第19卷 第4期 力 学 学 报 Vol. 19, No. 4
1987 年 7 月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1987

动态焦散线实验方法及其在断裂力学中的初步应用

苏先基 雷志辉
(北京大学力学系)

提要 本文给出了静、动态的焦散线方程，和确定裂纹尖端位置、动应力强度因子 K_I^d 的计算公式，并证明了在裂纹扩张速度较低时，可用静态公式计算．还研究了带预裂纹的三点弯曲梁和圆环在冲击载荷下的断裂问题，得到了系列动态焦散线照片、裂尖位置和动应力强度因子随时间的变化曲线．

关键词 动态焦散线、断裂力学．

一、引 言

动态应力强度因子和裂纹扩张速度是断裂力学中两个很重要的参数．由于问题的复杂性，即使静态问题，从解析理论和数值计算求解也是困难的，对动态问题就更加困难了．因此，探寻解决这问题的实验方法就显得十分重要了．

焦散线实验方法是 Manogg[1,2] 在1964年提出来的．这种方法在测定裂尖位置和应力强度因子方面具有测量方便、计算简单、精度也较高等优点，现已发展成为研究断裂力学的一个重要的实验方法．近几年来，国内的研究工作者对焦散线法的兴趣也日益浓厚，但由于设备条件的限制，现仍限于静态的实验．

本文给出了静、动态情况下的焦散线方程，和确定裂尖位置、应力强度因子的公式，并证明了在裂纹扩张速度较低时，用静态公式引入的误差，一般可忽略不计．还研究了带预裂纹的三点弯曲梁和圆环在冲击载荷下的断裂问题，得到了上述各种情况的动态焦散线系列照片，据此得出裂尖位置和动应力强度因子随时间变化的曲线．

二、焦散线法的原理

如图1所示，当一个有裂纹的试件承受拉伸载荷时，裂尖附近区域的厚度和材料的折射率都将减小．当用一点光源照射这模型，并在距模型 Z_0 处放一屏幕时，则在对应于裂尖附近的区域，由于接收不到光而形成一个暗斑，称为焦散斑；而在焦散斑的边缘，将集中无数条光线而形成一条亮线，称为焦散线．

1. 焦散线的数学描述

以前表面反射形成的焦散线为例，如图1(b)所示．假定入射的为平面光波，波前方

本文于1985年4月18日收到第一次稿，1986年12月16日收到第二次稿．

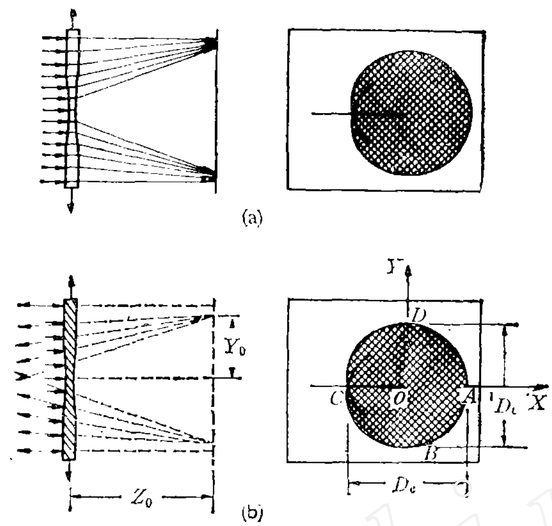

图 1　焦散线法原理示意图

程为 $z = C$，C 为任意常数. 经模型反射后，波前方程变成 $z - \Delta s = C$. Δs 为反射后产生的光程差.

模型上裂尖附近任一点 $P(x, y)$，与它在参考面上的像 $P'(X, Y)$ 之间的映射关系为:

$$
\begin{aligned}
X - x &= [Z_0 - f(x, y)]\frac{\partial \Delta s}{\partial x} \\
Y - y &= [Z_0 - f(x, y)]\frac{\partial \Delta s}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $f(x, y)$ 为变形后模型表面的方程. 当参考面距模型足够远，即 $Z_0 \gg f(x, y)$ 时，上式可简化成:

$$
\begin{aligned}
X &= x + Z_0\frac{\partial \Delta s}{\partial x} \\
Y &= y + Z_0\frac{\partial \Delta s}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

