

在任意分布荷载作用下 弹性实心薄板的优化设计

俞焕然 叶开沅

(兰州大学数学力学系)

提要 本文研究了在各种边界条件下,在任意分布荷载作用下,在体积给定并受有几何约束的条件下,圆环形弹性实心薄板的最小柔顺度(最大刚度)的优化设计问题。利用叶开沅在1965年得出的阶梯折算法^[1],得到了目标函数关于设计变量的显式表示。导出了新的优化准则,将问题归结为一个传统的非线性规划问题。实例计算表明,我们的方法比之过去的方法具有简便、精确和普通的优点。

引 言

弹性连续体的最优设计问题日益引起人们广泛的注意,已成为近代优化的重要课题之一^[1],在这一领域中,关于弹性薄板的最优设计是近十年来兴起的研究课题。尽管在这一方面的文献与日俱增,但仍有一些问题需要加以进一步探讨^[2,3]。优化计算的方法也需要进一步发展。弹性薄板最优设计问题之一是:在给定材料体积及中面形状已知的条件下,寻求使板的柔顺度最小的板的厚度分布^[4,5]。在该问题中,设计变量是板的厚度分布函数,目标函数是板的柔顺度。对于这类问题,通常的方法是由变分原理出发,导出优化准则^[3,5]。按照这一准则所导出的最优厚度分布函数所满足的方程相当复杂,无法解析解出,只能以有限元方法来离散,以各个等厚度单元来近似厚度分布函数,然后以有限元求得的近似数值解来满足准则方程。由于不能给出目标函数关于设计变量(各单元厚度)的显式表示,因而给优化计算带来了困难,增加了工作量,且易引起计算的累积误差^[6]。

我们将采用文〔1〕所给出的阶梯折算法,给出一种新的优化计算方法。本文处理厚度以轴对称形式变化的环形板,以阶梯函数来逼近最优厚度分布函数,给出目标函数关于设计变量的显式表示。这一表示在离散化的条件下是精确满足弹性薄板理论的。它适用于任意的边界条件和任意的分布荷载作用。导出了新的优化准则,使问题归结为一阶导数已知(需要的话,亦可给出更高阶导数)的无约束非线性规划问题,并为全局解的存在性的讨论提供了一种新的讨论途径。

基 本 方 程

我们考虑内半径为 b , 外半径为 a 的圆环形弹性薄板。板由各向同性, 均匀的材料所构

成, 材料的弹性模量为 E , 泊松比为 ν 。取圆环的中心为极坐标原点。我们只研究板的厚度依赖于 r 的情况, 即板的厚度分布函数为 $h(r) (b \leq r \leq a)$ 的情况。作用在板上的任意的横向分布荷载为 $q(r, \theta)$ 。我们的问题是: 在给定的体积条件

$$\int_0^{2\pi} \int_b^a h(r) r dr d\theta = V_0 \quad (1)$$

以及厚度限制

$$h_{min} \leq h(r) \leq h_{max} \quad (2)$$

下, 寻求最优的厚度分布函数 $h(r)$, 使目标函数 (柔顺度)

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_b^a W(r, \theta) q(r, \theta) r dr d\theta \quad (3)$$

取最小值。式中的 $W(r, \theta)$ 为荷载 $q(r, \theta)$ 作用下板的挠度。

首先, 将荷载展成关于 θ 的 Fourier 级数

$$q(r, \theta) = q_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [q_m(r) \cos m\theta + \tilde{q}_m(r) \sin m\theta] \quad (4)$$

相应的板的挠度 $W(r, \theta)$ 可表为

$$W(r, \theta) = W_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [W_m(r) \cos m\theta + \tilde{W}_m(r) \sin m\theta] \quad (5)$$

如在 (4) 中只取有限的 N 项, 则 (5) 亦只须取相应的有限的 N 项。把仅取有限项的 (4) 和 (5) 代入 (3), 并计及 Fourier 级数的正交性, 我们有

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{m=1}^N [\Phi_m + \tilde{\Phi}_m] \quad (6)$$

式中

$$\Phi_0 = 2\pi \int_b^a q_0(r) W_0(r) r dr \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m &= \pi \int_b^a q_m(r) W_m(r) r dr \\ \tilde{\Phi}_m &= \pi \int_b^a \tilde{q}_m(r) \tilde{W}_m(r) r dr \quad (m=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

