第19卷 第2期　　力 学 学 报　　Vol. 19, No. 2
1987 年 3 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Mar., 1987

APPELL 方程和 TZÈNOFF 方程在一般非完整系统上的推广

薛 问 西
(西安矿业学院)

提要 本文给出一个适用于任何阶非完整系统的变分原理. Gauss 原理可作为推论由之导出. 由此原理出发, 将 Appell 方程和 Tzènoff 方程推广到一般非完整系统. 以一个二阶非完整系统为例,说明所得方程的应用.

关键词 非完整,动力学, Tzènoff 方程, Appell 方程.

一、引　言

Н. Г. Четаев 讨论了 Gauss 原理在一阶非线性非完整系统上的应用. 本文在理想约束条件(17)下, 得到一个与通用达朗伯-拉格兰日原理等价的、适用于任何阶非完整系统的变分原理. 由此原理可将 Gauss 原理作为推论导出. 还可以根据这个原理将 Appell 方程和 Tzènoff[1] 方程推广到约束方程包含任何阶速度的一般非完整系统.

Tzènoff 方程兼用动能和加速度能,对于有些问题,例如受约束刚体之类的动力学问题, 可以使计算量减小. 文末以一个受二阶非完整约束的刚体运动为例, 说明推广了的 Tzènoff 方程的应用.

二、一个适用于任何阶非完整系统的变分原理

设有由N个质点 $M_1, \cdots, M_N$ 构成的动力学系统S. $\boldsymbol{F}_i$ 为作用在质点 M_i 上的主动力; $\boldsymbol{r}_i$ 为 M_i 在惯性参考系中的矢径; $q_1, \cdots, q_n$ 为系统的广义坐标. 为使所得结果也可以用于伪坐标,以 $\dot{\pi}_1, \cdots, \dot{\pi}_n$ 表示伪速度,定义如下:

$$\dot{\pi}_\sigma = \sum_{s=1}^{n} Y_{\sigma s}\dot{q}_s + Z_\sigma \qquad (\sigma = 1, \cdots, n), \tag{1}$$

式中 $Y_{\sigma s}$, Z_σ 都是 q, t 的已知函数,且 $\det\|Y_{\sigma s}\| \neq 0$. 由 (1) 解出 $\dot{q}$,得:

$$\dot{q}_s = \sum_{\sigma=1}^{n} W_{s\sigma}\dot{\pi}_\sigma + X_s \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{2}$$

式中 $\|W_{s\sigma}\| = \|Y_{s\sigma}\|^{-1}$, $X_s = -\sum_{r=1}^{n} W_{sr}Z_r$

本文系编委黄克累先生推荐. 于 1986 年 1 月 13 日收到.

由直接计算可得：

$$\boldsymbol{v}_i \triangleq \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{V}_s^i \dot{\pi}_s + \boldsymbol{V}_0^i, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}_i \triangleq \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{V}_s^i \ddot{\pi}_s + \text{不含 } \ddot{\pi} \text{ 的项}$$

……………………………………

$$\boldsymbol{r}_i^{(k)} \triangleq \frac{d\boldsymbol{r}_i^{(k-1)}}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{V}_s^i \pi_s^{(k)} + \text{不含 } \pi^{(k)} \text{ 的项}(k \text{ 为任何自然数}),$$

$$\boldsymbol{r}_i^{(0)} \triangleq \boldsymbol{r}_i.$$

式中

$$\boldsymbol{V}_s^i \triangleq \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} W_{\sigma s} \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{V}_0^i \triangleq \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} X_s + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}.$$

由 (3),(4) 二式可得：

$$\boldsymbol{V}_s^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i^{(k)}}{\partial \pi_s^{(k)}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, N; s = 1, \cdots, n; \\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \tag{5}$$

以 G 表示系统 S 的加速度能，即

$$G = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{a}_i^2, \tag{6}$$

则有：

$$G^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{r}_i^{(k+2)} + \text{不含 } \boldsymbol{r}_i^{(k+2)} \text{ 的项}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial G^{(k)}}{\partial \pi_s^{(k+2)}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{V}_s^i. \tag{8}$$

令

$$Z_k \triangleq G^{(k)} - \sum_{s=1}^{n} P_s \pi_s^{(k+2)}. \tag{9}$$

以 δ_M 表示 Mangeron 变分[1]，即在系统状态矢量集合

$$\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \cdots, \boldsymbol{r}^{(k)}, \cdots$$

