

弹性曲杆的稳定性问题

武际可 黄永刚
(北京大学力学系)

提要 本文给出空间任一曲杆在弯扭联合作用下的稳定性问题的一般讨论,并且给出了曲杆某一平衡状态的扰动量所满足的方程组(28)–(36)。在适当的边界条件下,这些扰动量的非零解对应于临界状态。文末用这组方程具体讨论了五个实际例子,这些例子有些结果是新的,有些是用新的方法去处理老问题。

关键词: 弹性曲杆,弹性系统稳定性,分叉现象。

一、引 言

Euler 在 1744 年开始讨论弹性杆的微分方程以来,弹性杆的平衡和稳定性问题的文献和重要结果多得难以计数。其中 Kirchhoff 总结前人结果并提出的弹性细杆弯扭平衡方程组和弹性关系(20)、(21)和(28)是这个问题发展的一个重要阶段(参看[4])。

关于稳定性问题,在 Euler 压杆稳定性的讨论以后,人们对它的各种特定条件下的讨论是很多的。本文则想以统一的观点对空间任一弹性曲杆段的弯扭变形平衡状态的稳定性加以讨论。基本思想是从平衡方程的某个解出发,给它一个扰动量,得到另一平衡状态。从而可以得到扰动量应当满足的方程组(29)–(37)。在一定的边界条件下,扰动量有非零解时表示所讨论的平衡位置不唯一确定,这通常对应于在相空间中变形过程曲线的分叉点,也就是临界状态。

用上述得到的一般扰动量方程,文末给出了五个算例。这些例子中有些是重新讨论前人讨论过的算例(例 1 和例 2),有些是新的结果(例 3–例 5)。它们都是实际中常碰到的问题。

二、弹性曲杆的一般静力学方程

1. 几何关系

弹性曲杆上任一点向径 $\mathbf{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)]$, 其中 s 为弧长。自然坐标系为 $[\mathbf{n}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}]$, 其中 $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}$ 依次为曲杆的主法线,次法线和切线方向的单位向量。

由微分几何[1]可知:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n} \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{T} \mathbf{b} \quad (2)$$

本文于 1986 年 6 月 23 日收到。

$$\frac{db}{ds} = -\frac{1}{T}n \quad (3)$$

式中 $\frac{1}{\rho}$ 和 $\frac{1}{T}$ 分别是曲率和挠率.

曲杆截面的形心主轴坐标系为 $[e_1, e_2, e_3]$, 则它与自然坐标系转换关系为

$$e_1 = n \cos \theta + b \sin \theta \quad (4)$$

$$e_2 = -n \sin \theta + b \cos \theta \quad (5)$$

$$e_3 = \tau \quad (6)$$

θ 为 e_1 与 n 之夹角(见图 1).

利用 (1)–(3) 可推出

$$\frac{de_1}{ds} = \left(\frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds} \right) e_2 - \frac{1}{\rho} \cos \theta e_3 \quad (7)$$

$$\frac{de_2}{ds} = -\left(\frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds} \right) e_1 + \frac{1}{\rho} \sin \theta e_3 \quad (8)$$

$$\frac{de_3}{ds} = \frac{1}{\rho} \cos \theta e_1 - \frac{1}{\rho} \sin \theta e_2 \quad (9)$$

简写为:

$$\frac{de_i}{ds} = \omega \times e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

其中

$$\omega = (p, q, r) \quad (11)$$

$$p = \frac{1}{\rho} \sin \theta, \quad q = \frac{1}{\rho} \cos \theta, \quad r = \frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds} \quad (12)$$

给定曲线 $r(s)$ 和 $\theta(s)$, 则可求得 n, b, τ, ρ, T , 并进而求得 p, q, r . 反之, 如给定 p, q, r , 也可求出 $r(s)$ 和 $\theta(s)$. 由 (12), 有