为利用文〔1〕的阶梯折算法, 我们将圆环形板用 $(n+2)$ 个圆周分割成 $(n+1)$ 个同心圆环, 见图 1。这 $(n+2)$ 个圆周的半径分别为 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+1}$, 其中 $\xi_0 = b$, $\xi_{n+1} = a$ 。

根据文〔1〕, 假定这 $(n+1)$ 个同心圆环中的每一个都是等厚度的, 亦即, 我们用阶梯函数来代替厚度分布函数 $h(r)$ 。于是, 第 i 个圆环的厚度为 $h_i (\xi_i \leq r \leq \xi_{i+1})$

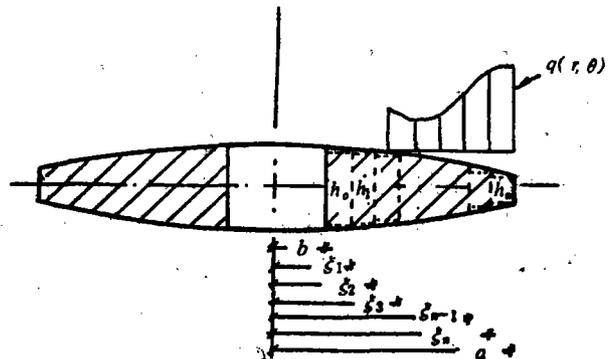


图1 环形板的离散化

($i=0, 1, \dots, n$)。对应于此厚度，相应的刚度 $D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\nu^2)}$ ($i=0, 1, \dots, n$)。

引入无量纲参数 $\beta_i = \xi_i/a$ ($i=0, 1, \dots, n$)，此时内边为 $\beta^0 = b/a$ ，外边为 $\beta_{n+1} = 1$ 。在这个情况下，约束条件 (1) 可写成

$$\sum_{i=0}^n \pi(\beta_{i+1}^2 - \beta_i^2)h_i = (1 - \beta_0^2)\pi h_u$$

式中 h_u 为给定体积 V_0 所对应的等厚度板的厚度。显然，它是给定的常数。上式可化为

$$\sum_{i=0}^n (\delta_i^*)^{-1/n}(\beta_{i+1}^2 - \beta_i^2) + \beta_0^2 - 1 = 0 \quad (9)$$

式中 $\delta_i^* = D_u/D_i$ ($i=0, 1, \dots, n$)， $D_u = \frac{Eh_u^3}{12(1-\nu^2)}$ 。

同样，约束条件 (2) 可化为

$$\delta_{mi_n}^* \leq \delta_i^* \leq \delta_{max}^* \quad (10)$$

这里 $\delta_{mi_n}^* = (h_u/h_{max})^3$ ， $\delta_{max}^* = (h_u/h_{mi_n})^3$

其次，把荷载 $q_m(r)$ (或 $\tilde{q}_m(r)$)， $q_0(r)$ 无量纲化，令

$$P_m(x) = \frac{q_m(r)a^3}{D_u} \left(\text{或 } P_m(x) = \frac{\tilde{q}_m(r)a^3}{\tilde{D}_u} \right) \quad (11)$$

$$P_0(x) = \frac{q_0(r)a^3}{D_v} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

式中

$$x = r/a \quad (12)$$

引入无量纲的径向弯矩，反力

$$M_m(x) = \frac{M_r^m(r) \cdot a}{D_u}, \quad V_m(x) = \frac{V_r^m(r) \cdot a^2}{D_u} \quad (m=0, 1, \dots, N) \quad (13)$$

式中 $M_r^m(r)$ 是荷载为 $q_m(r)$ (或 $\tilde{q}_m(r)$) 时板的径向弯矩， $V_r^m(r)$ 为相应的反力。则无量纲的挠度 $W_m^*(x) = \frac{W_m(r)}{a}$ (或 $W_m^*(x) = \frac{\tilde{W}_m(r)}{a}$) 按文 [1] 可表为

$$W_m^*(x) = W_m^*(\beta_0) + W_m^{*'}(\beta_0)F_{1m}(x) + M_m(\beta_0)F_{2m}(x) + V_m(\beta_0)F_{3m}(x) + F_{4m}(x) \quad (m=0, 1, \dots, N) \quad (14)$$

