

湍流普适平衡区的能谱

钱 俭 高 智
(中国科学院力学研究所)

提要 本文应用作者之一提出的确定湍流能谱的理论,对八种试探函数和四个波数取值用方程误差方法数值求解能谱和阻尼系数满足的两个积分方程。结果得到湍流普适平衡区能谱的一个新的表达式。这个新的表达式与作者之一原来得到的表达式形式不同,但二者对应的三维和一维能谱差别很小;这说明了所用理论的自恰性。新的表达式较为简便。

关键词 湍流、湍流谱、湍流统计理论。

一、前 言

按照 Kolmogorov^[1] 1941年提出的理论,完全发展湍流的普适平衡区的能谱 $E(k)$ 由运动粘度 ν 和能量耗散率 ε 所决定,而且^[2-4]

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} F(k/k_d), \quad (1)$$

k 是波数, $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ 是 Kolmogorov 波数, $F(x)$ 是一个无量纲普适函数。作者之一应用统计力学方法^[5,6], 近似求解湍流的纳维方程, 得到三维能谱 $E(k)$ 和阻尼系数 $\eta(k)$ 所满足的两个积分方程(能量方程和 η 方程)。对于定常湍流, 能量方程是

$$2\nu k^2 E(k) = T(k) \quad (2)$$

η 方程是

$$\eta(k) = G(k) \quad (3)$$

这里 $T(k)$ 和 $G(k)$ 是能谱 $E(k)$ 和阻尼系数 $\eta(k)$ 的积分泛函, 具体表达式已在文献[6]中给出, 这里从略。

文献[6]比较 $F(x)$ 的四个不同的试探形式和采用二个波数取样值 ($k_1 = 0.05k_d$ 和 $k_2 = 0.5k_d$), 用方程误差方法数值求解方程(2)和(3), 得到

$$F(x) = 1.19(1 + 5.3x^3) \exp(-5.4x^{4/3}) \quad (4)$$

因此 $F(x)$ 不是单调下降函数, 而在 $x = 0.1$ 附近有极大值。一个重要的问题是, 这个结论是否依赖于所采用的 $F(x)$ 的试探形式和波数取样值? 如果更多不同的 $F(x)$ 的试探形式进行比较和更多的波数取样值被采用, 情况如何? 为了回答这一问题, 本文比较了 $F(x)$ 的八个不同的试探形式并采用了四个不同的波数取样值。结果得到的 $F(x)$ 在形式上不同于式(4), 但仍然在 $x = 0.1$ 附近有极大值; 而且两者给出几乎一样的三维和一维能谱。因而证明所用理论和方法的自恰性。

本文于1985年10月9日收到, 1986年6月1日收到修改稿。

二、方 法

$F(x)$ 的一般特性是^[2,4], 当 $x \rightarrow 0$ 时 $F(x)$ 趋向于 Kolmogorov 常数 $F(0)$, 而当 x 很大时 $F(x)$ 接近于某个指数函数. 在实际应用中常用 Pao 氏公式^[7]来计算 $F(x)$

$$F_p(x) = 1.7 \exp(-2.55x^{\frac{2}{3}}) \quad (5)$$

比 Pao 氏公式 (5) 更合适的 $F(x)$ 的形式是

$$F(x) = F(0)(1 + Bx^m) \exp(-Cx^n) \quad (6)$$

$F(0) = 1.19$ ^[5,6], B , C , m 和 n 是可调参数. 本文采用的 $F(x)$ 的八个试探形式是 Pao 氏公式 (5) 以及公式 (6) 的七个特殊情况, 分别对应于参数 (m, n) 取下列七组不同的数值: $(1, 2)$, $(2/3, 2)$, $(2/3, 4/3)$, $(1, 4/3)$, $(2/3, 1)$, $(1, 1)$ 和 $(4/3, 1)$. 湍流能量耗散率的表达式 $\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk$ 导致加于待定参数 B 和 C 的下列约束条件

$$B\Gamma\left(\beta + \frac{m}{n}\right) + C\frac{m}{n}\Gamma(\beta) - 0.42n C^{\beta + \frac{m}{n}} = 0 \quad (7)$$

$\beta = \frac{4}{3n}$, $\Gamma(x)$ 表示 Gamma 函数. 阻尼系数 $\eta(k)$ 在惯性子区的表达式已在文献 [5] 中进行了研究, 应是

$$\eta(k) = D\varepsilon^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}} \quad (k \ll k_d), \quad D = 0.268 \quad (8)$$

当 k 大于 k_d 时粘性起主要作用, 我们有

$$\eta(k) \simeq \nu k^2 \quad (k \gg k_d) \quad (9)$$

因此 $\eta(k)$ 的单参数试探形式取为

$$\eta(k) = 0.268\varepsilon^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}} \left[1 + A \left(\frac{k}{k_d}\right)^{\frac{2}{3}} + 3.73 \left(\frac{k}{k_d}\right)^{4/3} \right] \quad (10)$$