$$\frac{1}{\rho} = (p^2 + q^2)^{1/2} \quad (13)$$

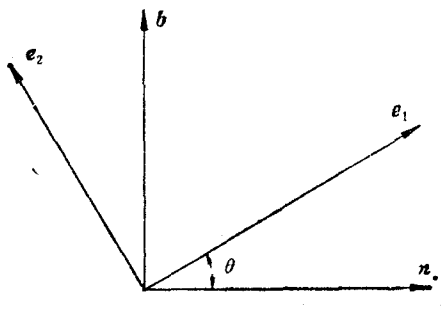


图 1

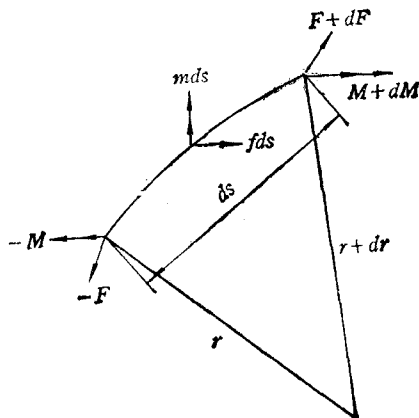


图 2

$$\operatorname{tg} \theta = p/q \quad (14)$$

$$\frac{1}{T} = r - \frac{d\theta}{ds} = r - \frac{q^2}{p^2 + q^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{q} \right) \quad (15)$$

由微分几何[1], 有

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (16)$$

$$\mathbf{n} = \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \rho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \quad (17)$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \left(\rho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right) \quad (18)$$

将(16)–(18)代入(2), 得到

$$\frac{d}{ds} \left(\rho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{1}{T} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \left(\rho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right) \quad (19)$$

加上适当的边条件, 就成为 $\mathbf{r}(s)$ 的定解问题.

2. 平衡关系

微弧 $d\mathbf{r}$ 上, 作用分布弯矩 $m ds$, 分布力 $\mathbf{f} ds$, $\mathbf{r}$ 处内力矩、内力分别为 $-\mathbf{M}$, $-\mathbf{F}$.

$\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ 处内力矩、内力分别为 $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$, $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$ (见图2). 合力平衡:

$$\mathbf{F} + d\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) + \mathbf{f} ds = 0.$$

合力矩平衡:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} + d\mathbf{M} + (-\mathbf{M}) + m ds + (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \times (\mathbf{F} + d\mathbf{F}) \\ & + \mathbf{r} \times (-\mathbf{F}) + \left(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{r}}{2} \right) \times \mathbf{f} ds = 0. \end{aligned}$$

略去高阶小量. 有

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{f} = 0. \quad (20)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0. \quad (21)$$

记 $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{e}_i$, 其中 N_1, N_2 为剪力, N_3 为轴力.

$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 M_i \mathbf{e}_i$, 其中 M_1, M_2 为弯矩, M_3 为扭矩.

代入(20), (21), 得:

$$\frac{dN_1}{ds} + qN_3 - rN_2 + f_1 = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dN_2}{ds} + rN_1 - pN_3 + f_2 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{dN_3}{ds} + pN_2 - qN_1 + f_3 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{dM_1}{ds} + qM_3 - rM_2 - N_2 + m_1 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + rM_1 - pM_3 + N_1 + m_2 = 0 \quad (26)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + pM_2 - qM_1 + m_3 = 0 \quad (27)$$

式中 $t_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i$, $m_i = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$)

与 (22)–(27) 联立尚需引进弹性关系

$$M_1 = Ap, \quad M_2 = Bq, \quad M_3 = Cr \quad (28)$$

这里 A 、 B 、 C 分别为截面的两个抗弯刚度和抗扭刚度.

三、弹性曲杆的稳定性

1. 扰动方程

无应力状态时曲杆初始曲率为 (p_0, q_0, r_0) . 设对应外力 $\mathbf{f}$, $\mathbf{m}$ 方程组 (22)–(27) 有两组解:

$$\begin{aligned} & (N_1^0, N_2^0, N_3^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0, p^0, q^0, r^0) \text{ 及} \\ & (N_1^0 + N_1^*, N_2^0 + N_2^*, N_3^0 + N_3^*, M_1^0 + M_1^*, M_2^0 + M_2^*, M_3^0 + M_3^*, \\ & p^0 + p^*, q^0 + q^*, r^0 + r^*) \end{aligned}$$

其中所有上标为“*”的量都是扰动小量.

第一组解相当于 $p = p_0 + p^0$, $q = q_0 + q^0$, $r = r_0 + r^0$ 时方程组 (22)–(28) 的解.

