第19卷 第5期 力学学报 Vol. 19, No. 5
1987年9月 ACTA MECHANICA SINICA Sept., 1987

弹性力学的 Fredholm 积分方程组解法中构造影响函数的几种方法

林 晓 王良国
(华 东 工 学 院)

提要 本文就弹性力学的 Fredholm 积分方程组解法中如何构造影响函数的问题，在总结已有工作的基础上，提出了四种基本方法：点源法，分布源法，保角变换法和极限法，并论述了各方法的应用范围。

关键词：弹性力学，积分方程，影响函数，覆盖域。

一、引 言

许多作者的工作证明，用 Fredholm 积分方程组求解弹性力学或断裂力学的问题是一种行之有效的方法。在[1]中，我们论述了该方法的基本思想、统一表达式及其几个重要性质，并且指出，运用该方法的关键在于构造影响函数(即积分方程组的核)。在本文中，我们将研究如何构造影响函数的问题，着重论述点源法，分布源法，保角变换法和极限法。这些方法既可单独使用，也可综合起来使用。在求解具体问题时，选取恰当的方法，可以较快地求得影响函数，减少工作量。

构造影响函数的第一步是选取覆盖域。最简单的方法是按一条边界选取一个覆盖域，但有时为了方便起见，也可以把一条边界分成若干段，每段选取一个覆盖域，还可以适当照顾结构和载荷对称性，等等，总之，方法是多种多样的，一些具体例子将在下文给出。

二、点 源 法

由[1]知弹性体中应力的积分表示和边界上 Fredholm 积分方程组的表达通式为：

$$\sigma_{ij}=\sum_{k,\alpha}\int_{L_k} p_\alpha^k(t)g_{\alpha ij}^k(t,M)dt \tag{2.1}$$

$$p_i^m(s)+\sum_{\substack{k,\alpha\\ k\neq m}}\int_{C_k} p_\alpha^k(t)G_{\alpha i}^{km}(t,s)dt=f_i^m(s) \tag{2.2}$$

$$(m=1,\cdots n;\ i=1,2,3)$$

其中 $g_{\alpha ij}^k(t,M)$ 是覆盖体 A_k 中在边界 L_k 上 t 点沿 α 方向作用单位载荷时引起的应力场，$G_{\alpha i}^{km}(t,s)=\sum_j g_{\alpha ij}^k(t,s)l_j^m$，$l_j^m$ 是边界 C_m 上外法线的方向余弦。由此可见，当 L_k

本文于1986年1月31日收到。

上 t 点作用一集中力时能求出 A_k 内的弹性应力场，就能将它作为影响函数构造积分方程组。我们称这种利用集中力的解答构造影响函数的方法为点源法。

充分地利用弹性力学中在集中力作用下应力场的分析解，可以很方便地构造影响函数。下面以带边裂纹的半无穷大板为例来说明这个方法。

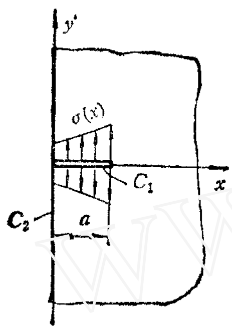

图 1

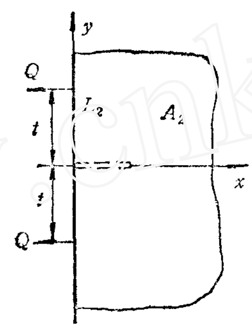

图 2

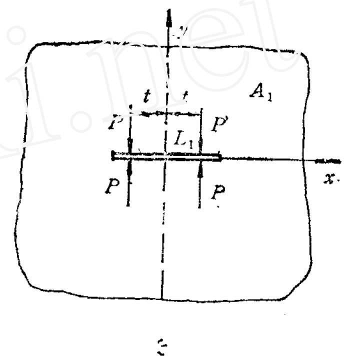

图 3

如图 1，设裂纹上下受一组对称分布压力，因此可以利用问题的对称性减少方程组的个数。取覆盖体 A_2、A_1 如图 2、图 3 所示。在 L_2 上的 $y=\pm t$ 处有集中力 Q 作用时，与 C_1 相应的地方的应力为[2]：

$$\sigma_y=\frac{4}{\pi}\frac{Qxt^2}{(x^2+t^2)^2}$$

以 $q(t)dt$ 代替 Q，从而 C_1 上的积分方程为：

$$p(x)+\int_0^\infty q(t)\frac{4xt^2}{\pi(x^2+t^2)^2}dt=-\sigma(x) \tag{2.3}$$

这里略去了 L_2 上剪力引起的应力项，因为它可以通过如下的技巧消去。在图 3 的 L_1 上下 $x=t$ 处作用一对集中力 P，有 Westergaard 函数[3]：

