

# 弹性波在饱和土层中的传播<sup>1)</sup>

陈龙珠 吴世明 曾国熙

(浙江大学土木系, 杭州)

**提要** 本文在扼要综述以往有关的研究成果以后,通过一定的假设,推导出饱和土连续条件方程以及考虑土骨架与孔隙水之间耦合效应的动力平衡方程,从而得到一组饱和土层中的弹性波动方程,其中只应用了具有明确意义的土骨架和孔隙水力学参数。分析表明,无限饱和土层中可存在两种P波和一种S波;在渗透性很好的饱和土层中,孔隙水波速度最大可达到水中波速的 $\sqrt{3}$ 倍;在渗透性极差的饱和土中,两种P波同速,且可接近或大于水中波速;土的渗透性对S波的影响不如P波的显著。以此,可近似解释一些试验现象,对利用波速法测得合理的饱和土层特性参数以及相关学科也具有理论与应用价值。

**关键词** 土动力学,弹性波,饱和土层,孔隙介质,波的传播。

## 符 号 说 明

$b$ 常数 $b = n^2 \gamma_w / k$	$C_j$ 波速度
$k$ 渗透系数	$\rho_1$ 与土骨架有关的量 $\rho_1 = (1 - n)\rho_s$
$n$ 孔隙度	$\rho_2$ 与孔隙水有关的量 $\rho_2 = \frac{1}{3} n \rho_w$
$p_w$ 真孔隙水压力	$\rho_s, \rho_w$ 土颗粒和孔隙水的密度
$p$ 平均孔隙水压力 $p = n p_w$	$\sigma, \sigma'$ 总应力和有效应力
$v$ 孔隙水位移矢量	$\delta_{ij}$ Kronecker 函数
$w$ 土骨架位移矢量	$\mu, \lambda$ 土骨架(或干土)的 Lamé 常数
$E_w$ 孔隙水的体变模量	

## 一、前 言

随着科学的发展,在岩土工程、地球物理、地震工程、海洋工程和声学等学科中,均遇到了饱和多孔介质中波的传播问题。但与均质弹性体中的波相比,对上述问题的研究显然还不够充分,有待于进一步深入。

Wood (1940)<sup>[1]</sup>曾研究过含固体颗粒的流体中波的传播,门福录(1981)<sup>[2]</sup>分析过含有相互孤立液体的固体中波的问题。两者得到的压缩波速度公式虽类似,但前者中含有固体颗粒的体变模量,后者是固相骨架的体变模量。如将这种公式用于孔隙水相互连通的饱和土则显然不太合理。Allen 等(1980)<sup>[3]</sup>对饱和砂土所作的试验表明,按 Wood 公式计算的孔隙水压缩波速低于实测值。

1) 本文是在第二、三作者指导下第一作者学位论文的一部分。

本文 1986 年 2 月 24 日收到第一稿,1986 年 8 月 9 日收到修改稿。

Biot (1956)<sup>[4]</sup> 研究了饱和多孔固体中的一般三维波动问题。Biot 假设孔隙是相互连通的, 孔隙流体则可以压缩, 研究对象具有统计各向同性。由于其应力应变关系中四个弹性参数以及动力学方程中附加质量难以测定, Biot 理论在应用上受到了极大限制。Biot 后来又不断地发展了自己的理论<sup>[5]</sup>, 其结论大多具有理论价值, 至今只有少数学者在研究它的应用问题, 如, Ishihara (1967, 1970)<sup>[6]</sup> 和 Stoll (1978)<sup>[7]</sup> 等。

