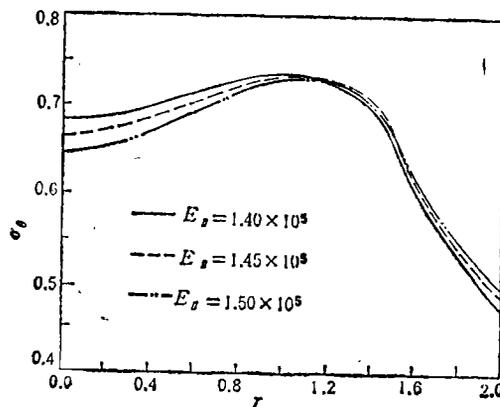


图 6

些正是影响点载荷试验准确性的重要因素^[1]。图 5 显示了加荷轴上径向应力 σ_r 的分布, 图 6 显示了 $z = 0$ 截面上周向应力 σ_θ 的分布。最后, 我们指出, 在控制加荷轴与试件材料的各向同性面垂直的条件下, 两个弹性模量之比 $E_{//}/E_{\perp}$ 越大, 试件破裂的极限载荷就越小。因此, 在没有更深入的研究之前, 为了更好地把握试验, 制作不规则试件^[14]时似应考虑岩石的各向同性面位置。

参 考 文 献

- [1] Паламодов, В. П., Общий вид решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *ДАН, СССР*, **143**, 6(1962), 1278—1281
- [2] 胡海昌, 横观各向同性的半无限弹性体的若干问题, *物理学报*, **10**, 3(1954), 57—69.
- [3] Vendhan, C. P., Archer, R. R., Axisymmetric Stresses in Transversely Isotropic Finite Cylinders, *Int. J. Solids Structures*, **14**, (1978), 305—318.
- [4] Lekhniskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, (1981), 376—415.
- [5] Eubanks, R. A., Sternberg, E., On the Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for a Medium with Transverse Isotropy, *J. Rat. Mech. Anal.*, **3**, (1954), 89—101.
- [6] 丁浩江、范本隼、叶贵如, 最小二乘配点法解二维问题探讨, *固体力学学报*, 4(1983), 585—589.
- [7] Fama, M. E. D., Radial Eigenfunctions for the Elastic Circular Cylinder, *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, **25**, 4(1972), 479—495.
- [8] 云天铨、肖永谦、邱崇光, 受轴向集中压力的椭球体的应力分析, *应用数学与力学*, **2**, 6(1981).
- [9] 成都地质学院水文地质及工程地质系点荷载试验研究小组, 岩石点荷载试验 (水文地质工程地质选辑第十二辑), 地质出版社, (1979), 1—31.

THE METHOD OF WEIGHTED RESIDUALS FOR THE TRANSVERSELY ISOTROPIC AXISYMMETRIC PROBLEMS AND ITS APPLICATIONS TO ENGINEERING

Zhang Liangchi Ding Haojiang
(Zhejiang University)

Abstract An approach with two harmonic functions is suggested by applying the theorems of references [1] and [5] to solve the transversely isotropic axisymmetric problems. Based on this approach, a series of simple formulas of the boundary least square collocation method is derived. Two typical examples in structure and rack engineering are computed, and several useful conclusions are obtained. The method in this paper is much more convenient than that of Lekhniskii's with biharmonic function.

Key words : the method of Weighted Residuals, isotropic, axisymmetric, least square collocation method.