

幂率流体圆管非定常流动的数值分析

陈天翔

(中国科学院成都分院数理室)

摘要 本文讨论水平圆管中幂率流体的起动问题。用显式和隐式两种格式，我们得到了问题的数值解并从而得到流动建立时间的近似公式。

关键词 非牛顿流体、圆管流动、非定常流动、计算流体力学。

均匀水平圆管流动问题是一种最简单的流体力学问题，有着广泛的理论与实际意义。早在1932年 Szyrman^[1]就得到了牛顿流体起动问题的 Fourier-Bessel 级数解。

在工业生产中，高分子聚合物溶液，高浓度水煤浆等的力学本构关系可以用幂律模型来描述。Balm.r 和 Fiorina^[2]用预测-校正方法得到了幂律流体起动问题的数值解。然而，并不象文献[2]中所说的：“对于 $n = 1$ 的情形，数值解与解析解符合得很好，误差小于1%”。事实上，误差已达到20%。

本文的目的是重新计算这些数值解。为慎重起见，本人用两种差分格式进行了数值计算得到了同样的结果。这两种方法对于幂律流体其它问题的数值计算也是适用的。

一、问题的提法及无量纲化

考虑直圆管内幂律流体在固定压力梯度下流动的建立。设圆管半径为 A ，开始流体是静止的，压力梯度 $-\partial p/\partial z = \text{const}$ 。取柱坐标系如图1。流体速度为 u ，沿管轴方向。运动方程为

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \eta \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (1)$$

压力梯度 $f = -\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.} \quad (1a)$

表观粘度 $\eta = m \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{n-1} \quad (1b)$

m 为稠度系数， n 为流动行为指数。

文献[6]指出，所有拟塑性流体 ($n < 1$)，在高切变率和低切变率时的粘度都是恒定的。低切变率下的恒定粘度 η_0 称为零剪粘度，它对于实际问题往往是重要的。本文采用改进的幂率流体模型，表观粘度为

本文系周光阔编委推荐。于1985年5月30日收到。

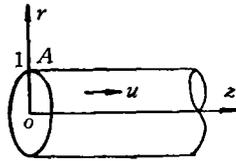


图 1

$$\eta = \begin{cases} m \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{n-1} & (n \geq 1 \text{ 时}) \\ \min \left(m \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{n-1}, \eta_0 \right) & (n < 1 \text{ 时}) \end{cases}$$

η_0 可以由实验测得. 当 η_0 很大时改进模型与普通的幂率流体模型的差别就很小了.

为叙述方便, 在推导无量纲方程和差分方程时表观粘度仍采用 (1b) 式, 而在数值计算时我们才重新考虑零剪粘度. 流动经过充分长的时间趋于定常, 这时 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. 将它代入 (1) 式可以得到定常解

$$u_s(r) = u_m \left[1 - \left(\frac{r}{A} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (2)$$

其中 $u_m = \frac{n}{n+1} \left(\frac{f}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} A^{\frac{1}{n}+1}$ 为速度分布的最大值, 也就是圆管中心处的速度. 引入无量纲参量.

$$Y = \frac{r}{A}, \quad U(T, Y) = \frac{u}{u_m}, \quad T = t f / \left[2\rho \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n u_m \right] \quad (3)$$

运动方程可化为无量纲形式

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \quad (4)$$

初条件为 $U(0, Y) = 0$, 边界条件为 $U(T, 1) = 0$, $\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = 0$, 定常态解为 $U_s = 1 - Y^{\frac{1}{n}+1}$.

二、Szymanski 的解析解

Szymanski^[2] 1932 年得到了问题 (4) 在 $n = 1$ 时的级数解

$$U = 1 - Y^2 - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k Y)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)} \exp(-\lambda_k^2 T) \quad (5)$$

其中 λ_k 为零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的第 k 个零点. J_0 与 J_1 可由下面幂级数求得:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{4^m (m!)^2}, \quad J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m m! (m+1)!}$$

计算的结果见图 2.