或者，写成向量形式为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + Z_0 \mathrm{grad}\Delta s \tag{3}$$

当用收敛光或发散光照明时，有

$$\boldsymbol{R} = \lambda_m \boldsymbol{r} + Z_0 \mathrm{grad}\Delta s \tag{4}$$

这里 λ_m 是光学系统的放大倍数. 如模型与光源的距离为 Z_i，则

$$\lambda_m = \frac{Z_i \pm Z_0}{Z_0} \tag{5}$$

(2)—(4) 式即为焦散线方程. 由于焦散线上的点是由无数条光线汇集而成的，所以焦散线是一条奇异曲线. 根据衍射理论，产生奇异性的充要条件是映射方程的 Jacobian 行列式为零. 即

$$J=\frac{d\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{r}}=\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y}\\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y}\end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

将 (4) 式代入 (6) 式，可得焦散线的初始曲线方程

$$\lambda_m^2+\lambda_m Z_0\left[\frac{\partial^2\Delta s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta s}{\partial y^2}\right]+Z_0^2\left[\frac{\partial^2\Delta s}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Delta s}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\Delta s}{\partial x\partial y}\right)^2\right]=0 \tag{7}$$

以上推导和结果，对透射和后表面反射的情况也是对的，只是 Δs 应换成相应的光程差.

2. 光程差 Δs 与主应力 σ_1 和 σ_2 的关系

假定光线近似于垂直入射，忽略斜射对成像的影响；模型的前后表面在变形前互相平行，变形后对中面对称；模型处于平面应力状态. 则可导出 Δs 与 σ_1 和 σ_2 的关系如下：

A. 前表面反射时

$$\Delta s_f=dC_f(\sigma_1+\sigma_2) \tag{8}$$

其中：d 为模型厚度，$C_f=-\dfrac{\nu}{E}$.

B. 后表面反射时

$$\Delta s_{r1,2}=dC_r[(\sigma_1+\sigma_2)\pm\xi_r(\sigma_1-\sigma_2)] \tag{9}$$

其中：$C_r=\alpha_r+\beta_r$，$\xi_r=\dfrac{\alpha_r-\beta_r}{\alpha_r+\beta_r}=\dfrac{A-B}{\alpha_r+\beta_r}$，

$$\alpha_r=A-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\nu}{E},\quad \beta_r=B-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\nu}{E},$$

A 和 B 为绝对应力光学系数.

C. 透射时

$$\Delta s_{t_{1,2}}=dC_t[(\sigma_1+\sigma_2)\pm\xi_t(\sigma_1-\sigma_2)] \tag{10}$$

其中：$C_t=\dfrac{\alpha_t+\beta_t}{2}$，$\xi_t=\dfrac{\alpha_t-\beta_t}{\alpha_t+\beta_t}$

$$\alpha_t=A-(n-1)\frac{\nu}{E},\quad \beta_t=B-(n-1)\frac{\nu}{E}.$$

对光学各向同性材料和近似光学各向同性材料，有 $A=B$ 和 $A\doteq B$，于是，(9) 式和 (10) 式变成

$$\Delta s_r=dC_r(\sigma_1+\sigma_2) \tag{11}$$

$$\Delta s_t=dC_t(\sigma_1+\sigma_2) \tag{12}$$

3. 稳定裂纹的焦散线方程

由线弹性理论的复数解法，有

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\phi(z)$$

其中：$\phi(z)$ 为 Muskhelishivili 复势函数，$z=x+iy$. 于是，由 (4) 式和 (6) 式可分别得出：

$$\boldsymbol{R}=\lambda_m\boldsymbol{r}+4dcZ_0\mathrm{grad}[\mathrm{Re}\phi(z)], \tag{13}$$

$$\left|\frac{4dcZ_0}{\lambda_m}\phi''(z)\right| = 1. \tag{14}$$

由线弹性断裂力学理论，如把坐标原点取在裂尖，并以裂纹扩展方向为 x 轴，则

$$K = 2(2\pi)^{1/2}\lim_{z\to 0}[z^{1/2}\phi(z)]$$

取第一项，$\phi(z) = \dfrac{K}{2(2\pi z)^{1/2}}$. 通常 $K = K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}}$，但在张开型断裂问题中 $K_{\mathrm{II}} = 0$，即 K 为实数. $\phi''(z) = \dfrac{3K_{\mathrm{I}}}{8(2\pi)^{1/2}z^{5/2}}$. 代入 (14) 式，得出

$$\left|\frac{3cdZ_0K_{\mathrm{I}}}{2(2\pi)^{1/2}\lambda_m}z^{-5/2}\right| = 1$$

如

$$z = re^{i\theta},$$

则

$$r = r_0 = \left[\frac{3dZ_0K_{\mathrm{I}}}{2(2\pi)^{1/2}\lambda_m}|c|\right]^{2/5}$$

