一种适用于大型结构布局优化的新方法

冯 元 生

(西北工业大学)

提要 对于元件尺寸优化，本文提出了一种新的优化准则法，其约束有应力约束、位移约束和最小尺寸限约束。通过算例阐明，只需迭代3—5次即可达到优化解。对于结构的节点位置优化，本文提出了一种加速收敛的梯度法。全体节点位置可以集合起来，看作一个广义设计变量。假设这个广义变量的每一个分量的增量，正比于由于对应的那一个节点位置变化以后引起的结构重量变化率。在计算这个结构重量变化率时，本文提出了能迅速近似算出而精度很高的方法。对搜索步长加以适当控制以加快收敛速度。通过算例阐明，只需把节点位置迭代 3—5 次，即可得到节点位置的优化解。故一个结构的布局优化问题总共只需迭代 9—15 次。

一、引　　言

本文提出了一种布局优化的新方法。这个方法可以用于受到多组外载、具有多种约束（例如应力约束、位移约束和最小尺寸限约束）下的结构布局优化问题。不仅可以解元件尺寸优化问题，还可以解节点位置优化问题。通过算例阐明，对于每一个给定布局，只要迭代3—5次，即可得到元件尺寸优化解。至于节点位置的优化，通过算例也可阐明，只需迭代3—5次，即可得到节点位置的优化解。因之，总共只要迭代9—15次即可得到一个满意的结构布局优化解。由于这个方法看来非常有效，故估计可以顺利地运用这个方法以解决大型结构的布局优化问题。对于元件尺寸优化，本文提出了一种新的优化准则法。对于节点位置的优化，本文提出了一种采用近似手段的、控制步长以加速收敛的梯度法。

二、元件尺寸优化

1．基于相对刚度比的一种新的位移优化准则法

（1）一个位移约束下的优化准则

为了说明及书写简单，本文以板杆结构为例加以阐明，即结构由受轴向力的杆元和受剪应力的板元组成。

应用单位载荷法可把位移表达成下式

$$\delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{F_i^P F_i^Q L_i}{E_i A_i}+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{q_i^P q_i^Q S_i}{G_i t_i} \tag{1}$$

为了简化书写，上述公式可简化如下：

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i^P F_i^Q L_i}{E_i A_i} \tag{1a}$$

当 $F_i^P F_i^Q>0$，对应的元件为主动元件；

当 $F_i^P F_i^Q\leqslant 0$，对应的元件为被动元件。

假定结构由 n_a 个主动元件和 n_p 个被动元件组成（$n_a+n_p=n$）。

$$\frac{\partial\delta}{\partial A_i}=-\frac{F_i^P F_i^Q L_i}{E_i A_i^2},\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial W_i}=\frac{1}{\rho_i L_i}\ \frac{\partial\delta}{\partial A_i}=-\frac{F_i^P F_i^Q}{\rho_i E_i}\ \frac{1}{A_i^2}\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a) \tag{3}$$

再者，
$$\frac{\partial\delta}{\partial A_i}<0\qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a)$$

所以
$$\frac{\partial\delta}{\partial W_i}<0\qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a)$$

令 C_i 代表 i 元的"相对刚度"，也即 i 元单位重量增加时所引起的结构刚度的变化量。对于主动元件，增加元件重量导致结构刚度增加，故此时 C_i 值为正。

$$C_i=\left|\frac{\partial\delta}{\partial W_i}\right|=\frac{F_i^P F_i^Q}{\rho_i E_i}\ \frac{1}{A_i^2}\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a) \tag{4}$$

C_i 值愈大，增加该元重量所带来的好处愈大。因此，如果一共只讨论两个元件，它们的相对刚度分别为 C_{il} 和 C_{is}，且 $C_{il}<C_{is}$。依靠增加第 l 元的重量和减小第 s 元的重量，可以保持在结构的位移量 δ 不变的情况下，降低这两个元件的总重量。故

$$C_i\equiv\text{const.}\qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a) \tag{5}$$

是只有一个位移约束时的最优准则。公式（5）也可从Kuhn-Tucker条件导出[1]。

（2）只有一个位移约束情况下的迭代式

令

$$C_{max}=\max\quad (C_1,\ C_2,\cdots,\ C_{na})$$
$$\overline{C}_{im}=C_i/C_{max}\qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n_a)$$
$$\overline{\delta}=\delta/[\delta]$$