在国内, 海洋声学方面有关的研究多半只是采用统计和相关分析的方法, 无疑在今后为其建立合适的物理力学模型是有益的。钱学森(1961)<sup>[8]</sup>、唐应吾(1975)<sup>[9]</sup> 等对土层、悬液和近期沉积物等有关波传播问题也曾研究过。门福录(1965, 1981)<sup>[10]</sup> 对饱和流体的地层进行了较深入的研究, 其中考虑了液体的可压缩性和固相骨架的弹性或粘弹性, 应用准微观连续条件来联立两相的动力学方程而得到整体的动力学方程组。虽然包含的参数有明确的物理意义, 但其连续条件方程的推导似欠严谨, 波动方程组中也未考虑固液两相之间的惯性耦合效应, 因而门福录理论不能用来解释有关饱和土层中压缩波速度大于水中波速等试验现象<sup>[9,10]</sup>。

由此可见, 对波在饱和土层中的传播问题有必要作进一步的研究。本文拟对饱和土层的实际性状作一些简化假设, 建立一组考虑土骨架与孔隙水之间耦合效应的弹性波动方程, 并对它们进行初步分析和讨论, 以近似解释一些试验现象并为以波速法测试饱和土层动参数提供初步理论基础。更深入的探讨与验证工作尚在进行中。

## 二、基本假设

天然饱和土层一般是非常复杂的, 土层骨架具有粘弹塑性变形特性, 并具有不均匀性和各向异性, 土颗粒也是可压缩的。孔隙水的性质比一般的水要复杂得多, 不但可压缩和具有粘滞性, 而且非常不均匀, 它在孔隙通道中的流动难以完全遵从 Navier-Stokes 的平均方程和能量方程, Darcy 定律的应用也存在着一定的误差<sup>[11]</sup>。

在动载作用下, 饱和土中的骨架与孔隙水之间一般存在着速度差。这不但使两相材料之间产生渗阻力, 还产生重要的惯性耦合效应。饱和土中两相之间除存在这些运动耦合外, 在相互接触面上, 实际还有十分复杂的电化等效应, 并且在无粘性土和粘性土中, 这些效应的强弱是显著不同的<sup>[12]</sup>。另外, 孔隙通道的位置、形状和尺寸在运动过程中均是变化的, 孔隙水和骨架的密度也并非常量。

影响饱和土层中波传播特性的因素还有土层所受的应力历史和当时的应力状态、土层的疏密状态、应变幅值、波动频率以及温度等<sup>[13]</sup>。饱和土层如此复杂, 要想对它建立起完整的波动方程, 在目前是难以办到的, 同时也没有必要。对所要解决的问题, 可以先分析这些因素的主次, 作必要的假设和简化, 然后对所得到的结论进行充分的验证, 以确定它的适用范围或作进一步的修正。

作为初步试探, 本文对饱和土层所作的主要简化和假设是:

- (1) 土骨架是弹性多孔连续介质, 而其中的土颗粒是不可压缩的;
- (2) 孔隙水是可压缩的理想流体, 它在土中的流动遵从 Darcy 定律;
- (3) 土体具有统计各向同性, 其中孔隙分布均匀且互相连通; 另外, 面孔隙率等于体孔隙率;

- (4) 相邻两相之间存在着耦合效应;  
 (5) 渗阻力(或渗透力)可代表孔隙水中实际存在的粘滞效应和由于孔隙通道的曲折性对孔隙水运动所产生阻碍的总和;  
 (6) 温度等因素对波动方程的影响暂忽略不计.

### 三、波动方程组

#### (一) 连续性方程

众所周知,饱和土体的连续性可叙述成:单位时间单元土体的体积改变量  $\partial(\Delta V)/\partial t$  等于这个时间内单元土体中孔隙水体积含量的改变量  $\partial\xi/\partial t$ 、土颗粒和孔隙水自身体积的改变量 ( $\partial V_s/\partial t$  和  $\partial V_w/\partial t$ ) 的总和,即

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = -\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{\partial V_w}{\partial t} \quad (1)$$

若不计土颗粒体积的改变量,则  $V_s = 0$ . 由于

$$\Delta V = \operatorname{div} \boldsymbol{w} \quad (2)$$

$$\xi = n \operatorname{div}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \quad (3)$$

$$V_w = n \frac{p_w}{E_w} = \frac{1}{E_w} p \quad (4)$$

故可用位移矢量来表达式(1),即

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{w}} = -n \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{w}}) + \frac{1}{E_w} \dot{p} \quad (5a)$$

或

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{v}} + \frac{1-n}{n} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{w}} - \frac{1}{nE_w} \dot{p} = 0 \quad (5b)$$

式中各符号的意义详见附录,各量上的圆点表示其对时间  $t$  的偏导数.