或

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{2(2\pi)^{1/2}\lambda_m}{3dZ_0|c|}r_0^{5/2} \tag{15}$$

这表明初始曲线是以裂尖为圆心. 以 r_0 为半径的一个圆. 通过调整光学系统的放大倍数 λ_m，可以得到不同的 r_0. 但是，对给定的光学系统和模型材料，r_0 只与 K_{I} 有关. 所以，可以通过 r_0 来确定应力强度因子 K_{I}. 由 (13) 和 (15) 式可以得出线弹性断裂力学条件下的张开型稳定裂纹的焦散线方程为:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_m r_0\left(\cos\theta + \frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\right), \\ Y &= \lambda_m r_0\left(\sin\theta + \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\theta\right). \end{aligned} \tag{16}$$

4. 动态裂纹的焦散线方程

在焦散线理论中，静、动态的差别主要来自两个方面：一是应力光学常数 c 与加载速率有关；二是动态裂纹尖端附近的应力分布与静态不同，而且是随时间变化的. 所以，原则上是不能用静态的公式去计算动态应力强度因子.

对于一个以常速度沿 x 轴传播的 I 型裂纹，裂尖的应力场可以表示成如下形式[3,4]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{\mathrm{I}}^d(t)}{\sqrt{2\pi}}B_{\mathrm{I}}(v)\left[(1+2\alpha_l^2-\alpha_s^2)\frac{\cos\frac{\theta_l}{2}}{r_l^{1/2}} - \frac{4\alpha_l\alpha_s}{1+\alpha_s^2}\frac{\cos\frac{\theta_s}{2}}{r_s^{1/2}}\right], \\ \sigma_y &= \frac{K_{\mathrm{I}}^d(t)}{\sqrt{2\pi}}B_{\mathrm{I}}(v)\left[-(1+\alpha_s^2)\frac{\cos\frac{\theta_l}{2}}{r_l^{1/2}} + \frac{4\alpha_l\alpha_s}{1+\alpha_s^2}\frac{\cos\frac{\theta_s}{2}}{r_s^{1/2}}\right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{\mathrm{I}}^d(t)}{\sqrt{2\pi}}B_{\mathrm{I}}(v)\cdot 2\alpha_l\left[\frac{\sin\frac{\theta_l}{2}}{r_l^{1/2}} - \frac{\sin\frac{\theta_s}{2}}{r_s^{1/2}}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

其中：$r_le^{i\theta_l} = x_l + iy_l = x + i\alpha_l y$，$r_se^{i\theta_s} = x_s + iy_s = x + i\alpha_s y$，

$$\alpha_l = \left[1 - \left(\frac{v}{c_l}\right)^2\right]^{1/2}, \quad \alpha_s = \left[1 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$B_1(v)=\frac{1+\alpha_s^2}{4\alpha_l\alpha_s-(1+\alpha_s^2)^2},\quad v \text{ 为裂纹扩展速度},$$

c_l、c_s 分别为纵波和剪切波的速度.

将 (17) 式代入 (13) 式就得到动态裂纹的焦散线方程

$$\boldsymbol{R}=\lambda_m\boldsymbol{r}+Z_0cd\,\mathrm{grad}_{x,y}\left[K'r_l^{-1/2}\cos\frac{\theta_l}{2}\right].$$

或者

$$X=\lambda_m x_l+\mu r_l^{-3/2}\cos\frac{3\theta_l}{2},$$
$$Y=\lambda_m\frac{1}{\alpha_l}y_l+\mu\alpha_l r_l^{-3/2}\sin\frac{3\theta_l}{2}. \tag{18}$$