$$Z_I(z)=-\frac{P\sqrt{a^2-t^2}}{\pi(z-t)\sqrt{z^2-a^2}}$$

为使 C_2 所在的位置上只有对称的拉力，在 $x=-t$ 处再加一对 P 力，即取 $Z_I(z)$ 为

$$Z_I(z)=-\frac{2P_z\sqrt{a^2-t^2}}{\pi(z^2-t^2)\sqrt{z^2-a^2}}$$

这样得到的应力场也满足 $g^k_{\alpha ij}$ 所要求的条件，从而 C_2 的位置上有应力：

$$\sigma_x=-\frac{P_{2y}}{\pi\sqrt{y^2+a^2}}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t^2+y^2}\left(\frac{y^2}{y^2+a^2}-\frac{2t^2}{t^2+y^2}\right)$$

令 $P=p(t)dt$ 得 C_2 上的积分方程组：

$$q(y)-\frac{2y}{\pi\sqrt{y^2+a^2}}\int_0^a p(t)\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t^2+y^2}\left(\frac{y^2}{y^2+a^2}-\frac{2t^2}{t^2+y^2}\right)dt=0 \tag{2.4}$$

这里也略去了裂纹面上的剪切力在 C_2 处引起的应力项，道理是显见的。(2.3) 和 (2.4) 式

就是该问题的 Fredholm 积分方程组，它们和[4]运用 Fourier 变换得到的结果是一致的。至于应力场的积分表达式也是容易求得的，这里不再推导。

三、分 布 源 法

点源法的实质是寻找某个在集中力作用下平衡弹性体的解析解。遗憾的是，弹性力学中受集中力作用时的问题，有解答的很少。然而，若我们能够把覆盖体 A'_k 内的应力场用边界 L_k 上待定的连续分布力 $p_\alpha^k(t)$ 的积分来表示，即：

$$\sigma_{\alpha ij}^k = \int_{L_k} p_\alpha^k(t)\tilde{g}_{\alpha ij}^k(t, M)\,dt \tag{3.1}$$

则这里的 $\tilde{g}_{\alpha ij}^k$ 与 (2.1) 式中的 $g_{\alpha ij}^k$ 在形式上毫无差别，可以用来构造影响函数。这就是分布源法。

我们以一个圆弧形裂纹边界为例说明如何用分布源法构造影响函数。取覆盖体为如图 4 所示的含一段圆弧的无穷大平面。假定原来的裂纹边界上作用的外力系是一个自成平衡的力系，由[1]知道作用在裂纹面上的一组待定的分布力系也是自成平衡的。由[5]，在极坐标下应力分量为：

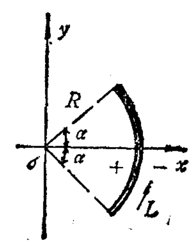

图 4

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]\\&\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]\,\frac{z}{\bar{z}}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中 $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ 为区域内的解析函数。以上两式相减并取共轭，得：

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)} \tag{3.3}$$

记

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z}\bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z^2}\bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right) \tag{3.4}$$

则

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{z^2}\Phi(z) - \frac{R^2}{z^2}\bar{\Omega}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z}\Phi'(z) \tag{3.5}$$

用级数展开不难验证，$\Omega(z)$ 有如下性质：

1，$\Omega(z)$ 在 $z \to 0$ 时解析

2，若 $|z| < R$ 时有

$$\Phi(z) = A_0 + A_1 z + \cdots \tag{3.6}$$

则 $|z| > R$ 时有

$$\Omega(z) = \bar{A}_0 + O(z^{-2}) \tag{3.7}$$

于是

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right) - \bar{z}\left(\frac{\bar{z}}{R^2} - \frac{1}{z}\right)\overline{\Psi(z)} \tag{3.8}$$

在边界两侧：$z = t = R\sigma$，有：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^+ + i\tau_{r\theta}^+ &= \Phi^+(t) + \Omega^-(t) = p = p_1 + ip_2 \\ \sigma_r^- + i\tau_{r\theta}^- &= \Phi^-(t) + \Omega^+(t) = p\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

从而

$$\left.\begin{aligned}[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0 \\ [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2p\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