式中〔δ〕为许可位移。如前面已阐明的，这时元件尺寸优化的迭代式可采取下述形式：

$$A_i^{(K+1)}=A_i^{(K)}[r_1^{(K)}(\overline{C}_{im}^{(K)})^{r_2^{(K)}}(\overline{\delta}^{(K)})^{r_3^{(K)}}] \tag{6}$$

式中：$r_1^{(0)}=1.3$，$r_1^{(1)}=1.2$，$r_1^{(2)}=1.1$，$r_1^{(3)}=r_1^{(4)}=\cdots=1.0$；$r_2^{(K)}\equiv 0.5$；$r_3^{(K)}\equiv 1.0$。因之，公式（6）可以改写如下：

$$A_i^{(K+1)}=A_i^{(K)}[r_1^{(K)}\sqrt{\overline{C}_{im}^{(K)}}\ \overline{\delta}^{(K)}] \tag{6a}$$

在公式（6）或(6a)中，随着迭代次数的增加，$r_1\longrightarrow 1$，$\overline{\delta}\longrightarrow 1$，$\overline{C}_{im}\longrightarrow 1$；因此 $A_i^{(K+1)}\longrightarrow A_i^{(K)}$。$\overline{C}_{im}\equiv 1$ 代表此时的结构元件尺寸分配为最优分配。$\overline{C}_{im}\equiv 1$ 再结合上 $\overline{\delta}=1$，代表着此时结构尺寸为最优尺寸。我们取 $A_i^{(K+1)}$ 元件尺寸正比于相对刚度 C_i 是基于下述

物理概念：增加 C_i 值大的元件的尺寸和减小 C_i 值小的元件的尺寸可以减少结构的总重。

公式（6）除了可用概念阐明外，还可由下述步骤推导：

$$\overline{C}_{im}=1,\quad A_i[\delta]=A_i[\delta]\overline{C}_{im},\quad A_i^{(K+1)}[\delta]=A_i^{(K)}\delta^{(K)}\overline{C}_{im}^{(K)},$$
$$A_i^{(K+1)}=A_i^{(K)}[r_1^{(K)}(\overline{C}_{im}^{(K)})r_2^{(K)}(\overline{\delta}^{(K)})^{r_3^{(K)}}]$$

在公式（6a）中取 $r_2^{(K)}=0.5$ 是为了消除迭代过程可能出现振荡。

（3）多个位移约束下的处理方法

对于多个位移约束，如通常一样，在每次迭代中，对全部位移约束只取有限的几个有效约束。本文每次迭代时只取两个有效约束。它们分别对应于所有 $\overline{\delta}_j^{(K)}$ 中的最大值与次最大值。用 $\overline{\delta}_m$ 与 $\overline{\delta}_{m-1}$ 分别代表最严重位移约束情况与次最严重位移约束情况。据这种情况，分别用公式（6a）迭代，可得对应的 $A_{i\overline{\delta}m}^{(K+1)}$ 与 $A_{i\overline{\delta}m-1}^{(K+1)}$。我们取

$$A_{i\delta}^{(K+1)}=\max(A_{i\overline{\delta}m}^{(K+1)},\quad A_{i\overline{\delta}m-1}^{(K+1)}) \tag{7}$$

为了使某些元件的尺寸尽量减小至其应具有的最小尺寸，专门规定了一类称之为“小量元”的元件，以及与这种元件相对应的迭代式。

令

$$\delta_m=\sum_{i=1}^{na}\frac{F_i^pF_i^qL_i}{E_iA_i}=\sum_{i=1}^{na}\delta_{mi} \tag{8}$$

$$\delta_{ma}=\max(\delta_{m1},\ \delta_{m2},\ \cdots,\ \delta_{mna}) \tag{9}$$

$$\overline{\delta}_{mi}=\delta_{mi}/\delta_{ma} \tag{10}$$

当

$$\overline{\delta}_{mi}<0.06 \qquad \text{或} \qquad \overline{C}_{im,\overline{\delta}m}<0.06 \tag{11}$$