其中：$x=r_l\cos\theta_l$，$y=r_l\sin\theta_l$

$$\mu=Z_0cdK'=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}Z_0cdK_1^d(t)\frac{(1+\alpha_s^2)(\alpha_l^2-\alpha_s^2)}{4\alpha_s\alpha_l-(1+\alpha_s^2)^2} \tag{19}$$

由 $J=0$，可以得出动态裂纹的初始曲线方程为

$$r_l^5+\frac{3}{2}\frac{\mu}{\lambda_m}r_l^{5/2}(\alpha_l^2-1)\cos\frac{5}{2}\theta_l-\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha_l\mu}{\lambda_m}\right)^2=0 \tag{20}$$

5. 裂纹尖端位置和应力强度因子的确定

A. 对于稳定裂纹：由 (16) 式确定的焦散线如图 1(b) 所示. 由这图和方程很容易求得:

$$D_l=3\lambda_m r_0 \tag{21}$$
$$D_t=3.17\lambda_m r_0 \tag{22}$$
$$\overline{OA}=0.5556D_l=0.5257D_t \tag{23}$$

将 (21) 或 (22) 式代入 (15) 式，可以得出

$$K_1=\frac{0.1072}{dZ_0|c|}\cdot\frac{D_l^{5/2}}{\lambda_m^{3/2}}=\frac{0.0934}{dZ_0|c|}\cdot\frac{D_t^{5/2}}{\lambda_m^{3/2}} \tag{24}$$

式中 d、Z_0、$|c|$、λ_m 均为常数. 所以，只要测出 D_l 或 D_t 的长度和 A 点的位置，就可定出裂尖的位置和算出应力强度因子.

B. 对于动态裂纹：如 $v/c_l\leqslant 0.2$，则 $|\alpha_l^2-1|=\left(\frac{v}{c_l}\right)^2\leqslant 0.04$. 这时，可略去 (20) 式中带有 (α_l^2-1) 的项. (20) 式变成

$$r_l=r_0'=\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha_l\mu}{\lambda_m}\right)^{2/5} \tag{25}$$

可见，动态的初始曲线也可近似为以裂尖为心的圆，但其半径是随时间变化的. 同样，有

$$X=r_0'\lambda_m\left[\cos\theta_l+\frac{2}{3}\alpha_l^{-1}\cos\frac{3\theta_l}{2}\right],$$
$$Y=\frac{r_0'}{\alpha_l}\lambda_m\left[\sin\theta_l+\frac{2}{3}\alpha_l\sin\frac{3\theta_l}{2}\right]. \tag{26}$$

$$D_l=3\lambda_m r_0',\quad D_t=3.17\lambda_m r_0' \tag{27}$$

对有机玻璃,当 $v < 300$ m/s 时,有

$$\frac{4\alpha_s\alpha_l - (1+\alpha_s^2)}{(1+\alpha_s^2)(\alpha_l^4 - \alpha_s^4)} \doteq 1.$$

于是,由 (25) 式可以得到

$$K_{\rm I}^d(t) = \frac{0.0934}{Z_0 d|c|\lambda_m^{3/2}} D_t^{5/2} = \frac{0.1072}{Z_0 d|c|\lambda_m^{3/2}} D_l^{5/2} \tag{28}$$

这与稳定裂纹时的公式 (24) 完全一样. 这说明当 v/c 很小时,动态的裂尖位置和应力强度因子仍可用静态的公式计算.

三、实验结果和讨论

1. 模型的形状和尺寸如图 2 所示. 其中圆环模型有三种: R_A 只在 A 处有裂纹; R_B 只在 B 处开予裂纹; R_{AB} 则在 A、B 处都有予裂纹. 模型材料均为有厚 2.14mm 的有机玻璃. 试验是用落锤加载,并用图 3 所示光路系统记录的.