注意 $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ 在沿裂纹割开的全平面上解析,不难推出:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(z) - \Omega(z) = D_0 \\ &\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z}dt + \frac{C_1 z + C_0}{X(z)}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

其中, $X(z) = \sqrt{(z-Re^{i\alpha})(z-Re^{-i\alpha})}$, D_0, C_0, C_1 为常数, L 表示裂纹的左侧(从 $\theta = -\alpha$ 到 α). 上式又可写为:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z}dt + \frac{C_1 z + C_0}{2X(z)} + \frac{D_0}{2} \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z}dt + \frac{C_1 z + C_0}{2X(z)} - \frac{D_0}{2}\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

利用 $\Omega(z)$ 的第二个性质以及远场应力为零(即 $\Phi(\infty) = 0$), 可得:

$$\left.\begin{aligned}&C_0 = 0 \\ &C_1 = -D_0 = \frac{1}{2\pi Ri}\int_L \frac{2}{3}\,\frac{X(t)p(t) - 2\overline{X(t)p(t)}}{t}dt\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

将 C_0, C_1, D_0 代入 (3.12) 式就可得到 $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, 从而可以求出应力分量 σ_{ij}, 而这时的应力分量是由待定函数 $p(t) = p_1(t) + ip_2(t)$ 的积分表示的,说明我们得到了 (3.1) 式中的 $g_{\alpha ij}^k$,从而再在其他边界上经坐标变换就可得到影响函数 $G_{\alpha i}^{km}$. 用上面的方法, 任何带圆弧形裂纹的有限弹性体问题将会得到解决.

文献 [6—8] 曾用了分布源法的思想来建立积分方程. 尽管他们得到的方程的核不是 Fredholm 型的,也说明这种方法是可行的.

对于一般有限的弹性体, 用点源法求影响函数往往失败. 因为无位移条件约束的有限弹性体在单个集中力作用下是不平衡的,而用分布源法却容易成功. 对于复连通问题,用点源法往往会引入弹性常数, 给求解带来麻烦, 而用分布源法则可巧妙地避开这个问题. 我们看到, 分布源法就是从一个函数子集(例如自成平衡的力函数子集)中去寻找解答. 利用积分方程组的性质,我们可确信解答确实在这个子集之中. (3.1)式的 $g_{\alpha ij}^k(t, M)$ 是一种广义的弹性应力基本解. 它的引入,正如数学上的其他广义函数一样,会给运算带来方便.

四、保角变换方法

利用复变函数求解平面弹性力学问题的一大优点是可以把一些复杂边界的单连通区域通过保角映射变为一个单位圆内的问题进行求解. 在运用 Fredholm 积分方程组求解复连通区域问题时,由于每个覆盖体可以是仅含一条边界的单连通区域,用保角变换构造影响函数是很方便的. 这种方法的关键思想仍然属于分布源法, 即设法把应力用边界上

分布力的积分来表示．然而由于它运算方法本身的特点，我们称为保角变换方法．

我们着重讨论物体的某一边界到单位圆的变换 $z=\omega(\zeta)$ 能用有理函数表示时，构造影响函数的一般方法．显然这种方法在工程上是很有意义的．因为任一复杂形状的闭曲线都存在一个保角变换使其映射为单位圆．只要对这变换作 Laurent 展开，取有限项计算，就可以达到足够的精确度．

我们先假定 $\omega(\zeta)$ 是一个多项式，即覆盖体 A_k 是一个有限区域：

$$z=\omega(\zeta)=C_1\zeta+C_2\zeta^2+\cdots+C_n\zeta^n \tag{4.1}$$

又设在 A_k 的边界（为闭边界）上的待定分布力系为 $F=X+iY$，它是一个自成平衡力系．按[5]的思路，应力分量将由两个单位圆内解析的函数 $\varphi(\zeta)$、$\psi(\zeta)$ 的导数给出，而这两个函数由如下关系确定：

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{fd\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{4.2}$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\bar{f}d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma-\overline{\varphi(0)} \tag{4.3}$$

其中，

$$f=i\int_{z_0}^{z}(X+iY)ds=\int_{\sigma_0}^{\sigma}F|\omega'(\sigma)|\frac{d\sigma}{\sigma} \tag{4.4}$$

而 $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$ 是有理函数：

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{C_1\sigma+\cdots+C_n\sigma^n}{\bar{C}_1+\cdots+\dfrac{n\bar{C}_n}{\sigma^{n-1}}}=\sigma^n\frac{C_1+\cdots+C_n\sigma^{n-1}}{\bar{C}_1\sigma^{n-1}+\cdots+n\bar{C}_n} \tag{4.5}$$