这种元件称之为“小量元”，其对应的迭代式如下：

$$A_{\Delta\delta}^{(K+1)}=A_{\Delta\delta}^{(K)}[r_1^{(K)}\overline{C}_{im,\overline{\delta}m}^{(K)}\overline{\delta}_m^{(K)}] \qquad \text{(6b), (7a)}$$

注意：只对于最严重位移约束情况考虑小量元处理。

为了改进收敛性，在 $K\geqslant4$ 时，如果 $A_{i\overline{\delta}m-1}^{(K)}>A_{i\overline{\delta}m}^{(K)}$ 条件，成立，则用公式（7b）代替原来的公式（7）。

$$A_{i\delta}^{(K+1)}=C^{(K)}A_{i\overline{\delta}m-1}^{(K)}+(1-C^{(K)})A_{i\overline{\delta}m}^{(K)} \qquad (K\geqslant4) \tag{7b}$$

式中

$$C^{(K)}=0.8-0.1(K-4) \qquad (K=4—12)$$
$$C=0 \qquad (K>12)$$

如果整个结构只有两个设计变量（这是很少见的），则可取 $r_2^{(K)}=1.0—2.0$。

2．存在应力约束，位移约束和最小尺寸限约束情况下时，结构元件尺寸优化过程中所采取的处理方法

应力约束采用修改的满应力设计方法，其迭代式为

$$A_{i\sigma}^{(K+1)}=A_{i\sigma}^{(K)}\left[R_1^{(K)}\left(\frac{\sigma_i^{(K)}}{[\sigma_i]^{(K)}}\right)^{R_2^{(K)}}\right] \tag{12}$$

对于同时存在应力、位移和最小尺寸限等几种约束时，用包络法处理之，即

$$A_i^{(K+1)}=\max(A_{i\sigma}^{(K+1)},\ A_{i\delta}^{(K+1)},\ A_{i\,min}) \tag{13}$$

3．停机标准

令

$$R_{max}=\max(\bar{\sigma}_{qi},\ \bar{\delta}_{qr}) \tag{14}$$

$$W_K=R_{max}^{(K)}W^{(K)} \tag{15}$$

$$d^{(K)}=(W_K-W_{K-1})/W_{K-1} \tag{16}$$

式中：q——载荷情况；i——元件编号：r——位移约束编号：$\bar{\sigma}$——$\sigma/[\sigma]$；d——结构重量变化率。

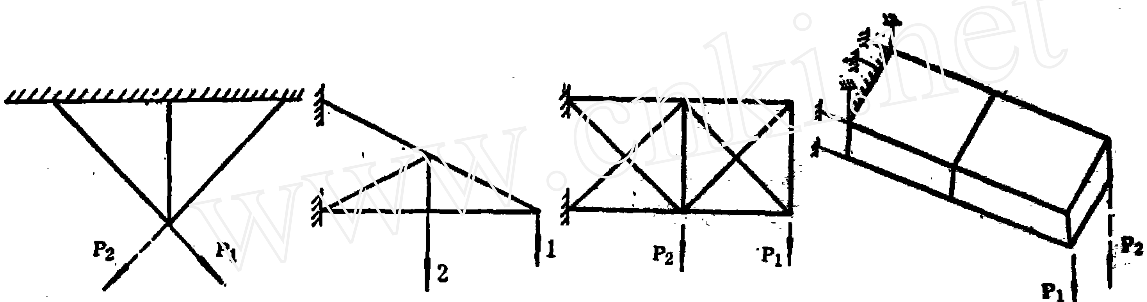
停止迭代计算的停机标准可取作

$$|d^{(K)}|\leqslant\varepsilon \tag{17}$$

在迭代过程中，W_K 只用于分析是否已到了停机时刻；当然，所得出的最终迭代结果、其各元件尺寸是需乘以 $R_{max}^{(K)}$ 的，以保证满足约束条件。

4．算例

计算的例题及其结果见图1。由于这些例题是人所共知的，故未示出其原始数据。



(a)	(b)	(c)	(d)
W_0=3.171	W_0=143.75	W_0=8792.3	W_0=747.5
W_1=2.8567	W_1=126.68	W_1=5944.2	W_1=376.1
W_2=2.8287	W_2=122.10	W_2=5675.7	W_2=371.6
W_3=2.8284	W_3=120.50	W_3=5224.8	W_3=368.1
	W_4=119.94	W_4=5128.0	W_4=359.0
		W_5=5077.5	