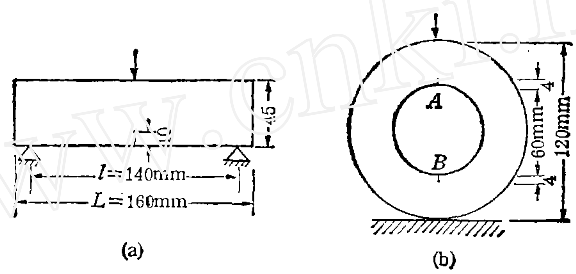

图 2 模型的形状和尺寸

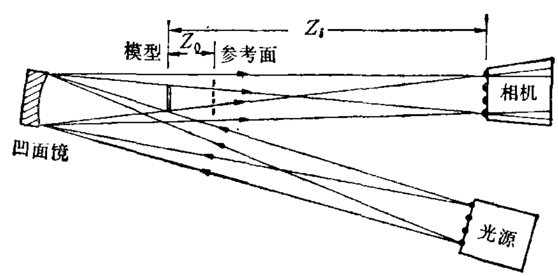

图 3 光路布置图

2. 图 4—7 分别给出了四种模型的动态焦散线系列照片. 可以看出: 在失稳开裂前,焦散斑的尺寸都有一段增长过程,当达到极大值时,裂纹就开裂扩展. 开裂后焦散斑尺寸就会减小,但在扩展过程中变化不大.

3. 图 8—10 分别给出了各种状况的裂纹长度随时间变化的曲线. 其中有的完全是直线;有的在大部分时间内也是直线,只是在裂纹扩展到接近加载头附近的边界时,速度才稍稍下降. 裂纹扩展速度也在图中注明了,大都在 200 m/s 左右.

4. 图 11—13 是动应力强度因子 $K_{\rm I}^d$ 随时间变化的曲线. 图 12 中 R_A 和 R_{AB} 的 A 裂纹,起裂后 $K_{\rm I}^d$ 突然下降,而在裂纹扩展接近边界之前的这个阶段里,$K_{\rm I}^d$ 几乎不变. 而在图 13 中,开裂后 $K_{\rm I}^d$ 缓缓下降.

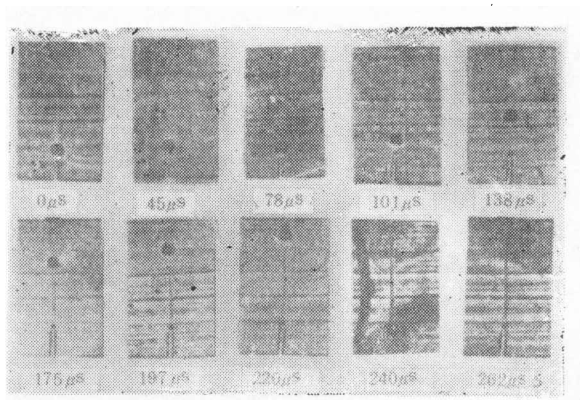

图 4　三点弯曲梁的动态焦散线照片

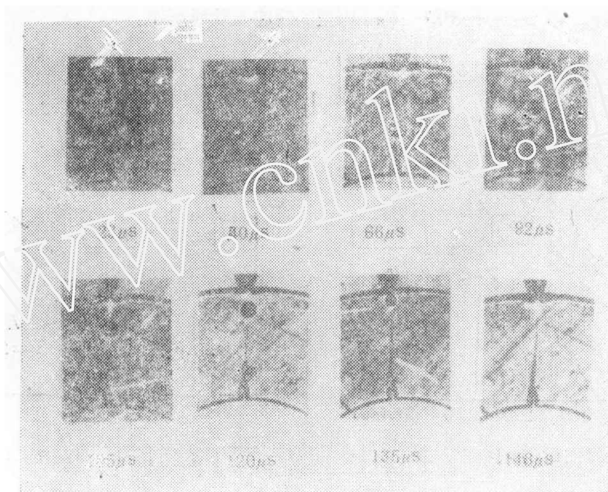

图 5　R_A 模型的动态焦散线照片

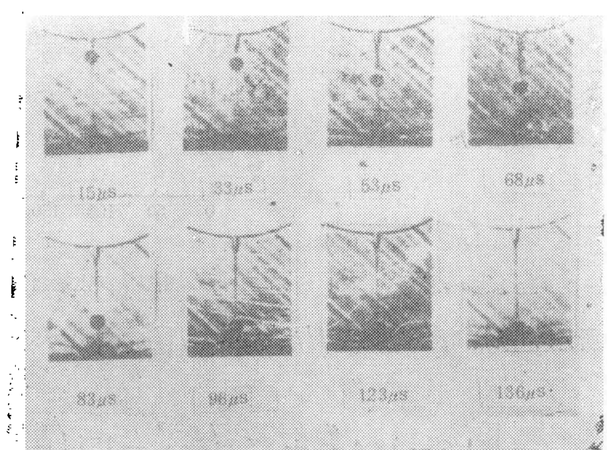

图 6　R_B 模型的动态焦散线照片

5. 通过有机玻璃直杆，用动态电测法[5] 测得的纵波波速 $c_l = 2140$ m/s. 而所有实验的裂纹扩张速度 v 均在 200m/s 左右，所以，在 K_I^d 的计算中忽略了动态效应的影响.