式中 $W_m^*(\beta_0)$ ， $W_m^{*'}(\beta_0)$ ， $M_m(\beta_0)$ ， $V_m(\beta_0)$ 分别为无量纲化的，在环形板内边 $x = \beta_0$ 处的挠度、转角、弯矩、反力，它们由板的边界条件所确定。例如：对夹支边有 $W_m^*(\beta_0) = W_m^{*'}(\beta_0) = 0$ ；对简支边有 $W_m^*(\beta_0) = M_m(\beta_0) = 0$ ；对悬空边有 $M_m(\beta_0) = V_m(\beta_0) = 0$ 。在 (14) 式中的 $F_{im}(x)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 都是坐标 x 、参数 β_i 、 δ_i^* 和 $P_m(x)$ 的函数，关于它们的具体表示式可参看文献 [1]，在特殊情况下的表示式，参见本文 (21) 式。需要指出的是，解 (14) 对于逐圈等厚度的环形板而言是精确成立的。

将 (14) 代入 (7) 或 (8)，有

$$\Phi_0 = 2\pi \int_{\beta_0}^1 q_0(ax) \cdot a^3 W_0^*(x) x dx \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m &= \pi \int_{\beta_0}^1 q_m(ax) \cdot a^3 W_m^*(x) x dx \\ \text{或} \quad \tilde{\Phi}_m &= \pi \int_{\beta_0}^1 \tilde{q}_m(ax) \cdot a^3 W_m^*(x) x dx \quad (m=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由于 (14) 式是 W_m^* 关于 δ_m^* ($i=0, 1, \dots, n$) 的显式表示, 所以由 (15) 或 (16) 即可得出目标函数 Φ 关于设计变量 δ_i^* 的显式表示, 即

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0(\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*) + \sum_{m=1}^N [\Phi_m(\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*) + \tilde{\Phi}_m(\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*)] \\ &= \Phi(\delta_0^*, \delta_1^*, \delta_n^*) \end{aligned} \quad (17)$$

于是, 最优设计问题归结为 $(n+1)$ 个设计变量 $\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*$ 的非线性规划问题

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \Phi(\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*) \\ \text{约束} \quad & \delta_{min}^* \leq \delta_i \leq \delta_{max}^* \\ & \sum_{i=0}^n (\delta_i^*)^{-1/3} (\beta_{i+1}^3 - \beta_i^3) + \beta_0^3 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由于约束是等式的, 引入拉格朗日乘子, 则 (18) 将归结为一个无约束的非线性规划问题

$$\min_{\delta_{min}^* \leq \delta_i^* \leq \delta_{max}^*} \Phi + \lambda \left[\sum_{i=0}^n (\delta_i^*)^{-1/3} (\beta_{i+1}^3 - \beta_i^3) + \beta_0^3 - 1 \right] \quad (19)$$

则优化准则为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_i^*} &= 0 \quad (i=0, 1, \dots, n) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由于 Φ 已表成显式表示, 因而 (19) 中的导数是可以求得的。于是, 可利用导数可求的非线性规划方法求解 (19), 或用解非线性代数方程组 (20) 的方法求解最优化解。且问题的全局解存在与否将归结为方程组 (20) 的解的唯一性的讨论。

计 算 方 法

为了说明我们的方法, 现以内外边夹支的圆环形薄板, 在均布荷载 q_0 作用下问题为例, 给出具体的计算公式和方法。

根据夹支边的条件, 有

$$W_0^*(\beta_0) = 0, \quad W_0^{*'}(\beta_0) = 0$$

于是 (14) 式为

$$W_0^*(x) = M_0(\beta_0) F_{20}(x) + V_0(\beta_0) F_{30}(x) + F_{40}(x) \quad (21)$$