中，只变更 $\boldsymbol{r}^{(k+2)}$，而不变更其它矢量．由 (3) 式可见，这只需变更 $\pi^{(k+2)}$．($\boldsymbol{r}$ 表示 $\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ 的全体；其它不带下标的符号均有同样意义．) P_s 是对应于伪坐标 π_s 的广义力，即

$$P_s = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{V}_s^i = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r} W_{rs} = \sum_{r=1}^{n} Q_r W_{rs}, \tag{10}$$

Q_r 是对应于 q_r 的广义力．

由通用达朗伯-拉格兰日原理(即 Mangeron 原理)[1]

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\delta_M\boldsymbol{r}_i^{(k+2)}=0 \tag{11}$$

及

$$\delta_M\boldsymbol{r}_i^{(k+2)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^{(k+2)}}{\partial\pi_s^{(k+2)}}\delta\pi_s^{(k+2)} \tag{12}$$

可得:

$$\delta_M Z_k=0. \tag{13}$$

反之,根据 (5), (8) 二式,由 (13) 便得 (11). 因而 (11) 和 (13) 等价.

现在设在系统 S 上作用着 l 个形式如下的 k 阶非完整理想约束:

$$\varphi_\alpha(t,q,\dot{\pi},\cdots,\pi^{(k)})=0\quad(\alpha=1,\cdots,l) \tag{14}$$

则约束加在 k 阶以上导数 $\pi^{(k+h)}$ 上的限制为:

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\pi_s^{(k)}}\pi_s^{(k+h)}+\text{含}\,\pi\,\text{的}\,k+h\,\text{阶以下导数的项}=0 \tag{15}$$

因而加在变分 $\delta\pi^{(k+h)}$ 上的限制为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\pi_s^{(k)}}\delta\pi_s^{(k+h)}=0 \tag{16}$$

设理想约束条件为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\delta_M\boldsymbol{r}_i^{(k)}=0 \tag{17}$$

即

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{V}_s^i\delta\pi_s^{(k)}=0 \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{R}_i$ 是作用在质点 M_i 上的约束反力. 由 (16) 式可知, $\delta\pi^{(k)}$ 和 $\delta\pi^{(k+h)}$ 满足相同条件. 因此,对于一切非负整数 h, 都有:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{V}_s^i\delta\pi_s^{(k+h)}=0$$

因而,

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\delta_M\boldsymbol{r}_i^{(k+h)}=0$$

这表明,如果 (14) 在 k 阶速度空间[2]是理想约束,则在 $k+h$ 阶速度空间也是理想约束. 因此,当 (9) 式中的 $k=0$ 时, (13) 对简单非完整系统(即完整系统和一阶线性非完整系统)和一阶非线性非完整系统,以及二阶非完整系统都成立. 此时,将 (9), (10) 和 (5) 代入(13),即得 Gauss 原理:

$$\delta_M Z_0=\delta_M\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2=0.$$

这表明 Gauss 原理既适用于简单非完整系统和一阶非线性非完整系统，也适用于二阶非完整系统．而且可作为推论由 (13) 导出．当 k 为任何自然数时，(13) 对阶数不高于 $k+2$ 的非完整系统都成立．

(13) 可表述为如下的变分原理：在系统 S 的符合约束 (14) 的一切可能运动中，在主动力 $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_N$ 作用下，由同一初始条件出发的实际运动，使函数 Z_k 在 Mangeron 变分意义下取驻定值．(对 Z_0，为极小值．) 反之亦真．

三、一般非完整系统的 APPELL 型方程

由于约束方程 (14) 的独立性，(16)式的系数矩阵 $\left\|\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\pi_s^{(k)}}\right\|$ 的秩等于 l．所以可将 $\delta\pi_1^{(k+2)}, \cdots, \delta\pi_n^{(k+2)}$ 通过 m 个独立变分 $\delta\eta_1, \cdots, \delta\eta_m (m=n-l)$ 表示：

$$\delta\pi_s^{(k+2)} = \sum_{\nu=1}^{m} b_{s\nu}\delta\eta_\nu \quad (s=1, \cdots, n), \tag{19}$$

式中 $b_{s\nu}$ 一般是 $t, q, \dot{\pi}, \cdots, \pi^{(k)}$ 的函数．于是由 (13), (19) 得：

$$\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial Z_k}{\partial\pi_s^{(k+2)}} b_{s\nu}\delta\eta_\nu = 0. \tag{20}$$