图1　元件尺寸优化的四个算例

本方法已成功地应用于大型结构上[2]。

三、节点位置优化

本文提出一种能加速收敛的梯度法用以解节点位置优化问题。提出了一种估算结构重量变化率（$\partial W/\partial Y_j$）的近似而又能保证足够精度的方法。

1．广义节点位置变量

在每一个有效约束情况下，全部节点位置变量可以集合地看作一个广义变量。这个广义变量每一分量的变化量、正比于对应点接位置变化所引起的结构重量变化率（$\partial W/\partial Y_j$）——也即重量梯度的分量。

2．梯度分量（$\partial W/\partial Y_j$）$^{(K)}$的近似计算方法

本文提出了下述计算结构重量变化率的近似而又有足够精度的方法。令

$$\frac{\partial W}{\partial Y_j} \cong \frac{\Delta W}{\Delta Y_j} \tag{18}$$

式中

$$\Delta Y_j^{(K)} = 0.0001\ Y_j^{(K)} \tag{19}$$

也即

$$Y_j^{(K')} = Y_j^{(K)} + \Delta Y_j^{(K)} = 1.0001\ Y_j^{(K)} \tag{20}$$

为了简化讨论，上式中只涉及节点的 y 方向位置变化。

（1）计算上述情况下，K' 节点位置时的各元件内力（所有节点位置中，只有第 J 个节点位置由 K 移至 K'）

由直刚法知

$$\begin{aligned}\{P\} &= [K]\{\delta\} = [K']\{\delta\} = ([K] + [\Delta K])(\{\delta\} + \{\Delta\delta\}) \\ &\cong [K]\{\delta\} + [K]\{\Delta\delta\} + [\Delta K]\{\delta\}\end{aligned} \tag{21}$$

由上式得

$$[K]\{\Delta\delta\} + [\Delta K]\{\delta\} = 0 \tag{22}$$

运用上述公式可以求得$\{\Delta\delta\}$，然后可求得$\{\delta'\}$（$\{\delta'\} = \{\delta\} + \{\Delta\delta\}$）。根据已求出的$\{\delta'\}$可以求出元件内力 F'。

（2）求解 K' 情况下最优元件尺寸的近似方法

对于应力元，假设 K' 情况下的应力与 K 情况下者相同，可得

$$A'_{ij} = A_{ij}\frac{F'_{ij}}{F'_{ij}} \tag{23}$$

对于位移约束元，若假设结构各元件的材料相同，则位移约束下的最优准则可以简化成

$$\frac{\sqrt{F_i^p F_i^q}}{A_i} = \text{const} \tag{24}$$

因此，我们有

$$A'_{ij} = A_{ij}\frac{\sqrt{F'^p_{ij} F'^q_{ij}}}{\sqrt{F^p_{ij} F^q_{ij}}} \tag{25}$$

式中 A'_{ij} 与 F'_{ij} 分别代表当第 J 个节点位置从 K 改变至 K' 时的 i 元件尺寸与内力。我们认为这个 A'_{ij} 可近似看作为最优尺寸。这样我们就可避免在求 K' 位置时最优元件尺寸所需作的元件尺寸优化工作，因而大大减少了迭代次数与计算工作量。

（3）确定当第 j 个节点位置由 K 移至 K' 时的重量变化量 ΔW_j

$$\Delta W_j \cong \sum_{i=1}^{n} \rho_i (l'_{ij} A'_{ij} - l_i A_i) \tag{26}$$

对于静定结构，采用上述近似计算方法所得的计算结果与精确解很符合。对于静不定结构，采用上述近似计算方法的计算精度要较静定结构情况略低一些，但其精度还是令人满意的。

3．节点位置优化的迭代式

节点位置的迭代式可以表示如下：

$$Y_j^{(K+1)} = Y_j^{(K)} - K_1^{(K)} \frac{(\partial W/\partial Y_j)^{(K)}}{W_K^{K_2^{(K)}}} Y_j^{(0)} \tag{27}$$