由文 [1], 式中

$$F_{20}(x) = \frac{1}{4} \left\{ \left[2\beta_0^3 \ln \frac{x}{\beta_0} - x^2 + \beta_0^3 \right] \delta_0^* + \sum_{i=1}^n \{ x - \beta_i \}^0 f_i^0 \left[2\beta_i^3 \ln \frac{x}{\beta_i} - x^2 + \beta_i^3 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
F_{3i}(x) &= \frac{\beta_0}{4} \left\{ \left[x^2 - \beta_0^2 - (x^2 + \beta_0^2) \ln \frac{x}{\beta_0} \right] \delta_0^* \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \{x - \beta_i\}^0 \left[x^2 - \beta_i^2 - (x^2 + \beta_i^2) \ln \frac{x}{\beta_i} \right] (\delta_i^* - \delta_{i-1}^*) \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \{x - \beta_i\}^0 f_{0i}^{(3)} \left[2\beta_i^2 \ln \frac{x}{\beta_i} - x^2 + \beta_i^2 \right] \right\} \\
F_{4i}(x) &= \frac{F_0}{16} \left\{ \left[\frac{x^4}{4} + \beta_0^2 x^2 - \frac{1}{4} \beta_0^4 - (2\beta_0^2 x^2 + \beta_0^4) \ln \frac{x}{\beta_0} \right] \delta_0^* \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \{x - \beta_i\}^0 \left[\frac{x^4}{4} + (2\beta_0^2 - \beta_i^2) x^2 + \beta_i^2 \left(\frac{3}{4} \beta_i^2 - 2\beta_0^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - (2\beta_0^2 x^2 + 2\beta_0^2 \beta_i^2 - \beta_i^4) \ln \frac{x}{\beta_i} \right] (\delta_i^* - \delta_{i-1}^*) \right\}
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
\{x - \beta_i\}^0 &= \begin{cases} 1 & x \geq \beta_i \\ 0 & x < \beta_i \end{cases} \\
f_{0i}^{(3)} &= \left[H_{i0} \delta_0^* + \sum_{j=1}^{i-1} f_{0j}^{(3)} H_{ij} \right] \psi_i \\
f_{0i}^{(4)} &= \left[I_{i0} \delta_0^* + \sum_{j=1}^{i-1} I_{ij} (\delta_j^* - \delta_{j-1}^*) + \sum_{j=1}^{i-1} f_{0j}^{(4)} H_{ij} \right] \psi_i \\
f_{0i}^{(2)} &= \left[F_{i0} \delta_0^* + \sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} (\delta_j^* - \delta_{j-1}^*) + \sum_{j=1}^{i-1} f_{0j}^{(2)} H_{ij} \right] \psi_i \\
\psi_i &= \left(\frac{\delta_i^*}{\delta_{i-1}^*} - 1 \right) \quad (i=1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= \frac{\lambda_2 \beta_i^2 + \lambda_1 \beta_j^2}{2\beta_i^2} \\
I_{ij} &= \frac{\beta_0}{\beta_j} \left(\frac{\lambda_1 \beta_j}{4} - \frac{\lambda_1 \beta_j^3}{4\beta_i^2} \right) + \frac{1}{2} \lambda_2 \beta_j \ln \frac{\beta_i}{\beta_j} \\
F_{ij} &= (\beta_j^2 - \beta_i^2) \left(H_{ij} + \frac{\beta_i^2 + \lambda_1 \beta_0^2}{\beta_i^2} \right) + 2\beta_0^2 \lambda_2 \ln \frac{\beta_i}{\beta_j} \quad \begin{matrix} (i=1, 2, \dots, n) \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{matrix} \\
\lambda_1 &= 1 - \nu \quad \lambda_2 = 1 + \nu
\end{aligned}$$

而式 (21) 中的 $M_0(\beta_0)$ 和 $V_0(\beta_0)$ 由环形板的外边的边界条件所确定。在外边, $x=1$ (即 $r=a$) 上, 由夹支条件, 得

$$W_0^*(1) = 0 \quad W_0^{*'}(1) = 0 \quad (22)$$

为简单计, 我们令

$$M_0(\beta_0) = P_0 M(\beta_0) \quad V_0(\beta_0) = P_0 V(\beta_0) \quad (23)$$

则由 (22), (21) 和 (23), 可得 $M(\beta_0)$, $V(\beta_0)$ 满足的方程

$$\left. \begin{aligned} a_{11}M(\beta_0) + a_{12}V(\beta_0) &= a_{13} \\ a_{21}M(\beta_0) + a_{22}V(\beta_0) &= a_{23} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中

$$a_{11} = -Y_{30}\delta_0^2 + \sum_{i=1}^n Y_{3i}f_{0i}^{(2)}$$

$$a_{12} = \frac{\beta_0}{4} \left(\sum_{i=0}^n Y_{1i}\delta_i^2 - \sum_{i=1}^n Y_{3i}f_{0i}^{(2)} \right)$$