若展为 σ 的 Laurent 级数，最高次幂仅为 n，于是，

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{1}{\sigma-\zeta}=(b_n\sigma^n+\cdots+b_1\sigma+b_0+\cdots)\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{\zeta}{\sigma^2}+\frac{\zeta^2}{\sigma^3}+\cdots\right) \tag{4.6}$$

以下我们将知，上式的 b_j 只要求到与 b_0 有关的项即可．注意到 $\bar{\varphi}'\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ 在 $|\zeta|>1$ 是解析的，且 $\bar{\varphi}'(0)$ 有界，应有：

$$\oint_\gamma\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma^k}d\sigma=0\quad(k=2,3,\cdots) \tag{4.7}$$

故将 (4.6) 式的括号乘开代入 (4.2) 式，得到具有退化核的积分方程：

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\sum_{l=0}^{n}\zeta^l a_l(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f}{\sigma-\zeta}d\sigma \tag{4.8}$$

其中，

$$a_l(\sigma)=\sum_{k=l}^{n}b_k\sigma^{k-l-1}\qquad(l=0,1,\cdots n) \tag{4.9}$$

记：

$$K_l=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma a_l(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma \qquad (l=0,\ 1,\ \cdots n) \tag{4.10}$$

(4.8) 式对 ζ 求导,等号右端作一次分部积分,并注意 F 是自成平衡力系,得:

$$\varphi'(\zeta)+\sum_{l=1}^{n}lK_l\zeta^{l-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F|\omega'(\sigma)|}{\sigma(\sigma-\zeta)}d\sigma \tag{4.11}$$

利用下式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=\sum_{l=0}^{n}K_l\zeta^l \qquad (|\zeta|<1)$$

不难求出:

$$\psi'(\zeta)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F(\sigma)|\omega'(\sigma)|}{\sigma-\zeta}\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)\right\}-\sum_{l=1}^{n}\frac{l\bar{K}_l}{\zeta^{l+1}} \tag{4.12}$$

(4.11)和(4.12) 式已给出了 $\varphi'(\zeta)$, $\psi'(\zeta)$, 但还有 n 个复常数 $K_1,\cdots K_n$ (相当于 $2n$ 个实常数) 必须给定为了构造影响函数, 这 n 个常数也必须用边界上分布力源 F 的积分来表示. 在 (4.11) 式中令 $\zeta\to t(|t|=1)$, 根据 Plemelj 公式有:

$$\varphi'(t)+\sum_{l=1}^{n}lK_lt^{l-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F(\sigma)|\omega'(\sigma)|}{\sigma(\sigma-t)}d\sigma+\frac{F(t)|\omega'(t)|}{2t}$$

上式取共轭,注意 $\bar{\sigma}=1/\sigma$, $\bar{t}=1/t$, 得:

$$\overline{\varphi'(t)}+\sum_{l=1}^{n}\frac{l\bar{K}_l}{t^{l-1}}=\frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{t\overline{F(\sigma)}|\omega'(\sigma)|}{\sigma-t}d\sigma+\frac{t\overline{F(t)}|\omega'(t)|}{2}$$

用 $\frac{1}{2\pi i}a_j(t)$ 乘上式作积分,注意到 (4.10) 式和

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{a_j(t)}{t^{l-1}}dt\right)l\bar{K}_l=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\sum_{m=j}^{n}b_mt^{m-j-1}}{t^{l-1}}dt\right)l\bar{K}_l$$

$$=\sum_{m=j}^{n}(m-j+1)b_m\bar{K}_{m-j+1}$$

以及由 Plemelj 公式可推出的结果:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{ta_j(t)}{\sigma-t}dt=-\frac{1}{2}\sigma a_j(\sigma)$$

得到:

$$K_j+\sum_{m=j}^{n}(m-j+1)b_m\bar{K}_{m-j+1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\sigma\overline{F(\sigma)}|\omega'(\sigma)|a_j(\sigma)d\sigma$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots n) \tag{4.13}$$

这样,分开实部和虚部,就得到 $2n$ 个方程, 把 $2n$ 个实的常数用 F 的积分表示出来了. 结合 (4.11)、(4.12) 式的 $\varphi'(\zeta)$, $\psi'(\zeta)$ 就能使应力分量由 F 的积分表示出来,从而构成影响函数.