第二组解相当于 $p = p_0 + p^0 + p^*$, $q = q_0 + q^0 + q^*$, $r = r_0 + r^0 + r^*$ 时方程组 (22)–(28) 的解.

把上式分别代入 (22)–(28), 并对应方程相减, 略去其中扰动量 (即带“*”的量) 的二阶项, 得到线性化的齐次扰动方程.

$$\begin{aligned} & \frac{dN_1^*}{ds} + q^*N_3^0 + (q_0 + q^0)N_3^* - r^*N_2^0 - (r_0 + r^0)N_2^* = 0 \\ & \frac{dN_2^*}{ds} + r^*N_1^0 + (r_0 + r^0)N_1^* - p^*N_3^0 - (p_0 + p^0)N_3^* = 0 \\ & \frac{dN_3^*}{ds} + p^*N_2^0 + (p_0 + p^0)N_2^* - q^*N_1^0 - (q_0 + q^0)N_1^* = 0 \\ & \frac{dM_1^*}{ds} + q^*M_3^0 + (q_0 + q^0)M_3^* - r^*M_2^0 - (r_0 + r^0)M_2^* - N_2^* = 0 \\ & \frac{dM_2^*}{ds} + r^*M_1^0 + (r_0 + r^0)M_1^* - p^*M_3^0 - (p_0 + p^0)M_3^* + N_1^* = 0 \\ & \frac{dM_3^*}{ds} + p^*M_2^0 + (p_0 + p^0)M_2^* - q^*M_1^0 - (q_0 + q^0)M_1^* = 0 \end{aligned}$$

为简单计, 省去所有“*”号.

$$\frac{dN_1}{ds} + qN_3 + (q_0 + q^0)N_3 - rN_2^0 - (r_0 + r^0)N_2 = 0. \quad (29)$$

$$\frac{dN_2}{ds} + rN_1 + (r_0 + r^0)N_1 - pN_3^0 - (p_0 + p^0)N_3 = 0. \quad (30)$$

$$\frac{dN_3}{ds} + pN_2 + (p_0 + p^0)N_2 - qN_1^0 - (q_0 + q^0)N_1 = 0. \quad (31)$$

$$\frac{dM_1}{ds} + qM_3 + (q_0 + q^0)M_3 - rM_2^0 - (r_0 + r^0)M_2 - N_2 = 0. \quad (32)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + rM_1 + (r_0 + r^0)M_1 - pM_3^0 - (p_0 + p^0)M_3 + N_1 = 0. \quad (33)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + pM_2 + (p_0 + p^0)M_2 - qM_1^0 - (q_0 + q^0)M_1 = 0. \quad (34)$$

2. 物理关系

$$M_1 = Ap \quad (35)$$

$$M_2 = Bq \quad (36)$$

$$M_3 = Cr \quad (37)$$

其中 A, B 为截面的两个抗弯刚度, C 为抗扭刚度.

3. 理论分析

如果齐次线性方程组 (29)–(37) 只有零解, 则系统稳定. 如果有非零解, 则系统不稳定, 其分界就是临界情形, 可确定临界载荷.

四、算 例

1. 长为 l 的弹性杆, 受压力 Q 及扭矩 M 作用, 分析临界条件 (见图 3).

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 = r_0 = 0 \\ M_1^0 &= M_2^0 = 0, \quad M_3^0 = M, \\ N_1^0 &= N_2^0 = 0, \quad N_3^0 = -Q \\ p^0 &= q^0 = 0, \quad r^0 = \frac{M}{C} \end{aligned}$$

其中 C 为截面抗扭刚度.

(28)~(36) 简化为:

$$\frac{dN_1}{ds} - Qq - \frac{M}{C}N_2 = 0$$

$$\frac{dN_2}{ds} + \frac{M}{C}N_1 + Qp = 0$$

$$A \frac{dp}{ds} + Mq - M \frac{B}{C}q - N_2 = 0$$

$$B \frac{dq}{ds} + M \frac{A}{C}p - Mp + N_1 = 0$$

消去 N_1, N_2 ,



图 3

$$B \frac{d^2 q}{ds^2} - M \left(1 - 2 \frac{A}{C} \right) \frac{dp}{ds} + \left[Q + \frac{M^2}{C} \left(1 - \frac{B}{C} \right) \right] q = 0, \quad (37a)$$

$$A \frac{d^2 p}{ds^2} + M \left(1 - 2 \frac{B}{C} \right) \frac{dq}{ds} + \left[Q + \frac{M^2}{C} \left(1 - \frac{A}{C} \right) \right] p = 0. \quad (37b)$$

端条件

$$p(0) = p(l) = q(0) = q(l) = 0. \quad (37c)$$

这个端条件相当于在两端附加弯矩为零.