$$a_{13} = \sum_{i=1}^n Y_{3i}f_{0i}^{(2)} - \sum_{i=0}^n Y_{2i}\delta_i^2$$

$$a_{21} = Y_{50}\delta_0^2 + \sum_{i=1}^n Y_{5i}f_{0i}^{(2)}$$

$$a_{22} = \frac{\beta_0}{4} \left(\sum_{i=0}^n Y_{4i}\delta_i^2 - \sum_{i=1}^n Y_{5i}f_{0i}^{(2)} \right)$$

$$a_{23} = -\sum_{i=0}^n Y_{6i}\delta_i^2 - \sum_{i=1}^n Y_{5i}f_{0i}^{(2)}$$

这里

$$Y_{1i} = 4 \left(\beta_{i+1}^2 - \beta_i^2 - 1n \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} + \beta_i^2 1n \beta_i - \beta_{i+1}^2 1n \beta_{i+1} \right)$$

$$Y_{2i} = (\beta_{i+1}^2 - \beta_i^2) \left[2 + 4\beta_0^2 - \frac{3}{2}(\beta_{i+1}^2 + \beta_i^2) \right]$$

$$-4\beta_0^2 \left[1n \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} - \beta_{i+1}^2 1n \beta_{i+1} + \beta_i^2 1n \beta_i \right]$$

$$+ 2(\beta_{i+1}^2 1n \beta_{i+1} - \beta_i^2 1n \beta_i)$$

$$Y_{3i} = \frac{1}{8} (2\beta_i^2 1n \beta_{i+1} - \beta_i^2)$$

$$Y_{4i} = (\beta_{i+1}^2 - \beta_i^2 - 21n \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i})$$

$$Y_{5i} = \frac{1}{2} (\beta_i^2 - 1)$$

$$Y_{6i} = \frac{1}{8} \left\{ (\beta_{i+1}^2 - \beta_i^2) \left[1 + \beta_0^2 - \frac{1}{2}(\beta_{i+1}^2 + \beta_i^2) \right] - 2\beta_0^2 1n \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \right\} \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

将 (21) 代入 (15), 可得相应的目标函数 Φ_0 的表示式,

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \frac{2\pi q_0^2 a^b}{D_n} \left\{ V(\beta_0) \cdot \frac{\beta_0}{4} \left[\sum_{i=1}^n \Phi_{1i} \delta_i^* - \sum_{i=1}^n \Phi_{3i} f_{0i}^{(1)} \right] \right. \\ & \left. - M(\beta_0) \left[\Phi_{30} \delta_0^* + \sum_{i=1}^n \Phi_{3i} f_{0i}^{(0)} \right] + \frac{1}{8} \left[\sum_{i=1}^n \Phi_{2i} \delta_i^* - \sum_{i=1}^n \Phi_{3i} f_{0i}^{(2)} \right] \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

式中

$$\Phi_{1i} = \frac{1}{4} (\beta_{i+1}^4 - \beta_i^4) + (\beta_{i+1}^3 - \beta_i^3) + 2(\beta_i^2 \ln \beta_i - \beta_{i+1}^2 \ln \beta_{i+1}) - \ln \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}$$

$$\Phi_{2i} = -\frac{1}{6} (\beta_{i+1}^4 - \beta_i^4) + \frac{\beta_0^2 - 1}{4} (\beta_{i+1}^4 - \beta_i^4) + \frac{1 + 2\beta_0^2}{2} (\beta_{i+1}^3 - \beta_i^3)$$

$$- \beta_0^2 \ln \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} + 2\beta_0^2 (\beta_i^2 \ln \beta_i - \beta_{i+1}^2 \ln \beta_{i+1}) + \beta_{i+1}^4 \ln \beta_{i+1} - \beta_i^4 \ln \beta_i$$

$$\Phi_{3i} = \beta_i^2 \ln \beta_i + \frac{1}{4} (1 - \beta_i^4) \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

(25) 式中的 $V(\beta_0)$, $M(\beta_0)$ 由 (24) 确定。从而, 在均布荷载作用下, 环形板的柔顺度被表成了各圈刚度与等厚度板的刚度的反比 δ_i^* 的显式。在 (25) 中的 Φ_{1i} , Φ_{2i} , Φ_{3i} , 在 (24) 中的 Y_{1i} , Y_{2i} , Y_{3i} , Y_{4i} , Y_{5i} , Y_{6i} , 在 (21) 中的 H_{ij} , I_{ij} , F_{ij} 均与 δ_i^* 无关, 它们只依赖于分点的选取。在 (25) 式大括号外的因子 $\frac{2\pi q_0^2 a^b}{D_n}$ 显然是常量, 优化时可无须计及。