由 $\delta\eta_1, \cdots, \delta\eta_m$ 的独立性，以及 (8), (9) 二式，得：

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial\ddot{\pi}_s} - P_s\right) b_{s\nu} = 0 \quad (\nu=1, \cdots, m). \tag{21}$$

这是关于 $\dot{\pi}$ 的 m 个方程和 l 个约束方程 (14)，以及 $\dot{\pi}$ 和 $\dot{q}$ 的关系式 (1)，共 $2n$ 个常微分方程，在足够的初值条件下，可求解 $2n$ 个未知函数 $\dot{\pi}, q$．

若 (14) 是一阶线性非完整的，即

$$\varphi_\alpha \triangleq \sum_{s=1}^{n} a_{\alpha s}\dot{q}_s + a_{\alpha 0} \quad (\alpha=1, \cdots, l) \tag{22}$$

其中 $a_{\alpha s}, a_{\alpha 0}$ 都是 q, t 的已知函数，则当取 (1) 中 $Y_{m+\alpha,s} = a_{\alpha s}$, $Z_{m+\alpha} = a_{\alpha 0}$，便有：

$$\dot{\pi}_{m+\alpha} = 0 \qquad (\alpha=1, \cdots, l) \tag{23}$$

$$\ddot{\pi}_{m+\alpha} = 0, \qquad \delta\ddot{\pi}_{m+\alpha} = 0 \tag{24}$$

而 $\delta\ddot{\pi}_1, \cdots, \delta\ddot{\pi}_m$ 都是独立的．于是当取 $\delta\eta_\nu = \delta\ddot{\pi}_\nu (\nu=1, \cdots, m)$ 时，(21) 变为 Appell 方程：

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{\pi}_\nu} = P_\nu \quad (\nu=1, \cdots, m) \tag{25}$$

因此，可以说方程 (21) 是 Appell 方程在一般非完整系统上的推广．

方程 (25) 是简单非完整系统的动力学方程；(21) 是它们的组合．这表明，当简单非完整系统(包括完整系统)增加约束时，其动力学方程可由未增加约束时的方程组合而成．组合方式决定于 $b_{s\nu}$，即决定于所增加约束的形式和独立变分 $\delta\eta$ 的取法．

例如，设变分 $\delta\pi_1^{(k+2)}, \cdots, \delta\pi_m^{(k+2)}$ 是独立的 (不然可调换其下标序号)，则当在(19)式中取这些独立变分为 $\delta\eta_1, \cdots, \delta\eta_m$ 时，(19)式右端的系数矩阵

www.cnki.net

$$\|b_{s\nu}\|=\left\|\begin{matrix}E\\ \cdots\\ C\end{matrix}\right\|, \tag{26}$$

其中 E 是 m 阶单位阵，C 是一个 $l\times m$ 阵．若将 (16) 的系数矩阵分为两块，即

$$\left\|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\pi_s^{(k)}}\right\|=\|A\,\vdots\,B\|, \tag{27}$$

其中 B 是一个满秩的 l 阶方阵，则

$$C=-B^{-1}A. \tag{28}$$

以 $C_{\alpha\nu}$ 代表 C 的元素，方程 (21) 可改写为

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{\pi}_\nu}+\sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial G}{\partial\ddot{\pi}_{m+\alpha}}C_{\alpha\nu}=P_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}P_{m+\alpha}C_{\alpha\nu}, \tag{29}$$

四、TZÈNOFF 方程的推广

为简单计，设约束是定常的，约束方程有如下形式：

$$\pi_{m+\alpha}^{(k)}=\phi_\alpha(q,\dot{\pi},\cdots,\pi^{(k-1)};\pi_\nu^{(k)})\quad(\alpha=1,\cdots,l), \tag{30}$$

即 $\pi_\nu^{(k)}$ $(\nu=1,\cdots,m;\ m=n-l)$ 是独立的 k 阶伪速度，$\pi_{m+\alpha}^{(k)}$ $(\alpha=1,\cdots,l)$ 是不独立的．(当约束方程 (30) 右端显含时间 t 时可作同样讨论．)因而

$$\delta\pi_{m+\alpha}^{(k+2)}=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\pi_\nu^{(k)}}\delta\pi_\nu^{(k+2)} \tag{31}$$

代入 (20)，得：

$$\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\pi_\nu^{(k+2)}}-P_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\pi_{m+\alpha}^{(k+2)}}-P_{m+\alpha}\right)\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\pi_\nu^{(k)}}=0\quad(\nu=1,\cdots,m) \tag{32}$$