这些结果与文献 [3-5] 中的完全相同, 与文献 [2] 中的图 3 相差甚远.

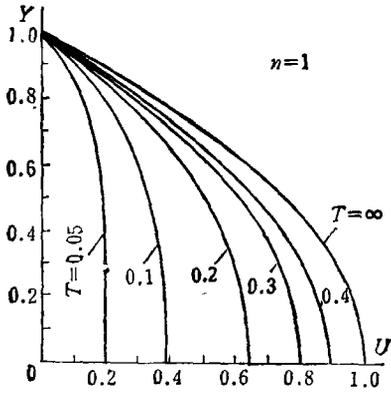


图 2

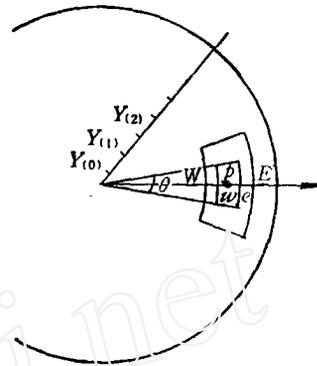


图 3

三、数值方法与结果讨论

1. 控制容积法及显式格式求解

方程(4)的分母中含有 Y , 为了避开原点, 我们沿管子径向划分 $N + 0.5$ 个区间, 每个区间长度为 H , 于是有 $H = \frac{2}{2N + 1}$. 取 $Y(0) = \frac{H}{2}$, 于是 $Y(I) = (I + 0.5)H$, $Y(N) = 1$.

取张角为 θ 的小控制面积 (图 3). 在控制容积内对方程(4)积分:

$$\int_{Y_w}^{Y_c} dY \int_{\theta} \left[\frac{\partial U}{\partial T} - 2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n \right] Y d\theta = \int_{Y_w}^{Y_c} dY \int_{\theta} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial Y} \right] d\theta$$

我们采用显式格式, 只有 $\frac{\partial U}{\partial T}$ 中含有新时刻的速度 U^* . 设时间步长为 τ , 得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (Y_c^2 - Y_w^2) \left[\frac{U_p^* - U_p}{\tau} - 2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n \right] &= Y_c \left| \frac{U_E - U_p}{H} \right|^{n-1} \left(\frac{U_E - U_p}{H} \right) \\ &\quad - Y_w \left| \frac{U_p - U_w}{H} \right|^{n-1} \left(\frac{U_p - U_w}{H} \right) \end{aligned}$$

令 p 点的径向坐标为 $Y(I)$, 于是 $Y_c = Y(I + 0.5) = (I + 1)H$, $Y_w = Y(I - 0.5) = IH$, $U_p = U(I)$, $U_w = U(I - 1)$, $U_E = U(I + 1)$. 令 $R = \frac{\tau}{H^2}$. 最后得到差分方程

$$\begin{aligned} U^*(I) &= 2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n \tau + U(I) + \frac{I + 1}{I + 0.5} R \left| \frac{U(I + 1) - U(I)}{H} \right|^{n-1} \\ &\quad \times [U(I + 1) - U(I)] - \frac{I}{I + 0.5} R \left| \frac{U(I) - U(I - 1)}{H} \right|^{n-1} [U(I) - U(I - 1)] \quad (6) \end{aligned}$$

初条件: 计算开始时令 $U(I) = 0 \quad (I = 0 \dots N)$ (6a)

边界条件: $U(N) = 0, U(0) = U(-1)$ (6b)

在计算机程序中令

$$F_1 = U(I + 1) - U(I), \quad F_2 = U(I) - U(I - 1),$$

$$F_3 = \left| \frac{F_1}{H} \right|^{n-1}, \quad F_4 = \left| \frac{F_2}{H} \right|^{n-1}.$$

于是差分方程 (6) 可写成

$$U^*(I) = 2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n \tau + U(I) + \frac{I+1}{I+0.5} R F_1 F_3 - \frac{I}{I+0.5} R F_2 F_4, \quad (7)$$