由式 (25), 可求出各 $\frac{\partial \Phi}{\partial \delta_i^*}$ ($i=0, 1, \dots, n$), 为了不占太长篇幅, 在这儿不再给出。

于是在均布荷载 q_0 作用下的环形板的最优设计问题已成了联合式 (25), (9), (10) 的非线性规划问题, 利用乘子法, 可得到 (19)。

对 $m \neq 0$ 的情况可同样得到, 没有任何原则困难, 在这里亦不再具体给出。

需要指出的是, 在以上的推导中, 各分点是任意的, 即在 $[\beta_0, 1]$ 之间可任意分段, 问题的公式与分段的不同在形式上没有任何不同。

计算实例

在以下的计算实例中, 我们使用了与文 [5] 相同的数据, 取 $\delta_{min}^* = 0.027$, $\delta_{max}^* = 3.375$, $\beta_0 = \frac{b}{a} = 0.2$, 材料的泊松比 $\nu = 0.25$

首先我们以等宽的距离把板分成五个宽度相等的环形板, 计算了在 $q(r, \theta) = q \cos m\theta$, $q = \text{const}$ ($m=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16$) 作用下的优化问题。结果表明当 $m=0, 1, 2, 3$ 时, 板的最优形状具有一定的相似性; 而当 $m=4, 5, 6, 7$ 时, 最优形状亦很相似; 当 $m=8, 9, 10$ 时, 最优形状亦几乎相同。为了说明问题, 我们在图 2—图 8 中给出了 $m=0, 3, 4, 7, 8, 10, 16$ 的最优断面形状。图中 Φ_{min}/Φ_0 是最优形状的目标函数与等厚度时的目标函数的比值。迭代从等厚度开始。