A 是待定参数, 当波数 k 很小或很大时, 公式 (10) 分别趋于式 (8) 或 (9). 波数 k 的四个取样值为

$$k_1 = 0.01k_d, \quad k_2 = 0.04k_d, \quad k_3 = 0.16k_d \quad \text{和} \quad k_4 = 0.64k_d \quad (11)$$

当公式 (1), (6) (或 (5) 和 (10)) 作为能量方程 (2) 和 η 方程 (3) 的近似解时, 能量方程和 η 方程在波数取样值 k_i 处的方程误差分别为

$$D_i(k_i) = \left[\frac{T(k_i)}{2\nu k_i^2 E(k_i)} - 1 \right]^2 \quad (12)$$

和

$$D_\varepsilon(k_i) = \left[\frac{G(k_i)}{\eta(k_i)} - 1 \right]^2 \quad (13)$$

对于四个波数取样值 (11) 的平均方程误差为

$$D = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 [D_i(k_i) + D_\varepsilon(k_i)] \quad (14)$$

$F(x)$ 和 $\eta(k)$ 的试探形式中的待定参数的最佳估值定义为使平均方程误差 D 最小的值. 由于待定参数 B 和 C 有约束条件 (7), 确定待定参数的最佳估值的问题实质上是一个有

约束的最优化问题^[6].

本文用人-计算机最优化方法确定待定参数的最佳估值. 按公式(1)-(14), 对待定参数的很多不同的数值计算平均方程误差 D . 通过比较和插值, 确定使 D 最小的待定参数的数值, 作为它们的最佳估值. 这样求得的 D 的最小值, 记为 D_{\min} , 可以用来表示 $F(x)$ 的试探形式的优劣程度. D_{\min} 越小, 对应的 $F(x)$ 的试探形式越好. 最好的试探形式对应于能量方程和 η 方程的精确解, 这时 $D_{\min} = 0$.

三、结 果

应用上节所述的人-计算机最优化方法, 对 $F(x)$ 的八个不同的试探形式(5)(6)和波数的四个不同的取样值(11), 计算待定参数的最佳估值和对应的 D 的最小值 D_{\min} . 计算结果总结成表 1. 表 1 中的 D_{\min} 是相对于 Pao 氏公式的 D_{\min} 值的归一化结果, 因而对于 Pao 氏公式(5) $D_{\min} = 1$. 按照表 1, 公式(4)是 $F(x)$ 的一个相当好的近似公式, 对应 $D_{\min} = 0.05$, 但不是八个试探形式中最优者, 最优者为

$$F(x) = 1.19(1 + 19.4x)\exp(-6.1x) \quad (15)$$

对应于 $(m, n) = (1, 1)$ 和 $D_{\min} = 0.04$. 图 1 给出公式(4)、(15)和 Pao 氏公式(5)的曲线. 图 1 表明公式(15)和(4)一样不是单调下降函数, 而在 $x = 0.1$ 附近有一个极大值. 公式(15)和(4)对应的三维能谱几乎是一致的.

一般实验测量直接给出的不是三维能谱 $E(k)$, 而是一维能谱 $\varphi(k)$ ^[2,7]. 归一化的无量纲一维能谱定义为

$$\bar{\varphi}(k/k_d) = \frac{\varphi(k)}{[\varepsilon\nu^3]^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

在普适平衡区 $\bar{\varphi}$ 仅是 (k/k_d) 的函数, 它是无量纲普适函数 $F(x)$ 的积分泛函^[7]

$$\bar{\varphi}(y) = \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) x^{-2/3} F(x) dx \quad (17)$$

表 1 B 和 C 的最佳估值

$F(x)$ 的试探形式	B	C	D_{\min}
Pao 氏公式(5)	1	1	1.0
公式(6): $m = 1, n = 2$	4.8	6.9	0.2
公式(6): $m = 2/3, n = 2$	2.9	6.4	0.06
公式(6): $m = 2/3, n = 4/3$	5.3	5.4	0.05
公式(6): $m = 1, n = 4/3$	10.2	6.1	0.05
公式(6): $m = 2/3, n = 1$	4.5	4.0	0.1
公式(6): $m = 1, n = 1$	19.4	6.1	0.04
公式(6): $m = 4/3, n = 1$	33.8	6.5	0.3

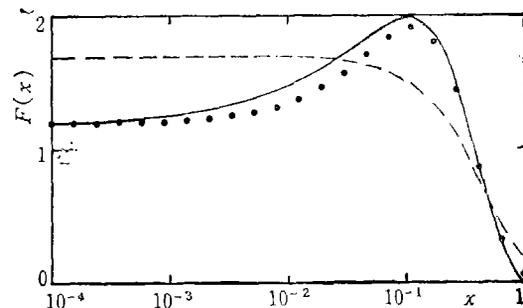


图 1 无量纲普适函数 $F(x)$

---- Pao 氏公式(5) — 公式(4) 公式(15)