值得注意的是, (4.13) 式的 $2n$ 个实常数中有一个是不独立的,因为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\left\{\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}$$

从而 $\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ 加一个虚常数不影响应力分量．由 (4.11) 式可推知某一个 K_j 的实部或虚部不独立．为使问题确定起见，一般可取 $\mathrm{Im}K_1=0$，从而 (4.13) 式只有 $2n-1$ 个实系数方程式．

如果 A_k 是带洞的无限区域，一般情况下，变换式可写为：

$$z=\omega(\zeta)=\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+\cdots+C_n\zeta^n \tag{4.1$'$}$$

这时 $\dfrac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}$ 的 Laurent 展式最高幂次为 $n-2$，若 $n>2$，仍可用以上的方法求解．若 $n=1, 2$，则不需要引入常数 K_j 就能求解．因为这时 (4.8) 式成为：

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f}{\sigma-\zeta}d\sigma+\text{const} \tag{4.8$'$}$$

文献 [8] 处理的椭圆孔的变换就属于这种情况．

若 $\omega(\zeta)$ 为一般的有理分式，处理方法是一样的，限于篇幅，这里不再叙述．

五、极　限　法

对一般的曲线边界问题，还有一种很有效的方法．我们先看 [7]，在其中一个矩形的边界用四段直线(裂纹)来代替．我们再看 [9, 10]，在那里一条任意形状的边界曲线用许多有限长直线来代替．这就提示我们，任何曲线边界都是可以用另一组内割或外切曲线来逼近的．只要在另一组曲线上能给出分析解，我们就有可能构造影响函数．下面我们将对这种逼近取极限，得到一种与 (2.2) 式不同的积分方程组，并从中论述构造影响函数的方法．

为了清晰起见，我们以一段外凸的光滑边界为例进行论述，见图 5．设 C_m 是一段光滑的曲线，用折线 C_{m_1}, C_{m_2}, $\cdots C_{m_N}$ 将其分成 N 部分，于是每段折线都可以用半平面上作用集中力的解答求得影响函数．把这些折线的积分项从 Fredholm 积分方程组中分离出来，则第 m_l 折线上的方程可写为如下形式：

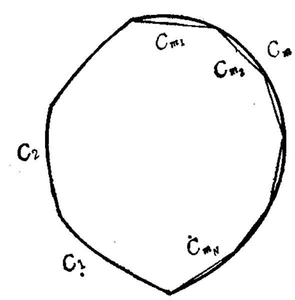

图　5

$$p_i^{m_l}(s)+\sum_{\substack{\alpha,j\\ j\neq l}}\int_{C_{m_j}} p_\alpha^{m_j}(t)G_{\alpha i}^{m_j m_l}(t,s)dt+\sum_{\substack{\alpha,k\\ k\neq m}}\int_{C_k} p_\alpha^k(t)G_{\alpha i}^{k m_l}(t,s)dt=f_i^{m_l}(s) \tag{5.1}$$

当折线段数量 N 无穷增大，各段的弧长趋向零时，有：

$$\sum_{\substack{j\\ j\neq l}}^{N}\int_{C_{m_j}} p_\alpha^{m_j}(t)G_{\alpha i}^{m_j m_l}(t,s)dt \to \int_{C_m} p_\alpha^m(t)G_{\alpha i}^{m m_l}(t,s)dt$$

上式成为：

$$p_i^{m_l}(s)+\sum_\alpha\int_{C_m} p_\alpha^m(t)G_{\alpha i}^{m m_l}(t,s)dt+\sum_{\substack{\alpha,k\\ k\neq m}}\int_{C_k} p_\alpha^k(t)G_{\alpha i}^{k m_l}(t,s)dt=f_i^{m_l}(s) \tag{5.2}$$

由于 $p_i^{m_l}(s)$ 是 $p_i^m(s)$ 在 C_m 上某一点处的值,故把 m_l 改为 m,得到 C_m 上的方程:

$$p_i^m(s)+\sum_{\alpha}\int_{C_m}p_\alpha^m(t)G_{\alpha i}^{mm}(t,s)dt+\sum_{\substack{\alpha,k\\k\neq m}}\int_{C_k}p_\alpha^k(t)G_{\alpha i}^{km}(t,s)dt=f_i^m(s)$$

或统一写为:

$$p_i^m(s)+\sum_{\alpha,k}\int_{C_k}p_\alpha^k(t)G_{\alpha i}^{km}(t,s)dt=f_i^m(s) \tag{5.3}$$

$$(m=1,\cdots n,\ i=1,2,3)$$

不难看出,$G_{\alpha i}^{mm}(t,s)$ 是 C_m 上 t 点沿 α 方向作用单位力时,在 C_m 上 s 点引起的沿 i 方向的面力分量,可以说,(5.3) 式是比 (2.2) 式更为普遍的 Fredholm 积分方程组.