式中：$K=0，1，2，\cdots$； $K_1^{(0)}=1.0$；$K_1^{(1)}=0.8$；$K_2^{(2)}=0.6$； $K_1^{(3)}=0.4$；$K_1^{(4)}=0.2$；$K_1^{(5)}=0.1$；$K_1^{(6)}=0.1/2$，$K_1^{(7)}=K_1^{(6)}/2，\cdots$；

当 $$\frac{(\partial W/\partial Y_j)^{(K)}}{W_K}<0.25\text{ 时，}K_2^{(K)}=1；$$

当 $$\frac{(\partial W/\partial Y_j)^{(K)}}{W_K}\geqslant 0.25\text{时，}K_2^{(K)}=1+0.125K \tag{28}$$

注意：x 轴一般应取在大致对称位置，以避免 $Y_j^{(0)}$ 为小量。由于采用了 $K_1^{(K)}$ 与 $K_2^{(K)}$ 以控制步长，故没有采用在确定了沿梯度方向搜索后所需要的一维步长搜索。在上式中，W_K 是元件尺寸优化时由公式（15）算得。

4．算法过程

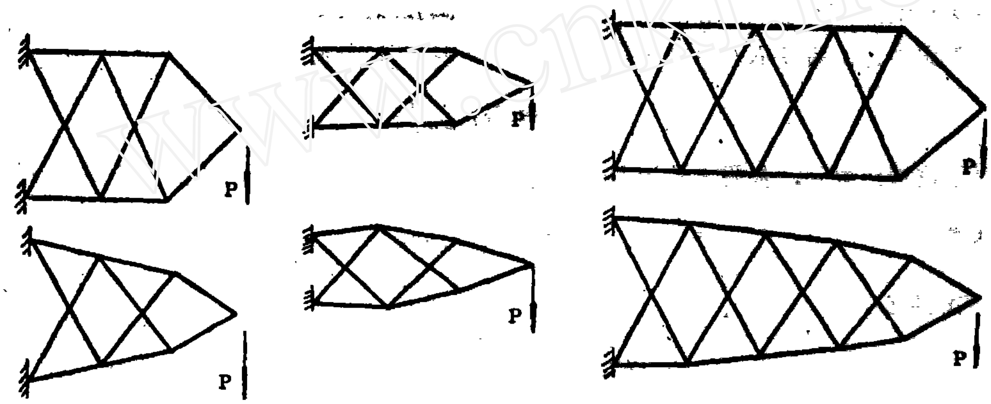
第一步：选择元件的初始尺寸 $A_i^{(0)}$。进行元件尺寸优化以获得最优元件尺寸 $A_i^{*(0)}$（节点位置都处于原来的布局状态 $Y_j^{(0)}$）。计算 W_0。

第二步：进行节点位置优化以得到 $Y_j^{(1)}$。

第三步：在节点位置 $Y_j^{(1)}$ 状态下，再进行元件尺寸优化以得到 $A_i^{*(1)}$。计算 W_1。

第四步：如果 $|d^{(1)}|\leqslant\varepsilon$，则停止计算；如 $|d^{(1)}|>\varepsilon$，则重复进行第二、三、四步。

5．算例



(a)

$Y_0=\{1.0,\ 1.0\}$

$W_0=11$

$Y_1=\{0.636364,\ 0.818182\}$

$W_1=9.650401$

$Y_2=\{0.500268,\ 0.759195\}$

$W_2=9.522000$

$Y_3=\{0.522956,\ 0.745534\}$

$W_3=9.518919$

(b)

$Y_0=\{0.5,\ 0.5\}$

$W_0=14.5$

$Y_1=\{0.482759,\ 0.586936\}$

$W_1=14.330896$

$Y_2=\{0.481320,\ 0.579997\}$

$W_2=14.324476$

$Y_3=\{0.481289,\ 0.583796\}$

$W_3=14.323364$

(c)

$Y_0=\{1.0,\ 1.0,\ 1.0,\ 1.0\}$

$W_0=24$

$W_1=23.373115$

$W_2=22.787267$

$W_3=22.362876$

$Y_3=\{0.529155,\ 0.750500,\ 0.886622,\ 0.971914\}$

图 2　布局优化的三个算例

四、结　　论

对于一个布局已定的结构，用本方法对大型结构进行元件优化，一般只需迭代3—5次即可得到优化解。对于节点位置优化，从较多算例来看，此时也可在 3—5 次迭代内得到最优