表 2 给出对应于公式(4)和(15)的 $\bar{\varphi}$ 的对数值. 表 2 表明公式(15)和(4)产生的归一化一维能谱 $\bar{\varphi}$ 几乎是一样的. 归一化耗散谱定义为 $\left(\frac{k}{k_d}\right)^2 \bar{\varphi}\left(\frac{k}{k_d}\right)$. 令 k_{\max} 为该耗散

谱取极大值时的波数, 对于式 (4), $k_{\max} = 0.082k_d$; 对于式 (15), $k_{\max} = 0.083k_d$. 如果我们把对应于式 (15) 的曲线加到文献 [6] 的图 2 和图 3 中, 则它们将几乎与对应式 (4) 的理论曲线重合.

四、结 束 语

本文应用文献 [5] 和 [6] 中提出的确定普适平衡区能谱的理论, 比较了无量纲普适

表 2 一维能谱

k/k_d	$\log_{10}\hat{\varphi}(k/k_d)$	
	公式(4)	公式(15)
0.00001	7.93	7.92
0.00002	7.43	7.42
0.00005	6.77	6.76
0.0001	6.27	6.26
0.0002	5.77	5.76
0.0005	5.12	5.10
0.001	4.63	4.61
0.002	4.15	4.12
0.005	3.53	3.50
0.01	3.06	3.03
0.02	2.60	2.57
0.05	1.94	1.92
0.1	1.36	1.34
0.2	0.61	0.60
0.5	-0.97	-0.92

函数 $F(x)$ 的八种不同的试探形式和采用了四个不同的波数取样值, 得到了 $F(x)$ 的新的近似表达式 (15). 这个新的表达式虽然在形式上不同于文献 [6] 中得到的表达式 (4), 但两者给出的三维和一维能谱几乎是相同的. 这表明了所用理论和方法的自恰性.

式 (4) 和 (15) 同样是无量纲普适函数 $F(x)$ 的相当好的近似表达式, 对应的 D_{\min} 分别为 0.05 和 0.04, 比 Pao 氏公式 (5) 好得多, 而式 (15) 更好一些. 另外式 (15) 比 (4) 简单, 用起来较方便. 例如在包含能谱的复杂的计算中, 用公式 (15) 的计算时间较短并较易得到简便的解析表达式, 因为公式 (4) 中的幂函数 $x^{\frac{2}{3}}$ 和 $x^{4/3}$ 在公式 (15) 中为线性函数 x 所替代.

$F(x)$ 不是单调下降函数, 在 $x=0.1$ 附近有极大值. 因此通常实验测得的 Kolmogorov 常数要比文献 [5] 中得到的理论值 $F(0) = 1.19$ 大一些, 而且依赖于实验测量的波数范围. 这一结论并不因为比较 $F(x)$ 的更多的试探形式和采用更多的波数取样值而有所改变.

参 考 文 献

- [1] Kolmogorov, A. N., Dokl. C. R., *Acad. Sci. URSS*, **30**, (1941), 301.
[2] Hinze, J. O., *Turbulence* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1975).
[3] Monin, A. & Yanglom, A. M., *Statistical Mechanics of Turbulence*, MIT, London (1975).
[4] Orszag, S. A., in *Fluid Dynamics* (edited by R. Balian and J. L. Peube), Gordon and Breach, New York (1977).
[5] Qian, J., *Phys. Fluids*, **26**(1983), 2098.
[6] Qian, J., *Phys. Fluids*, **27**(1984), 2229.
[7] Pao, Y. H., *Phys. Fluids*, **28**(1965), 1063.
[8] Gill, P. E., Murray, W. H. & Wright, M. H., *Practical Optimization*, Academic Press, London (1981).

UNIVERSAL-EQUILIBRIUM-RANGE SPECTRUM OF
TURBULENCE

J. Qian Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract The analytical theory to determine the universal function $F(x)$ of the universal-equilibrium-range spectrum of turbulence, developed in earlier papers [*Phys. Fluids* **26** (1983), p. 2089, and **27**(1984), p. 2229], is applied here to compare eight different trial forms of $F(x)$ by using four sampling wavenumbers. The resulting universal function, $F(x)=1.19(1+19.4x)\exp(-6.1x)$, is different from that obtained previously, but both of them give rise to nearly the same three-dimensional and one-dimensional energy spectra. This shows the self-consistency of the analytical theory. The universal function $F(x)$ is not a monotonically decreasing function, but has a maximum near $x=0.1$. The usual experimental values of the kolmogorov constant will be greater than its theoretical value of $F(0)=1.19$ and depend upon the wavenumber range. The form of $F(x)$ obtained here is more convenient to use.

Key words: Turbulence, Turbulence Spectra, Statistical Theory of Turbulence.