当 $n \leq 1$ 时, 幂函数 x^{n-1} 在 $x=0$ 处是没有定义的. 所以, 在 $n=1$ 时令 $F_3=1, F_4=1$. 在 $n < 0$ 时, 由于 F_3, F_4 不能大于无量纲零剪粘度 FM , 于是有

$$F_3 = \min \left(\left| \frac{F_1}{H} \right|^{n-1}, FM \right), \quad F_4 = \min \left(\left| \frac{F_2}{H} \right|^{n-1}, FM \right)$$

我们计算了幂律指数 n 等于 0.5, 1, 1.5, 2.5 和 4 五种情况, 所得的结果如图 4—图 6

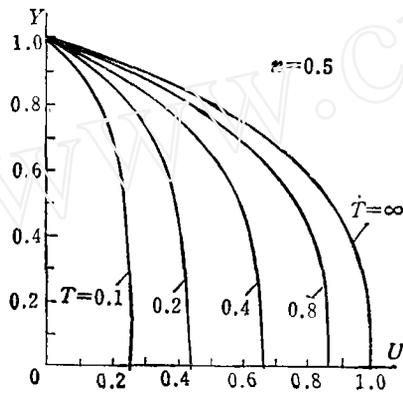


图 4

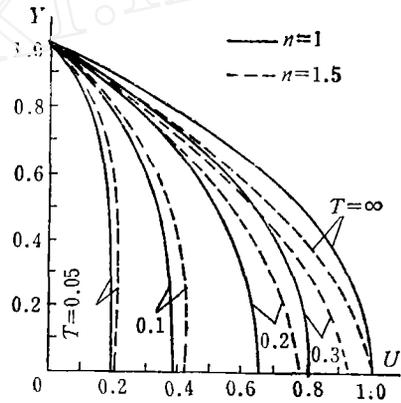


图 5

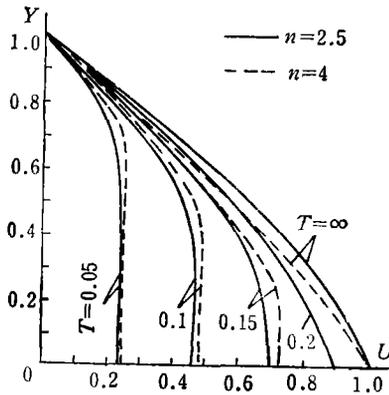


图 6

可以看出, 图 5 与图 2 符合得相当好. 上面各图与文献 [2] 的结果差别很大. 显式格式 (6) 的稳定条件为

$$\max(RF_3, RF_4) \leq 0.5 \quad (8)$$

当 $n \geq 1$ 时, 这一条件是容易得到满足的. 当 $n < 1$ 时, 稳定条件 (8) 成为 $R \times FM \leq 0.5$. 一般说来 FM 具有 10^2 的数量级. 所以, 为使格式稳定, 就必须取很小的时间步

长,从而使计算量增加很多,这时采用隐式格式则更为有利.

2. 隐式格式求解

Balmer 和 Fiorian^[2]采用时间向后、空间中心差分的方法得到了方程 (4) 的隐式差分方程

$$C(I, 1)U^*(I - 1) + C(I, 2)U^*(I) + C(I, 3)U^*(I + 1) = C(I, 0) \quad (9)$$

其中

$$C(I, 1) = G(I)R \left(n - \frac{1}{2I + 1} \right), \quad C(I, 2) = -1 - 2G(I)Rn,$$

$$C(I, 3) = G(I)R \left(n + \frac{1}{2I + 1} \right), \quad C(I, 0) = -2 \left(\frac{n + 1}{n} \right)^n \tau - U(I),$$