设

$$\begin{cases} p \\ q \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1 \sin(\omega_1 s + \theta_1) \\ \alpha_2 \cos(\omega_1 s + \theta_1) \end{cases} + \begin{cases} \beta_1 \sin(\omega_2 s + \theta_2) \\ \beta_2 \cos(\omega_2 s + \theta_2) \end{cases}$$

代入 (37a), (37b), 并利用 p, q 有非零解, 导出

$$\begin{aligned} AB\omega^4 - \left[(A+B)Q + M^2 \left(1 - \frac{A}{C} - \frac{B}{C} + 2 \frac{AB}{C^2} \right) \right] \\ + \left[Q + \frac{M^2}{C} \left(1 - \frac{A}{C} \right) \right] \left[Q + \frac{M^2}{C} \left(1 - \frac{B}{C} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

ω_1, ω_2 是 (38) 的两个正根.

由 (37c) 可导出本征关系式

$$\omega_1 l + \omega_2 l = 2\pi \quad \text{即} \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \quad (39)$$

失稳临界条件由 (38), (39) 确定为

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left[(A+B)Q + M^2 \left(1 - \frac{A}{C} - \frac{B}{C} + 2 \frac{AB}{C^2} \right) \right] \\ + 2 \left\{ \frac{1}{AB} \left[Q + \frac{M^2}{C} \left(1 - \frac{A}{C} \right) \right] \left[Q + \frac{M^2}{C} \left(1 - \frac{B}{C} \right) \right] \right\}^{1/2} \\ = \frac{4\pi^2}{l^2} \end{aligned} \quad (40)$$

对于横截面的主惯性矩相等的弹性直杆, $A = B = EJ$, (40) 化为

$$M^2 + 4EJQ = \frac{4\pi^2}{l^2} E^2 J^2$$

与经典结果 [2] (p171 ~ 172) 相吻合, 并包括 [3] 的结果.

2. 半径为 R 的圆弧, 梁高 $h \gg$ 梁宽 b , 两端作用一对力偶 M , 分析侧向失稳时临界力矩 (如图 4).

$$p_0 = r_0 = 0, \quad q_0 = \frac{1}{R}$$

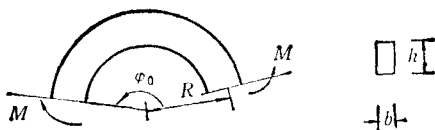


图 4

由于 $h \gg b$ 即抗弯刚度很大, 可认为

$$\begin{aligned} p^0 &= q^0 = r^0 = 0 \\ M_1^0 &= M_3^0 = 0, \quad M_2^0 = -M \\ N_1^0 &= N_2^0 = N_3^0 = 0 \end{aligned}$$

(28)–(36) 简化为:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{ds} + \left(M + \frac{C}{R} \right) r &= 0 \\ C \frac{dr}{ds} - \left(M + \frac{A}{R} \right) p &= 0. \end{aligned}$$

消去 p , 得

$$AC \frac{d^2 r}{ds^2} + \left(M + \frac{A}{R} \right) \left(M + \frac{C}{R} \right) r = 0$$

端条件 $r(0) = r(R\varphi_0) = 0$ 其中 φ_0 是圆弧所对的中心角。这个端条件相当于在端头附加扭矩为零。要求 r 有非零解, 可导出临界条件

$$\sin \left[\left(\frac{M}{A} + \frac{1}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{C} + \frac{1}{R} \right)^{1/2} R\varphi_0 \right] = 0. \quad (41)$$