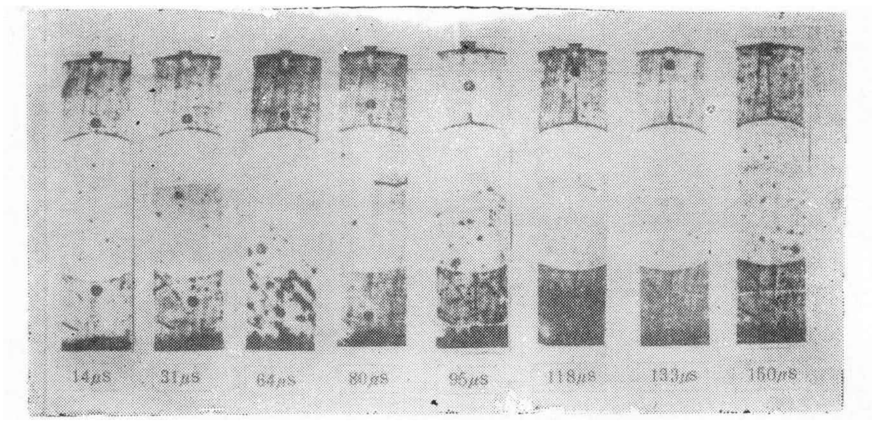

图 7　R_{AB} 模型的动态焦散线照片

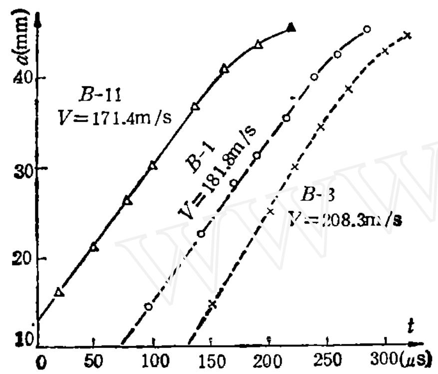

图 8　三点弯曲梁的 a-t 曲线

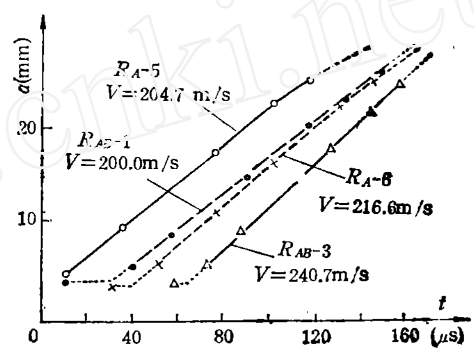

图 9　圆环模型 A 裂纹的 a-t 曲线

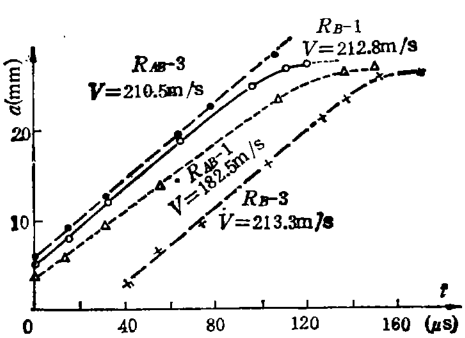

图 10　圆环模型 B 裂纹的 a-t 曲线

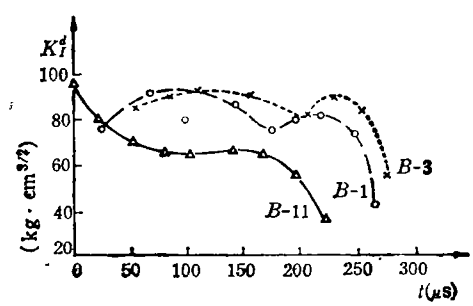

图 11　三点弯曲梁的 $K_I^d \sim t$ 曲线

6. 对图 2 (a) 所示的三点弯曲梁，当 $l/H = 4$，$a/H = 0.4$—0.6 时，边界配置法给出的公式为[6]：

$$\frac{K_{\mathrm{I}}d\sqrt{H}}{P} = \sqrt{\frac{a}{H}}\left[11.6 - 18.4\frac{a}{H} + 87.2\left(\frac{a}{H}\right)^2 - 151\left(\frac{a}{H}\right)^3 + 157\left(\frac{a}{H}\right)^4\right]$$