$$G(I) = \left| \frac{U^*(I + 1) - U^*(I - 1)}{2H} \right|^{n-1}$$

不带“*”号的 $U(I)$ 为上一时刻的速度值. 在 $n = 1$ 和 $n < 1$ 时, $G(I)$ 的表达式与第

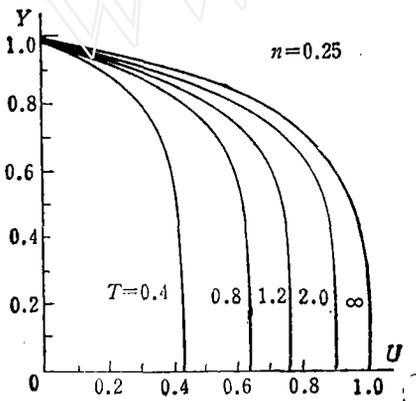


图 7

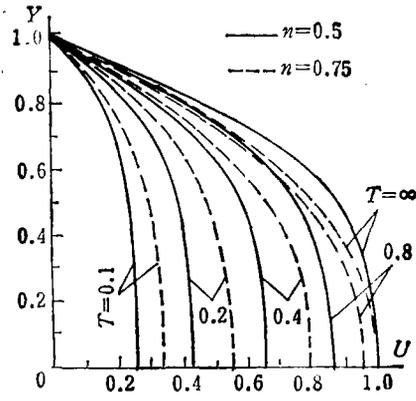


图 8

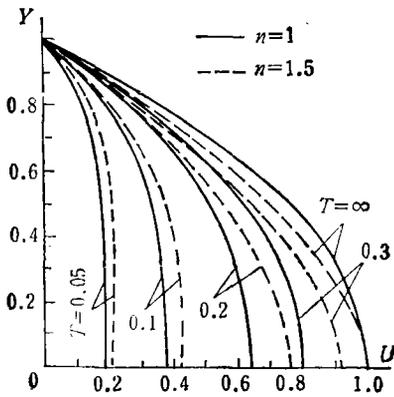


图 9

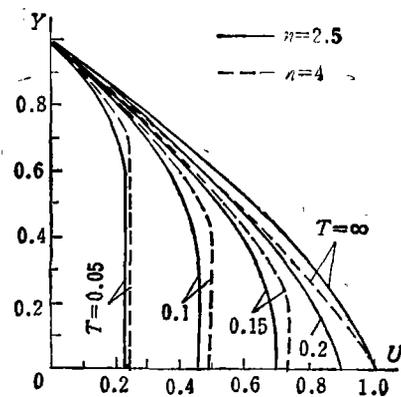


图 10

1 节中相同. 初、边界条件同 (6a), (6b).

预测-校正过程实际上是为解非线性代数方程组 (9) 而设计的一种迭代过程. 文献 [2] 采用牛顿流体的解作为新的时间开始时解的预测值, 以此来计算表观粘度. 实际的计算表明, 旧的时间步的解比牛顿流体的解更接近新时间步的解, 用它作为预测值可以减少迭代次数. 我们用这方法计算了 n 等于 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2.5 和 4 七种情况, 结果如图 7—图 10.

3. 结果讨论

在以上的计算中, 我们所用的是时间向前和向后差分, 空间中心差分, 所以差分方程 (7) 和 (9) 的截断误差为 $O(\tau, H^2)$. 我们已经令 $R = \frac{\tau}{H^2}$, 在以上所有计算中都有 $R < 1$. 于是截断误差为 $O(H^2)$. 由于以上各算例中网格数 $N = 2\bar{v}$, 因此 $H = \frac{2}{2N+1} = \frac{2}{41}$. 由此可得差分方程 (7) 与 (9) 的截断误差为 $O(0.001)$.

仔细比较两种不同的方法所得的结果图 4—图 6 和图 7—图 10 可以看出, 它们之间的差不超过截断误差 $O(0.001)$. 所以, 本文提供的数据和图表是正确的.

四、流动建立时间

从上节的图线可以明显地看出, 对于同一时刻 T , 较大的幂律指数 n 的速度分布曲线更靠近定常态曲线. 由此似乎可以得出结论, 幂律指数大的流体可以更快地达到定常态状态^[2]. 实际上这个结论是不对的, 原因很简单, 无量纲时间 T 中含有幂律指数 n 以及其它参数, 它并不能代表真正的流动发展时间 t .