式(5)就是本文所建立的在不计土颗粒压缩性时饱和土体连续条件方程. 这里的推导比文[2]的要严谨,得到的是饱和土体连续性条件准确数学表达式.

#### (二) 运动方程

本文采用多孔介质力学中的方法<sup>[4]</sup>定义有效应力和孔隙水压力,即

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + n p_w = \boldsymbol{\sigma}' + p \quad (6)$$

以便与上节第(1)、(3)点假设相适应,同时也符合 Terzaghi 有效应力原理所阐明的实质.

由于孔隙水的运动路径是迂回曲折的,沿宏观压力梯度方向的运动到处受到阻碍,在单位土体中并非全部孔隙水沿某一方向具有相同的宏观速度,从而发生两相之间的惯性耦合效应. 本文暂以如下方法考虑它的影响: 根据节二第(3)点假设可得出,在笛卡儿坐标系中,单位土体中只有三分之一的孔隙水沿某一方向(假设是一座标轴沿此方向)具有孔隙水的宏观速度分量,而另外三分之二的孔隙水沿该方向的宏观速度和固相(土骨架)的相同. 故有如下运动方程:

整体介质

$$\sigma'_{ij,i} + p_{,i} = (\rho_1 + 2\rho_2)\dot{w}_i + \rho_2\ddot{v}_i \quad (7a)$$

孔隙水

$$p_{,i} - b(\dot{v}_i - \dot{w}_i) = 2\rho_2\dot{w}_i + \rho_2\ddot{v}_i \quad (8a)$$

式中  $i$  和  $j$  为  $x$ ,  $y$  和  $z$ ;  $b = n^2\gamma_w/k$ . 这里采用了求和简记法.

由第一点假设, 土骨架应力应变关系服从广义虎克定律

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda(\Delta V)\delta_{ij} \quad (9)$$

式中  $e_{ij} = (W_{j,i} + W_{i,j})/2$ ;  $\Delta V = \text{div } \boldsymbol{w}$ .

将式 (7a)、(8a) 以位移矢量表示

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{w} + (\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \boldsymbol{w}) + \text{grad } p = (\rho_1 + 2\rho_2)\dot{\boldsymbol{w}} + \rho_2\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (7b)$$

$$\text{grad } p + b(\dot{\boldsymbol{w}} - \dot{\boldsymbol{v}}) = 2\rho_2\dot{\boldsymbol{w}} + \rho_2\ddot{\boldsymbol{v}}. \quad (8b)$$

### (三) 波动方程组

上面导出的方程 (5)、(7) 和 (8) 即构成本文所建立的波动方程组. 为便于分析, 这里引入膨胀势  $\varphi$  和旋转势  $\boldsymbol{\varphi}$ , 即

$$\boldsymbol{w} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \boldsymbol{\varphi}_1 \quad (10)$$

$$\boldsymbol{v} = \text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \boldsymbol{\varphi}_2 \quad (11)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\varphi}_1 = \text{div } \boldsymbol{\varphi}_2 = 0 \quad (12)$$