但由 (31)，有：

$$\frac{\partial\pi_{m+\alpha}^{(k+2)}}{\partial\pi_\nu^{(k+2)}}=\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\pi_\nu^{(k)}}, \tag{33}$$

由 (8) 式，有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^{(k)}}{\partial\pi_\nu^{(k+2)}}&=\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{V}_\nu^i=\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{a}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}W_{s\nu}\\&=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_0}{\partial q_s}\right)W_{s\nu},\end{aligned} \tag{34}$$

式中 T_0 是不考虑非完整约束 (30) 时，以广义速度表示的系统动能．以 $\tilde{T}_0$ 记通过伪速度表示的动能，即 $\tilde{T}_0=T_0(q,\dot{q}(q,\dot{\pi}))$，(因为是定常情况，(1)，(2) 二式没有非齐次项 Z_σ 和 X_s，且 $Y_{\sigma s}$，$W_{s\sigma}$ 不显含 t) 则有：

$$\frac{\partial\tilde{T}_0}{\partial q_s}=\frac{\partial T_0}{\partial q_s}+\sum_{\tau=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial T_0}{\partial\dot{q}_r}\frac{\partial W_{r\tau}}{\partial q_s}\dot{\pi}_\tau,$$

$$\frac{\partial\tilde{T}_0}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_0}{\partial\dot{q}_s}W_{s\sigma}.$$

代入 (34)，利用

$$W_{s\sigma}\frac{\partial Y_{\sigma\tau}}{\partial q_r}+\frac{\partial W_{s\sigma}}{\partial q_r}Y_{\sigma\tau}=0,$$

即得:

$$\frac{\partial G^{(k)}}{\partial \pi_\nu^{(k+2)}}=\tilde{L}_\nu(\tilde{T}_0),$$

其中算符

$$\tilde{L}_\nu \triangleq \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_\nu}-\frac{\partial}{\partial \pi_\nu}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\gamma_{\nu rs}\dot{\pi}_s\frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_r} \tag{35}$$

三指标符号

$$\gamma_{\nu rs}\triangleq \sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial Y_{rp}}{\partial q_t}-\frac{\partial Y_{rt}}{\partial q_p}\right)W_{ts}W_{p\nu}$$

$$(r, s=1, \cdots, n).$$

又设系统的加速度能可分为两部分:

$$G=G_0+G_1 \tag{36}$$

其中 G_0 只含独立伪加速度 $\ddot{\pi}_1, \cdots, \ddot{\pi}_m$; G_1 只含不独立伪加速度 $\ddot{\pi}_{m+\alpha}(\alpha=1, \cdots, l)$. 于是 (32) 便可写成如下简单形式:

$$\tilde{L}_\nu(\tilde{T}_0)+\frac{\partial G_1^{(k)}}{\partial \pi_\nu^{(k+2)}}=\Pi_\nu \ (\nu=1, \cdots, m) \tag{37}$$

式中

$$\Pi_\nu=P_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}P_{m+\alpha}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \pi_\nu^{(k)}}. \tag{38}$$

方程 (37) 是系统 S 在约束 (30) 和条件 (36) 限制下的动力学方程. Π_ν 是在被约束的 k 阶速度空间里对应于 $\pi_\nu^{(k)}$ 的广义力. 例如, 若将 $\Pi_1\delta\pi_1^{(k)}$ 称为系统主动力沿变分 $\delta\pi_1^{(k)}$ 所决定的虚位移上的"k 阶元功率",即

$$\begin{aligned}\Pi_1\delta\pi_1^{(k)}&=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i0}^{(k)}}{\partial \pi_1^{(k)}}\delta\pi_1^{(k)}+\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i^{(k)}}{\partial \pi_{m+\alpha}^{(k)}}\frac{\partial \pi_{m+\alpha}^{(k)}}{\partial \pi_1^{(k)}}\delta\pi_1^{(k)}\\&=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i(\delta\boldsymbol{r}_{i0}^{(k)}+\delta\boldsymbol{r}_{i1}^{(k)}),\end{aligned} \tag{39}$$

式中

$$\delta\boldsymbol{r}_{i0}^{(k)}\triangleq\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i0}^{(k)}}{\partial \pi_1^{(k)}}\delta\pi_1^{(k)};\qquad \delta\boldsymbol{r}_{i1}^{(k)}\triangleq\sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i^{(k)}}{\partial \pi_{m+\alpha}^{(k)}}\frac{\partial \pi_{m+\alpha}^{(k)}}{\partial \pi_1^{(k)}}\delta\pi_1^{(k)}$$

$\delta\boldsymbol{r}_{i0}^{(k)}$ 是不考虑约束 (30), 只考虑完整约束 (也可以是一阶线性非完整约束), 而由变分 $\delta\pi_1^{(k)}$ 在 k 阶速度空间决定的虚位移; $\delta\boldsymbol{r}_{i1}^{(k)}$ 是考虑了约束 (30) 后所增加的虚位移部分. 其它 Π_ν 均可按此意义确定.