对一个给定的试件，a、H 和 d 均为已知．当载荷 P 给定后，即可求出对应的 K_{I}．同时由这载荷 P 作用下的焦散线测出 D_l 或 D_t．于是由 (24) 式可以算出 c_t．我们用这种方法求得的 $c_t = 1.056 \times 10^{-10}\,\mathrm{M}^2/\mathrm{N} = 1.035 \times 10^{-5}\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{kg}$．文献 [7]、[8] 给出的 $c_t =$

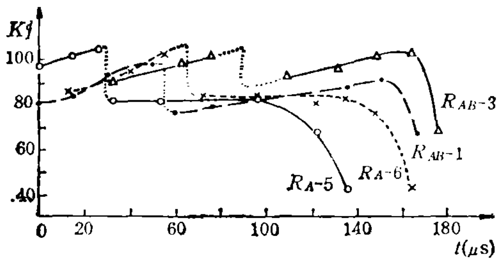

图 12　圆环模型 *A* 裂纹的 $K_I^d \sim t$ 曲线

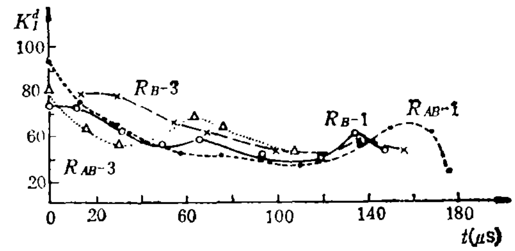

图 13　圆环模型 *B* 裂纹的 $K_I^d \sim t$ 曲线

1.08×10^{-10} M²/N，比我们的结果大 2.3%；而文献 [9] 给出的 $c_t = 1.008 \times 10^{-5}$ cm²/kg，比我们的结果小 2.6%。这说明，用这种方法有足够的精度，且简便易行。但是，动态常数的测定问题仍有待解决。

7. 这种方法也可用反射光路直接研究非透明材料（如金属、岩石）的断裂问题。还可用于求解混合型应力强度因子、裂纹分叉和止裂、曲裂等问题，所以焦散线方法是一个很有潜力的方法。

参　考　文　献

[1] Manogg. P., Anwendung der Schattenoptic Zur Untersuchung des Ierripvorgangs von Platten, Dissertation, Freiburg Germany, (1964)
[2] Manogg, P., *Int. J. of Fract. Mech.*, **2**, 4, (1966), 604—613.
[3] Rice, J. R., Fracture, Ed. by H. Liebowitz, **2**, (1968), 235—238.
[4] Rasakis, A. J., *Eng. Fract. Mech.*, **13** (1980), 331—347.
[5] 苏先基、刘承，实验力学，**1**，1，(1986)，23—31.
[6] 王铎等，断裂力学，p. 16，广西人民出版社.
[7] Theocaris, P. S., *Mech.of Fract.*, **7**, Ed. by G. C. Sih, (1981), 189—252.
[8] Bernert, J. and Kalthoff J. F., 同上, (1981), 281~330.
[9] 管大椿、杨仲衡等，第四届全国实验应力分析学术会议论文集 (1984).

EXPERIMENTAL METHOD OF DYNAMIC CAUSTICS AND ITS APPLICATION IN FRACTURE MECHANICS

Su Xianji　Lei Zhihui

(Dept. of Mech., Peking University)

Abstract The equation of static and dynamic caustics, and the formulae determing the position of crack tip and stress intensity factor are given. It is proved that for the case of low speed of crack propagation the static formula is availible in calculation. The fractures in beam and rings with initial crack under impact loading was researched. A series of dynamic cansitics phodos and the curves, which show the variations of corresponding crack lengths and dynamic stress intensity factors with time, are presented.

Key words: Dynamic caustics, Fracture mechanics.