将它们代入式 (5)、(7) 和 (8) 即可得到相当的方程组:

$$\nabla^2\dot{\varphi}_1 = \frac{n}{1-n} \left[ -\nabla^2\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{nE_w}\dot{p} \right] \quad (13)$$

$$\square_1^2\varphi_1 = [-p + \rho_2\dot{\varphi}_2]/(\lambda + 2\mu) \quad (14)$$

$$p + b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 2\rho_2\dot{\varphi}_1 + \rho_2\dot{\varphi}_2 \quad (15)$$

$$\square_2^2\varphi_1 = \frac{\rho_2}{\mu}\dot{\varphi}_2 \quad (16)$$

$$b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 2\rho_2\dot{\varphi}_1 + \rho_2\dot{\varphi}_2 \quad (17)$$

式中,

$$\square_j^2 = \nabla^2 - \frac{1}{C_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_1 + 2\rho_2} \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho_1 + 2\rho_2}$$

显然, 饱和土层的波动方程组 (13)–(17) 是相当复杂的, 除几个特例<sup>[2]</sup>外, 一般是要借助于数值方法才能得到它们的解答的.

## 四、特例分析

从本文所建立的波动方程组出发, 经过类似于文 [2, 4] 的推导, 也可得出无限饱和土中常存在两种  $P$  波和一种  $S$  波的结论. 为节省篇幅, 本文拟不介绍这方面的工作而仅对几个特例进行分析, 以初步考察本文结果及其与以往理论的差别.

### 1. 孔隙水自由流动的饱和土层

此时孔隙水流动不受阻力,  $k \rightarrow \infty$ . 可将饱和砾石、砂土层等近似视为这种状况. 由

式 (16),(17) 得

$$\square^2 \varphi_1 = 0 \tag{18}$$

表示有一种固体 S 波存在,其波速为

$$C_3 = \sqrt{\mu/\rho_1} \tag{19}$$

由式 (14),(15) 得

$$\square^2 \varphi_1 = 0 \tag{20}$$

表明有一种固体 P 波,波速为

$$C_4 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_1} \tag{21}$$

由式 (13) 和 (20) 得

$$\square^2 \dot{\varphi}_2 = -\frac{1-n}{n} \nabla^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{2\rho_2}{nE_w} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{\varphi}_1 \tag{22}$$

表明土体中还存在着一种流体(孔隙水) P 波,波速为

$$C_5 = \sqrt{nE_w/\rho_2} = \sqrt{3 \frac{E_w}{\rho_w}} \tag{23}$$

它不断地受固体应力波  $\varphi_1$  的干扰和激发。

可见,孔隙水可自由流动的饱和土中存在着明确的两种固体波和一种流体波,其中固体波速度与同等孔隙率的干土中波速相等,孔隙水波速则是普通水中波速的  $\sqrt{3}$  倍。似可认为,随着土层渗透性的增大,无粘性饱和土层中的孔隙水波速以普通水中波速的  $\sqrt{3}$  倍(约 2600m/s) 为上限。图 1 初步说明了这一点,它是文 [10] 用低频和低振幅的现场测试方法获得的(图 1 中也含有非饱和土层的试验数据,此应与图中较低速度的部分相应,可能是固体 P 波速度)。