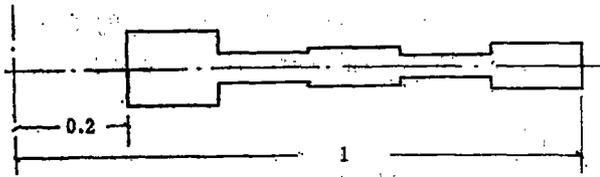


图2 $m=0, n+1=5, \Phi_{min}/\Phi_0=0.6013$

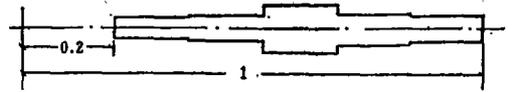


图5 $m=7, n+1=4, \Phi_{min}/\Phi_0=0.8361$

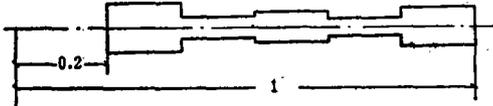


图3 $m=3, n+1=5, \Phi_{min}/\Phi_0=0.8832$

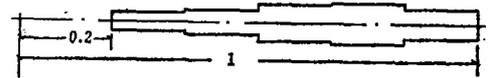


图6 $m=8, n+1=5, \Phi_{min}/\Phi_0=0.6323$

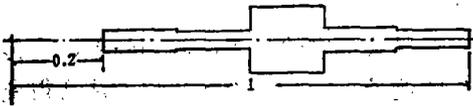


图4 $m=4, n+1=5, \Phi_{min}/\Phi_0=0.8287$

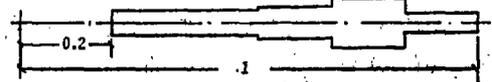


图7 $m=10, n+1=5, \Phi_{min}/\Phi_0=0.8480$

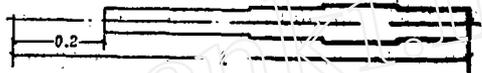


图8 $m=16, n+1=5, \Phi_{min}/\Phi_0=0.8485$

为了进一步说明这几种类型的最优断面形状，我们计算了在40段等宽分割下的情况。图9—图12是对应于 $m=0, 4, 8, 16$ 的结果。

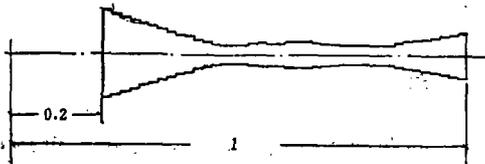


图9 $m=0, n+1=40, \Phi_{min}/\Phi_0=0.4908$

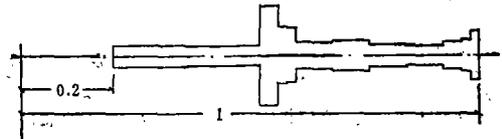


图10 $m=4, n+1=40, \Phi_{min}/\Phi_0=0.5860$

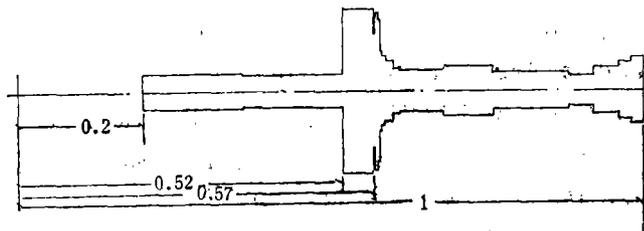


图11 $m=8, n+1=40, \Phi_{min}/\Phi_0=0.5259$

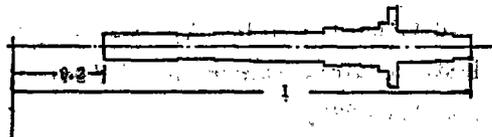


图12 $m=16, n+1=40, \Phi_{min}/\Phi_0=0.7267$

为了与文〔5〕的结果作对比，我们着重计算了在 $m=4$ 的情况。按文〔6〕，当 $m=4$ 时在最优断面的突起部分将产生无穷多间断点，为了验证这一情况，我们在图 10 的突起部分加细分割，分割相当于 400 段的情况，其余部分仍保持 40 段的分割，计算结果见图 13。

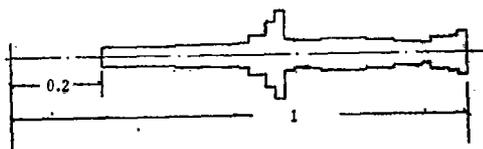


图 13 $m=4, \Phi_{min}/\Phi_0=0.5277$

结 束 语

由以上分析可知，我们把板的优化问题归结为一个导数可求的非线性规划问题，为传统的非线性规划方法应用于板的优化设计开创了一个新的途径，并使板的优化方法变得更为简便。

由计算实例的结果与文〔5〕的结果对照，可以看出，用本文方法将比文〔5〕的方法更快达到最优值。文〔5〕中，在 $m=0$ 时，取 300 段，算得的 $\Phi_{min}/\Phi_0=0.463$ ，我们在图 9 中只取 40 段就算得 $\Phi_{min}/\Phi_0=0.4908$ 。在 $m=4$ 时，文〔5〕取 200 段，得 $\Phi_{min}/\Phi_0=0.525$ ，我们在图 13 中，实际上只取了 60 段，得 $\Phi_{min}/\Phi_0=0.5277$ 。

在文〔5〕中，当分成 150 段， $\Phi_{min}/\Phi_0=0.536$ 时就发生分裂。当分成 200 段时， $\Phi_{min}/\Phi_0=0.525$ ，即发生很多突起，而我们在个别区域中分成 400 段仍未出现很多突起，因而，文〔5〕，〔6〕所得的将产生无穷多突起的结论，仍有待商榷。

我们的方法适用于任意的分布荷载，有更大的普适性。

参 考 文 献

- 〔1〕叶开沅，郭建虎，非均匀变厚度弹性体力学若干问题的一般解Ⅱ，在任意常温度场和任意分布载荷下的任意轴对称非均匀，变厚度环形板的弯曲问题。兰州大学学报力学专号，1（1979），75—114。
- 〔2〕Банигук Н. В. Современные Проблемы Оптимизаций Консрукций, *Механика Твёрдого Тела* 2 (1982), 110—124.
- 〔3〕Cheng, Keng-tung and Olhoff, Niels, Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates, *International Journal of Solids and Structures*, 18, 2 (1982), 153—169.
- 〔4〕Masur, E. F., Optimality in the presence of discreteness and discontinuity, *Optimization in structural Design*, Springer-Verlag(1975), 441—453.
- 〔5〕Cheng, Keng-tung and Olhoff, Niels, An Investigation concerning optimal Design of Solid Elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, 17, 3 (1981), 305—323.
- 〔6〕程耿东，实心弹性薄板的最优设计，大连工学院学报，20，2（1981）1—11。