由 (41), 可取 $\left(\frac{M}{A} + \frac{1}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{C} + \frac{1}{R} \right)^{1/2} R\varphi_0 = \pi$, 解出

$$M^2 + \frac{1}{R} (A + C)M + \frac{AC}{R^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right) = 0.$$

$$M_{1,2} = \frac{1}{2R} \left\{ -(A + C) \pm \left[(A - C)^2 + 4AC \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right]^{1/2} \right\}$$

对 $0 < \varphi_0 < \pi$, 有

$$M_{cr}^+ = \frac{1}{2R} \left\{ \left[(A - C)^2 + 4AC \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right]^{1/2} - (A + C) \right\}$$

$$M_{cr}^- = -\frac{1}{2R} \left\{ \left[(A - C)^2 + 4AC \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right]^{1/2} + (A + C) \right\}$$

与经典结果 [2] (p274 ~ 280) 相吻合。令 $R \rightarrow \infty$ 且 $R\varphi_0$ 为常数 l , 即得到长为 l 的直梁侧向屈曲载荷,

$$M_{cr} = \pm \frac{\pi}{l} \sqrt{AC}.$$

3. n 匝螺距为 h , 半径为 R , 横截面为圆的弹簧, 上下端中心线作用一对压力 P , 分析临界荷载 P_{cr} (如图 5)。

$$A = B = EJ, \quad C = GJ_p = \frac{EJ}{1 + \nu}$$

$$p_0 = 0, \quad q_0 = \frac{1}{R} \cos^2 \varphi, \quad r_0 = \frac{1}{R} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$M_1^0 = 0, \quad M_2^0 = PR \sin \varphi, \quad M_3^0 = PR \cos \varphi$$

$$p^0 = 0, \quad q^0 = \frac{PR}{EJ} \sin \varphi, \quad r^0 = \frac{PR}{EJ} (1 + \nu) \cos \varphi$$



图 5

其中 ν 为泊松比, φ 为簧丝与水平的夹角.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{2\pi R} \quad (42)$$

代入方程组 (28)–(36), 并化简, 可得到

$$\frac{d^2 p}{ds^2} + \omega^2 p = 0$$

其中

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left(r_0 + \frac{\nu}{1+\nu} r^0 \right)^2 + q_0(q_0 - \nu q^0) \\ &= \frac{1}{R^2} \cos^2 \varphi_0 \left(1 + \frac{\nu^2 P^2 R^4}{E^2 J^2} + \frac{\nu P R^2}{E J} \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

端条件 $p(0) = p\left(n \cdot \frac{2\pi R}{\cos \varphi}\right) = 0$. 要使 p 有非零解, 可导出临界条件

$$\sin\left(\omega \cdot \frac{n \cdot 2\pi R}{\cos \varphi}\right) = 0 \quad (43)$$

(43) 可简化为

$$\left(\frac{\nu P R^2}{J E}\right)^2 + \sin \varphi \cdot \frac{\nu P R^2}{E J^2} + 1 - \frac{k^2}{4n^2} = 0$$

k 为任意正整数. 解上式得

$$P = \frac{E J}{2\nu R^2} \left(\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{k^2}{n^2} - 4} - \sin \varphi \right)$$

取 $k = 2n + 1$, 可得临界载荷 P_{cr}

$$P_{cr} = \frac{E J}{2\nu R^2} \left(\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n}} - \sin \varphi \right) \quad (44)$$

由 (44) 可以看出, 螺距越大 (即 $\sin \varphi$ 越大), 临界载荷越小; 匝数越多, 临界载荷也越小, 这些都与实际情况相吻合.

4. 有一微小开口的圆环, 横截面为圆, 开口处作用有一对拉力 P , 分析临界载荷 P_{cr} (如图 6).

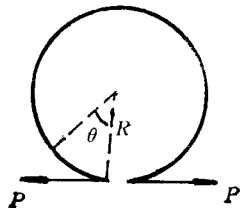


图 6

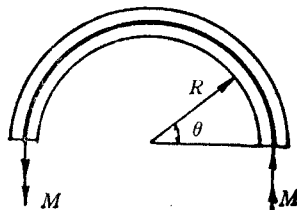


图 7

$$A = B = EJ, \quad C = GJ_p = \frac{EJ}{1+\nu}$$

$$p_0 = 0, \quad q_0 = \frac{1}{R}, \quad r_0 = 0$$

$$M_1^0 = 0, \quad M_2^0 = -PR(1 - \cos \theta), \quad M_3^0 = 0.$$

$$p^0 = 0, \quad q^0 = -\frac{PR}{EJ}(1 - \cos \theta), \quad r^0 = 0.$$

代入方程组 (28)–(36), 化简得到

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{\nu PR^2}{EJ} - \frac{\nu PR^2}{EJ} \cos \theta\right) r = 0$$