如果 (30) 是一阶线性的,而且是以广义坐标给出的,即有如下形式:

$$\dot{q}_{m+\alpha}=\sum_{\nu=1}^{m}a_{\alpha\nu}\dot{q}_\nu \ (\alpha=1, \cdots, l), \tag{40}$$

其中 $a_{\alpha\nu}$ 是 q 的函数；并假定条件 (36) 成立，则 (37) 式变为 Tzènoff 方程[1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\nu}-\frac{\partial T_0}{\partial q_\nu}+\frac{\partial G_1}{\partial \ddot{q}_\nu}=Q_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}Q_{m+\alpha}a_{\alpha\nu}\quad(\nu=1,\cdots,m), \tag{41}$$

式中 T_0 是不考虑非完整约束 (40) 时，以广义速度表示的系统动能；G_1 是只含不独立的广义加速度 $\ddot{q}_{m+\alpha}(\alpha=1,\cdots,l;\ m=n-l)$ 的那部分加速度能；$Q_s\ (s=1,\cdots,n)$ 是广义力. (41) 式右端有与 (39) 式相同的意义. 动力学方程 (41) 是 I. C. R. Tzènoff 于 1924 年就简单非完整系统得到的. 它兼有 Appell 方程和 Lagrange 方程二者的特点，对有些问题可以使计算简化(见下面例题). 本文得到的方程 (37) 是这组方程在一般非完整系统上的推广. 对于一阶非线性非完整系统和二阶非完整系统，方程 (37) 有与 (41) 相同的形式. 例如，设约束方程是一阶非线性的:

$$\dot{q}_{n+\alpha}=\dot{q}_{m+\alpha}(q;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_m)\quad(\alpha=1,\cdots,l) \tag{42}$$

则约束加在加速度上的限制为:

$$\ddot{q}_{m+\alpha}=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial \dot{q}_{m+\alpha}}{\partial \dot{q}_\nu}\ddot{q}_\nu+\text{不含 }\ddot{q}_\nu\text{ 的项}, \tag{43}$$

因此，

$$\frac{\partial \ddot{q}_{m+\alpha}}{\partial \ddot{q}_\nu}=\frac{\partial \dot{q}_{m+\alpha}}{\partial \dot{q}_\nu}. \tag{44}$$

在 (29)，(34) 二式中令 $\pi=q$，并代入 (44)，即得:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\nu}-\frac{\partial T_0}{\partial q_\nu}+\frac{\partial G_1}{\partial \ddot{q}_\nu}=Q_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}Q_{m+\alpha}\frac{\partial \dot{q}_{m+\alpha}}{\partial \dot{q}_\nu}. \tag{45}$$

上式与 (41) 的差别仅在于 $a_{\alpha\nu}$ 被 $\dfrac{\partial \dot{q}_{m+\alpha}}{\partial \dot{q}_\nu}$ 所代替.

当约束为二阶的，即

$$\ddot{q}_{m+\alpha}=\ddot{q}_{m+\alpha}(q;\dot{q};\ddot{q}_\nu)\quad(\alpha=1,\cdots,l;\nu=1,\cdots,m;\ m=n-l) \tag{46}$$

则在 (45) 式中只需将 $\dfrac{\partial \dot{q}_{m+\alpha}}{\partial \dot{q}_\nu}$ 代之以 $\dfrac{\partial \ddot{q}_{m+\alpha}}{\partial \ddot{q}_\nu}$ 即可，T_0，G_1 均有如前的意义.

现在将刚体的 $\boldsymbol{\omega}$ 广义进动条件作为非完整约束[1]，利用 (37) 推导其动力学方程.