为了求得流动建立所需的时间 t_s , 我们定义流量 $q(t)$ 达到定常态流量 q_m 的 99% 的时刻为流动建立时间 t_s . 即 $q(t_s)/q_m = 0.99$, 由变换 (3) 可得 $q(t) = u_m A^2 Q(T)$, $q_m = u_m A^2 Q_m$. 其中 $Q(T)$ 为无量纲流量

$$Q(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 U Y dY d\theta.$$

Q_m 为定常态的无量纲流量

$$Q_m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 U_s Y dY d\theta.$$

于是有 $q(t)/q_m = Q(T)/Q_m$ 这说明, 流动建立时间 t_s 也是无量纲流量 $Q(T)$ 达到定常态流量 99% 的时间.

由 (4c) 及上述 Q_m 式可得

$$Q_m = \frac{n+1}{3n+1} \pi$$

$Q(T)$ 可以在求 U 的过程中用数值积分求得.

表 1 列出流量达到 95% Q_m —99% Q_m 的时刻 $T_{0.95}$ — $T_{0.99}$, 这些数据对于实际应用来说是方便的.

无量纲流动建立时间 T , 可以用下列公式来近似

表 1 无量纲流动建立时间

n	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2.5	4
$T_{0.6}$	2.69	1.19	0.722	0.514	0.335	0.223	0.185
$T_{0.96}$	2.89	1.29	0.778	0.554	0.358	0.235	0.186
$T_{0.97}$	3.13	1.42	0.854	0.604	0.387	0.250	0.192
$T_{0.98}$	3.43	1.61	0.960	0.674	0.428	0.271	0.205
$T_s = T_{0.99}$	3.86	1.93	1.144	0.796	0.495	0.365	0.224

$$T_s = \left[0.909 - 0.0452n - \frac{0.626}{(n + 0.701)^{3.79}} \right] \times \frac{2^{\frac{1}{n}-1}}{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n-1}}$$

与表 1 的数据比较,误差小于 3%。将上式转换成有量纲形式,可得流动建立时间

$$t_s = \left[0.909 - 0.0452n - \frac{0.626}{(n + 0.701)^{3.79}} \right] \times \frac{\rho^{1/n-1} A^{1/n+1}}{m^{1/n}}$$

由上式可以看出,当稠度系数 m 增加或管径减小或密度降低时,流动建立时间将缩短,这是与人们的经验一致的。对于胀塑性流体 ($n > 1$) 管子压力梯度增加会使 t_s 缩短,而对于拟塑性流体 ($n < 1$) 效果则相反。流动建立时间与幂律指数 n 的关系是复杂的,而且受其它参数的影响。对于牛顿流体有

$$t_s = 0.796 \frac{A^2}{\nu}$$

流动建立时间与压力梯度无关,与运动粘度成反比,与管子截面积成正比。

参 考 文 献

- [1] Szymanski, P., *J. Math. Pure Appl.*, Ser. 9, 11(1932), 67—107.
- [2] Balmer, R. T., Fiorina, M. A., Unsteady flow of an inelastic Lower-law fluid in a circular tube, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 7(1980), 189—198.
- [3] Beiglböck, W. et al, Unsteady viscous flows, Springer series in Comp. Phys., (1981), 92.
- [4] Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Uni. Press, (1967), 193—195.
- [5] White, F. M., Viscous fluid flow, McGraw-Hill, (1974), 138.
- [6] 陈文芳, 非牛顿流体力学, 科学出版社, (1984).

NUMERICAL SIMULATION OF UNSTEADY FLOW OF A POWER-LAW FLUID IN A CIRCULAR TUBE

Chen Tianxiang

(Institute of Mathematical Science Chengdu Branch, Academia Sinica)

Abstract: In this paper, the power-law fluid with a sudden constant pressure gradient in a horizontal circular tube is discussed. Using implicit and explicit methods we obtained the numerical solution for power-law indexes from 0.25 to 4 and the formula for the time to reach steady state.

Key words: non-newton fluid, pipe flow, unsteady flow, computation fluid mechanics.