端条件 $r(0) = r(2\pi) = 0$. 令 $\theta = 2t$, 则上述方程就可以化为众所周知的 Mathieu 方程, 它的解, 特征值及稳定性已在 [5] 中讨论得很清楚.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} + \left(4 + 4\frac{\nu PR^2}{EJ} - 4\frac{\nu PR^2}{EJ} \cos 2t\right) r &= 0 \\ r(0) = r(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

通过数值计算得出 $P_{cr} = 1.30 \frac{EJ}{\nu R^2}$.

5. 固定的刚性半圆管中有一光滑圆杆, 半径为 R , 细杆两端作用扭矩 M 细杆被约束在圆管中产生弯扭变形, 分析临界载荷 M_{cr} (如图 7).

$$A = B = EJ, \quad C = GJ_\rho = \frac{EJ}{1 + \nu}$$

$$p_0 = 0, \quad q_0 = \frac{1}{R}, \quad r_0 = 0.$$

设细杆每个截面扭转角为 $\varphi(\theta)$, 则

$$\omega = \frac{d}{ds}(\varphi \mathbf{k}) = \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{d\theta} \mathbf{k} + \frac{\varphi}{R} \mathbf{j}.$$

此处 $\mathbf{k}$ 为沿圆周单位切向量, 而 $\mathbf{j}$ 为内法向的单位向量.

即

$$p^0 = \frac{\varphi}{R}, \quad q^0 = 0, \quad r^0 = \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{d\theta}$$

$$M_1^0 = EJ \frac{\varphi}{R}, \quad M_2^0 = 0, \quad M_3^0 = \frac{EJ}{1 + \nu} \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

在这个约束问题中, 细杆的中性轴没有位移, 并利用微元平衡, 可导出 M_1^0, M_3^0 的表达式

$$M_1^0 = Mn \frac{\operatorname{chn}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}}$$

$$M_2^0 = 0$$

$$M_3^0 = M \frac{\operatorname{sh} n\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}}$$

其中 $n = \sqrt{1 + \nu}$. 代入方程组 (28)–(36), 并简化为:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left[1 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 n \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] r = 0 \quad (46)$$

其中 $\lambda = \frac{\nu MR}{EJ \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}}$, 端条件 $r(0) = r(\pi) = 0$.

方程 (46) 是虚宗量 Mathieu 方程 [5]. 通过数值计算解出 $\lambda_{cr} = 1.38$, 因而有

$$M_{cr} = 1.38 \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}}{\nu} \cdot \frac{EJ}{R} = 13.4 \frac{EJ}{R} \quad (47)$$

上式中取 $\nu = 0.3$.

作者对陈笃、杨子久同志仔细阅读原稿并提出宝贵的意见表示深切的感谢.

参 考 文 献

- [1] 苏步青,《微分几何》. 高等教育出版社, 1979.
- [2] 铁摩辛柯,《弹性稳定理论》. 科学出版社, 1958.
- [3] 顾德淦,用摄动法计算屈曲问题的一个简单实例,力学与实践,1985,2,23–26.
- [4] Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity 4th Edition 1927.
- [5] 小谷正雄,特殊函数,上海科学技术出版社,1962.

THE STABILITY OF ELASTIC CURVED BARS

Wu Jike, Huang Yonggang

(Department of Mechanics, Peking University)

Abstract In this paper the general discussion is given on the stability of arbitrary curved bar in the space under the combined action of bending and torsion. The equations (28)–(36) for the perturbation at the equilibrium state of the curved bar are obtained. With appropriate boundary conditions the nontrivial solution for the perturbation corresponds to the critical state of the curved bar. Five practical examples are worked out by use of these equations. Some of the results are new and others are obtained more easily using this method.

Key words : elastic curved bars, the stability of elastic systems, bifurcation.