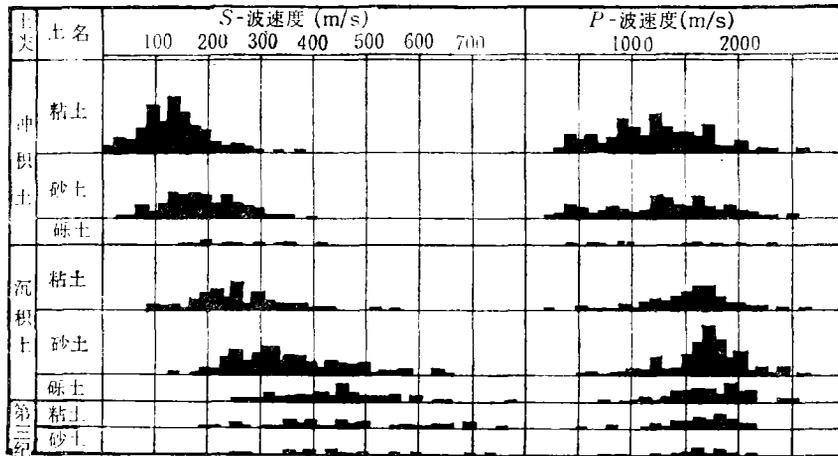


图 1 日本土层波速分布频率图<sup>[10]</sup>

### 2. 孔隙水不能流动的饱和土层

此时  $k \rightarrow 0$ , 所得结论可近似应用于渗透性极差的饱和粘土。

由式 (15)–(17) 得:

$$\square_3^2 \varphi = 0 \quad C_6 = \sqrt{\mu/\rho} \quad (24)$$

可见, 这时饱和土剪切波速度  $C_6$  在形式上与一般弹性体的相同。式中  $\rho = [(1-n)\rho_s + n\rho_w]$ , 是饱和土层的质量密度。由式 (14)、(15) 得

$$\square_3^2 \varphi = 0 \quad C_7 = \sqrt{[(\lambda + 2\mu) + E_w]/\rho} \quad (25)$$

说明这时孔隙水和土骨架中的  $P$  波完全耦合在一起, 其速度均为  $C_7$ 。由于  $k \rightarrow 0$ , 两相之间无相对运动, 本文结论便与文 [2] 相一致。

由于土骨架的  $(\lambda + 2\mu)$  总大于零, 故由式 (25) 可得

$$C_7 > \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{E_w}{\rho_w}} \quad (26)$$

对饱和土可近似取  $\rho \approx 1.85\rho_w$ , 则

$$C_7 > 1100 \text{m/s} \quad (27)$$

此可近似说明, 对渗透性极差的饱和粘土, 由现场测得的  $P$  波速度可大于 1100m/s, 且随土层刚度的增大而增大。因此, 在理论上饱和粘土中  $P$  波速度可接近或大于普通水中波速(约为 1500m/s)。图 1 也初步说明了这一点。

### 3. 土骨架为刚性的饱和土层

这是地下水动力学中常用的假定之一。孔隙水方程此时成为

$$\text{grad } p - b\dot{\boldsymbol{v}} = \rho_2\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (28)$$

$$n \text{div } \dot{\boldsymbol{v}} - \frac{1}{E_w} \dot{p} = 0 \quad (29)$$

令  $\dot{\boldsymbol{v}} = \text{grad } \Phi$ , 则

$$p = \rho_2\dot{\Phi} + b\Phi \quad (30)$$

$$\square_3^2 \Phi - \frac{b}{nE_w} \dot{\Phi} = 0 \quad C_8 = \sqrt{3 \frac{E_w}{\rho_w}} = C_7 \quad (31)$$

式 (31) 中的  $\left(\frac{b}{nE_w} \dot{\Phi}\right)$  是由渗透阻力而产生的阻尼项。此时的结论与文 [2] 相似, 但孔隙水波速较之为大。应指出,  $C_8$  与  $C_7$  只是数值上相等, 它们分别相对应的  $P$  波式 (22) 和 (31) 在性质上却具有相当的差别。

从特例分析可看出, 只有孔隙水不能流动时, 本文才与以往理论完全一致, 重要的是本文结论能初步解释更多的试验现象。现已知道, 渗透性对饱和土层中波的传播特性影响显著。这是饱和土层中波与一般弹性体中波之间的重要差别。显然, 如不加分析地用经典弹性动力学公式由波速推算饱和土层动参数, 其结果是不会令人满意的。本文对如何从波速得到合理或可靠的土层动参数似不乏具有实用指导意义, 与此有关的问题拟另文讨论。

## 五、结 束 语

本文在前人研究成果的基础上对所述问题进行了初步探讨, 现小结如下:

(1) 通过一定的假设, 建立起饱和土层的连续性条件方程和考虑土骨架与孔隙水之

间耦合效应的动力平衡方程,从而得到了所求的弹性波动方程组,其中只应用了具有明确意义的两相材料动参数。本文对以往理论有所发展,也较便于应用。

(2) 初步分析表明,在无限饱和土中能够存在两种土骨架波和一种孔隙水波。在自由渗流条件下,土骨架  $P$  波和孔隙水  $P$  波具有不同的速度,后者可达到普通水波速的  $\sqrt{3}$  倍;在不能渗流条件下,两种  $P$  波完全耦合而具有同一速度,可接近或大于普通水中波速。土骨架剪切波特性也受土渗透性的影响。

(3) 当土骨架为刚性时,孔隙水的波动具有阻尼效应,波速也为普通水中波速的  $\sqrt{3}$  倍。

(4) 饱和土层中波速受渗透性的影响说明,工程界目前按经典弹性动力学公式由波速推算饱和土层动参数的做法是不太合理的。

虽然现有一些饱和土层现场波速资料初步辅证了本文的结论,但仍需作更多的验证和改进工作。另外,用数值方法求解波动方程组以了解饱和土层中弹性波的一般特性将有一定的意义,饱和土层表面波特性也有待于研究。

作者曾得到了中国科技大学近代力学系沈志荣教授和北京大学力学系王仁教授等同志的热情指点和帮助,在此表示谢忱。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Wood, A. B., *A Textbook of Sound* (1940).
- [ 2 ] 门福录, *地球物理学报*, **24**, 1(1981).
- [ 3 ] Allen, N. F., et al., *ASCE*, **106**, GT3 (1980).
- [ 4 ] Biot, M. A., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **28**, 2(1956).
- [ 5 ] Biot, M. A., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **34**, 9 (1962).
- [ 6 ] Ishihara, K., *Soils and Foundations*, **10**, 4(1970).
- [ 7 ] Stoll, R. D., *Proc. of Earthquake Engineering and Soil Dynamics Conference*, ASCE (1978).
- [ 8 ] 唐应吾, *地球物理学报*, **18**, 4(1975).
- [ 9 ] Rodrigues, L. F., *剪切波速法原位测试技术*, 国外工程地质新技术, 中国建筑工业出版社 (1981).
- [ 10 ] Imai, T., *Proc. 9th ICSMFE*, 2 (1977).
- [ 11 ] Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Amer. Elsevier Publishing Company (1972).
- [ 12 ] Mitchell, J. K., *Fundamentals of Soil Behavior*, John Wiley and Sons. (1976).
- [ 13 ] Hardin, B. O., et al., *ASCE*, **94**, SM2 (1968).
- [ 14 ] Scheigger, A. E., *The Physics of Flow through Porous Media*, University of Toronto Press (1974).

## PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN WATER-SATURATED SOILS

Chen Longzhu, Wu Shiming, Zheng Guoxi

(Zhejiang University, Hangzhou)

**Abstract** A brief review of the literatures on the titled subject is given. A set of wave equations, taking the inertial coupling effect between soil skeleton and pore water into account, are established for saturated soils. The preliminary analysis shows that the nature of wave propagation is mainly influenced by permeability coefficient,  $k$ . There exist three types of waves, two (P-wave and S-wave) propagating through soil skeleton and one (P wave) through pore water. For a soil with large value of  $K$ , compression wave velocity through pore water will be greater than that through the single-phased water, and as  $k \rightarrow \infty$ , the former could be  $\sqrt{3}$  times as great as the latter. For a soil with extremely low permeability, the compression wave velocity could be either less or greater than that through single-phased water, depending on the rigidity of the soil passed through. Some phenomena observed from tests presented in the literature may be reasonably explained by the proposed theory herein, and thus more reliable parameters of soil could be obtained from wave velocity measurements. Further studies on this subject are still needed.

**Key words :** soil dynamics, elastic waves, water-saturated soils, porous media, wave propagation