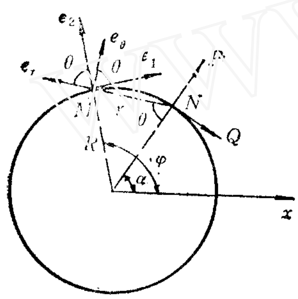

图　6

下面以圆为例说明如何构造 $G_{\alpha i}^{mm}(t,s)$. 见图 6,在 N 点处作用 P、Q 力,则在 M 点处在基 ($\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$) 下有如下的应力分量(半平面解):

$$\sigma_r=\frac{2}{\pi r}(P\cos\theta+Q\sin\theta),\ \sigma_\theta=0,\ \tau_{r\theta}=0$$

作坐标变换,得到基矢量 ($\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$) 下的应力分量为:

$$\sigma_2=\frac{2}{\pi r}(P\cos\theta+Q\sin\theta)\cos^2\theta$$

$$\tau_{12}=-\frac{2}{\pi r}(P\cos\theta+Q\sin\theta)\sin\theta\cos\theta$$

注意到 $r=2R\cos\theta$, $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi-\alpha}{2}$, 得:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2(\varphi)&=\frac{1}{\pi R}\left[P(\alpha)\sin^2\frac{\varphi-\alpha}{2}+Q(\alpha)\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}\right]\\ \tau_{12}(\varphi)&=-\frac{1}{\pi R}\left[P(\alpha)\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}+Q(\alpha)\cos^2\frac{\varphi-\alpha}{2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

上式中,函数 $G_{\alpha i}^{mm}$ 已经给出. 用积分代替集中力 $P(\alpha)$、$Q(\alpha)$,得到圆边界上法线和切线方向的积分方程组:

$$\left.\begin{aligned}p(\varphi)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(\alpha)\sin^2\frac{\varphi-\alpha}{2}d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q(\alpha)\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}d\alpha+\cdots=f_1\\ q(\varphi)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(\alpha)\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}d\alpha-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q(\alpha)\cos^2\frac{\varphi-\alpha}{2}d\alpha+\cdots=f_2\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

省略号表示其他边界的贡献.

极限法的运用最灵活. 例如,无论是平面问题还是空间问题的光滑的或分片光滑的外边界、内边界、凸边界、凹边界,都可以用无穷大体中作用一集中力的解答来构造影响函数. 由于篇幅有限,这里不再一一推导. 我们看到,经过极限处理,得到的典型方程 (5.3) 的解答将与逼近曲线的长度和数目无关. 这无疑比 [9—10] 的工作进了一步.

参　考　文　献

[1] 王良国、林　晓，弹性力学中 Fredholm 积分方程组解法的表达通式及其讨论，力学学报.

[2] Timoshenko, S., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, (1943).

[3] Westergaard, H. M., *J. Appl. Mech.*, **66**(1939), p. 49.

[4] Hartranft, R. J. and Sih, G. C., Mechanics of Fracture, I, P. 179, ed. Sih G. C., (1973).

[5] Мусхелишвили Н. И., «数学弹性力学中的几个基本问题» 赵惠元译，科学出版社，(1958).

[6] Rudolphi T. J. and Ashbaugh, N. E., *Int. J. Fract*, 14(1978) 527—542.

[7] Gecit, M. R., *Int. J. Engng Sci.*, **21**, 19(1983).

[8] 汤任基、王银邦，带有椭园孔的裂纹系问题，力学学报，16，6(1984).

[9] Aleksandrov, A. Ya. et al, *Mechanics of Solids*, 18, 6(1983).

[10] Kosenyuk, V. K., *Mechanics of Solids*, 15, 6(1980).

SOME APPROACHES TO FORM INTERACTING FUNCTIONS IN FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS METHOD OF ELASTIC MECHANICS

Lin Xiao　Wang Liangguo

(East China Institute of Technology)

Abstract　In this paper, based on the work done by many people, we have put forward four basic approaches which are used to form interacting functions in Fredholm Integral Equations Method of elastic mechanics, namely: point source approach, distributed source approach, angle-preserving mapping approach and limit approach, and dealt with their applied fields.

Key words: elastic mechanics, integral equation, interacting functions, covering domain.