Optimal Design of Thin Elastic Plate Under Arbitrarily Load

Yu Huanran and Yeh Kaiyuan

(Department of Mathematics and Mechanics, Lanzhou University)

Abstract

1. Presentation of problem: We investigate the optimal design of minimal compliancy (maximal stiffness) of a thin elastic solid annular plate, i. e. choose the thickness function $h(r)$ of the plate to make the following functional minimum

$$\Phi = \int_{\Omega} q(r, \theta) W(r, \theta) d\Omega \quad (1)$$

where $q(r, \theta)$ is arbitrarily distributed load acted on the plate, $W(r, \theta)$ deflection, Ω plane region of the plate.

This plate is subjected to a constrain

$$h_{min} \leq h(r) \leq h_{max} \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} h(r) d\Omega = V_0 \quad (3)$$

where V_0 given volume.

2. Treatment of load, Expanding load $q(r, \theta)$ into Fourier series

$$q(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{q}_m(r) \sin m\theta \quad (4)$$

Under such treatment, the corresponding deflection is

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}_m(r) \sin m\theta \quad (5)$$

Obviously, $W_m(r)$ and $\bar{W}_m(r)$ here are the functional of $h(r)$.

3. Discretization: We divide the whole plate into $n+1$ annular sections, the thickness of each of them is constant, therefore $h(r)$ can be approximated by a step-wise function. The width of such section is arbitrary whose separated are $\xi_0 = b$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1} = a$, where a is outer radius of the annular region and b the inner one. Therefore $h(r)$ can be taken the place of $n+1$ variables h_0, h_1, \dots, h_n and thus, $W_m(r)$ and $\bar{W}_m(r)$ are deduced into function of r, h_0, h_1, \dots, h_n .

4. Formula of deflection: According to stepped reduction method suggested by Yeh Kaiyuan in 1965, let

$$x = r/a, \beta_i = \xi_i/a, \quad (i=0, 1, \dots, n+1)$$

$$\delta_i^* = D_u/D_i = (h_u/h_i)^3 \quad (i=0,1,\dots,n)$$

where D_i is stiffness of i -th section of the plate and D_u is stiffness of the uniform plate, h_u thickness of the uniform plate, and $V_0 = h_u \pi (a^2 - b^2)$, we find out the exact analytic expression (discretization) of W_m , \bar{W}_m , i.e.,

$$W_m = W_m(x, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*) \quad (6)$$

$$\bar{W}_m = \bar{W}_m(x, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*) \quad (7)$$

Integral constants can be determined by boundary conditions.

5. Substituting (6), (7) to (5), then substituting this expression and (4) to (1), we obtain

$$\Phi = \Phi(\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*)$$

This is the exact analytic expression with respect to design variables of the object function and condition (3) at present is simplified into

$$\sum_{i=0}^n (\beta_{i+1}^* - \beta_i^*) (\delta_i^*)^{-1/\alpha} = 1 - \beta_0^*$$

Obviously, we can get

$$\min_{\delta_{min}^* \leq \delta_i \leq \delta_{max}^*} \Phi(\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*) + \lambda \left(\sum_{i=0}^n (\beta_{i+1}^* - \beta_i^*) (\delta_i^*)^{-1/\alpha} - 1 + \beta_0^* \right) \quad (8)$$

i.e. problem is simplified into optimal one unconstrain.

6. On account of (8) we can derive the optimal criteria which is

$$\left. \begin{aligned} \partial \Phi / \partial \delta_i^* &= 0 & (i=0,1,\dots,n) \\ \partial \Phi / \partial \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

which is a simultaneous nonlinear algebraic equation of $\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_n^*$, and λ . Therefore, the investigation of optimal solution is deduced into solving the above mentioned nonlinear algebraic equations. The problem about the existence of global optimal solution is depended upon whether the unique solution of these algebraic equations exists or not.

7. There is no approximate assumptions of any kind except discretization. Our method can solve arbitrary $q(r, \theta)$, and therefore, our discretization is carried out freely without any restriction which is the reason why the previous method can not compare with.

8. In order to compare results obtained previously, we had calculated several cases $q(r, \theta) = q \cos m\theta$ ($m=0, 4, 8, 16$), where q is constant.