设角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在对固定点的三个主轴上的投影为 p，q，r，则 $\boldsymbol{\omega}$ 广义进动条件为[1]:

$$p\dot{q}-\dot{p}q+r(p^2+q^2)-\lambda(p^2+q^2)^{3/2}=0 \tag{47}$$

式中 λ 为一任意常数. 以欧拉角表示上式，则有:

$$\ddot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta-\ddot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta+2\dot{\psi}\dot{\theta}^2\cos\theta+\dot{\psi}^3\sin\theta\cos\theta-\lambda(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)^{3/2}=0 \tag{48}$$

这是一个二阶线性非完整约束. 取 p，q，r 为伪速度. 设刚体对固定点的主惯性矩为 A，B，C，则[3]

$$\tilde{T}_0=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2),\quad \tilde{L}_p(\tilde{T}_0)=A\dot{p}+(C-B)qr$$

$$\tilde{L}_q(\tilde{T}_0)=B\dot{q}+(A-C)rp,\quad \tilde{L}_r(\tilde{T}_0)=C\dot{r}+(B-A)pq$$

$$G=\frac{1}{2}[A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2+2(C-B)rq\dot{p}$$

$$+2(A-C)pr\dot{q}+2(B-A)pq\dot{r}]+(\text{不含 }\dot{p},\ \dot{q},\ \dot{r}\text{ 的项}).$$

以 $\dot{q}$, $\dot{r}$ 为独立的伪加速度，$\dot{p}$ 为不独立的伪加速度，则有：

$$\frac{\partial\dot{p}}{\partial\dot{q}}=p/q,\quad \frac{\partial\dot{p}}{\partial\dot{r}}=0;\quad G_1=\frac{1}{2}A\dot{p}^2+(C-B)rq\dot{p}.$$

因为约束 (47) 是二阶的，在 (37) 中可以取 $k=0$，因此，只要计算 $\frac{\partial G_1}{\partial\dot{\pi}}$ 即可。其中

$$\frac{\partial G_1}{\partial\dot{q}}=[A\dot{p}+(C-B)rq]\frac{p}{q},\quad \frac{\partial G_1}{\partial\dot{r}}=0.$$

代入 (37)，得伪坐标形式的动力学方程：

$$\left.\begin{aligned}&B\dot{q}+(A-C)pr+[A\dot{p}+(C-B)rq]\frac{p}{q}=\Pi_q\\&C\dot{r}+(B-A)qp=\Pi_r\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

其中

$$\Pi_q=P_q+P_p\frac{p}{q},\ \Pi_r=P_r.$$

而

$$(P_p,P_q,P_r)=(Q_\psi,Q_\varphi,Q_\theta)\begin{pmatrix}\sin\varphi/\sin\theta & \cos\varphi/\sin\theta & 0\\ -\dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta} & -\cos\varphi\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} & 1\\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\end{pmatrix}.$$

故有：

$$\Pi_q=\frac{\dot{\psi}}{q}(Q_\psi-Q_\varphi\cos\theta)+Q_\theta\left(\frac{p}{q}\cos\varphi-\sin\varphi\right),$$

$$\Pi_r=Q_\varphi.$$

代入 (49)，化简得：

$$\begin{aligned}&C\dot{r}-(A-B)pq=Q_\varphi,\\&C\dot{r}\dot{\psi}\cos\theta+Ap\dot{p}+Bq\dot{q}+(A-B)pq\dot{\varphi}=\dot{\psi}Q_\psi+\dot{\theta}Q_\theta.\end{aligned}\tag{50}$$

方程 (50)，约束方程 (47)，和欧拉运动学方程，即 p, q, r 和 $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ 之间的关系式，六个方程构成求解 p, q, r, ψ, φ, θ 的封闭方程组。如果 Π_q, Π_r 与广义坐标无关，则由(47)，(49) 即可解出 p, q, r.

(50) 式和 [1] 所得到的方程完全相同，但在计算上要简单些。

参　考　文　献

[1] Добронравов, В. В., Основы Механики Неголономных Систем, Изд. «Высшая школа», Москва, 1970.
[2] 牛青萍，力学学报，7 (1964)，2.
[3] Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А., Динамика Неголономных Систем, Изд. «НАУКА», М. 1967.

www.cnki.net

GENERALIZATION OF APPELL EQUATION AND TZENOFF EQUATION

Xue Wenxi

(Xian Mining Institute)

Abstract In this paper a new variation principle is presented. It is available to non-holonomic systems of any order and Gauss's principle can be derivated from it as a corollary. By the use of the new principle, Appell's equations and Tzenoff's equations are generalized to non-holonomic systems of any order. As a example, a second order non-holonomic system is given to illustrate the application of the equations obtained.

Key words: non-holonomic, dynamic, Tzènoff's equation, Appells equation.