算例来看，此时也可在3—5次迭代内得到最优节点位置（对于在计算中的每一个布局，此时元件尺寸优化可只迭代3次）。因此，可以一共只迭代9—15次即得到一个满意的结构布局优化解。

参 考 文 献

〔1〕Khan, M. R., Willmert, K. D. and Thornton, W. A., A New Optimality Criterion Method for Large Seale Structures, American Institute of Aeronautics and Astronatics, Inc.(1978), 78—470.

〔2〕Qian Lingxi (钱令希) Stractural Optimization Research in China, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York(1982), 16—24.

A New Method of Configuration Optimation for Large Scale Structure

Feng Yuansheng

(Northwestern Polytechrical University, Xian, Shanxi, China)

Abstract

Two different kinds of optimization methods are presented in this paper. One is concerned with the optimization of member size (i. e. plate thickness and bar section area) under displacement constraints. The other is concerned with the optimization of joint positions.

A new optimality criterion method is used to optimize member sizes under displacement constraints. For a single displacement constraint the accurate optimality criterion is derived as follows:

$$\delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{F_i^pF_i^qL_i}{E_iA_i}+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{q_i^pq_i^qS_i}{G_it_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i^pF_i^qL_i}{E_iA_i} \tag{1}$$

Assume that the structure contains n_a active members.

$$\frac{\partial\delta}{\partial A_i}=-\frac{F_i^pF_i^qL_i}{E_iA_i^2},\quad(i=1,\ 2,\cdots,\ n_a) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial W_i}=\frac{1}{p_iL_i}\ \frac{\partial\delta}{\partial A_i}=-\frac{F_i^pF_i^q}{\rho_iE_i}\ \frac{1}{A_i^2}(i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{3}$$

Hence

$$C_i=\frac{F_i^p F_i^q}{\rho_i E_i}\ \frac{1}{A_i^2}\ (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{4}$$

And

$$C_i=\text{const.} \tag{5}$$

is the optimality criterion. The iterative formula is taken as follows:

$$A_i^{(K+1)}=A_i^{(K)}[r_1^{(K)}(\overline{C}_{im}^{(K)})^{r_2^{(K)}}(\overline{\delta}^{(K)})^{r_3^{(K)}}] \tag{6}$$

Where

$$\overline{C}_{im}=C_i/C_{max},\ C_{max}=\max(C_1,\ C_2,\cdots,\ C_{na}).$$

For multiple constraints only two active constraints are involved to derive the iterative formula. In order to eliminate oscillation of the iteration process and accelerate convergence the searching step length is specially chosen. For the given illustrative examples the optimal design can be reached within 3 5 iterations.

Fullv stressed design or a new optimality criterion is adopted for stress constrants.

A gradiente method with accelerated convergence is used to optimize the joint positions. All the joint positions can be regarded as a generalized variable. Each component of this variable is proportional to the rate of structural weight variation $(\partial W/\partial Y_i)$ owing to the varitaion of each joint positions. An approximate but accurate method is adopted in this paper to evaluate the rate of structural weight variation as follows:

$$[K]\{\Delta\delta\}+[\Delta K]\{\delta\}\cong 0. \tag{7}$$

According to this formula, force F' can be found. Then we can obtain the first approximate values of the member sizes in the K' case. For stress member

$$A_i'=A\frac{F_i'}{F_i} \tag{8}$$

For displacement constraint member

$$A_i'=A_i\frac{\sqrt{F_i'^P F_i'^Q}}{\sqrt{F_i^P F_i^Q}} \tag{9}$$

According to these member sizes we can calculate new $[K'']$. Substituting the new $[K'']$ for the $[K']$ of equation (7), we can obtain quite accurate F'' and the A''.

Applying the above method to optimize a given large scale structure, the optimization of joint positions can be reached within 3～5 iterations. For ever definite configuration the optimization of member sizes can be approximately reached within 3 iterations. Therefore, 9～15 iterations are needed to ohtain a satisfactory configuration optimization.