轴向冲击载荷下圆柱壳塑性屈曲的能量准则

茹重庆　　王　仁

（北京大学力学系）

提要　针对冲击载荷下塑性屈曲的特点，本文提出了一种修正了的能量准则，给出了稳定性的一个充分条件，并用它处理了轴向冲击下圆柱壳和加筋圆柱壳以及平面内冲击载荷下矩形板的屈曲问题，得到了临界速度和屈曲半波数的简单的解析表达式，其中半波数的计算比通常采用的放大函数的方法大为简化。本文所得结果和已有的实验和数值结果很好地符合。

一、导　　言

轴向冲击载荷下圆柱壳塑性屈曲和有关方面的工作，基本上遵循着 Florence 和 Goodier[1] 的观点和方法。他们引进了放大函数的概念、认为使放大函数取最大值的半波数即为屈曲半波数，从而提出了一种计算屈曲半波数的方法。但通常这种方法需要解复杂的超越方程，而且按位移和速度扰动算出的半波数也不能保证始终很接近。

另外，屈曲的临界载荷这样一个最基本最重要的问题，虽然具有重大的理论和实用价值，但迄今为止尚未见有人进行过理论分析，只有 Vaughan[2] 曾根据实验提出过一个经验公式。也曾有人企图用放大函数达到某一人为给定的数值的方法来定义和计算临界速度，但显然，这种方法缺乏理论价值。

我们认为，已有理论尚未正视和探讨临界载荷这个基本问题，显然是因为在屈曲准则这个基本问题上遇到了原则性的困难。容易理解，常用的几种稳定性准则已不适用。其实，Liapunov 稳定性定义也不适宜于该类问题，因为按这种定义，稳定与否取决于时间 t 充分大时初始扰动的发展趋势，而这又取决于 t 充分大时基本运动的性态。因为扰动量所满足的运动方程是由基本运动来决定的。但是该类冲击载荷问题中屈曲是在有限时间 t_f 内发生的（t_f 为冲击持续时间，本问题中可作为冲击速度的函数计算出来），所以，稳定与否应当只取决于基本运动在时间〔0，t_f〕内的行为。我们应当根据〔0，t_f〕内基本运动的信息来判断稳定与否，而无须去考查 $t>t_f$ 时基本运动的情况。其实，要考查此类冲击载荷问题中 t 充分大时基本运动的行为，是极其困难甚至不可能的。

鉴于上述分析，本文从基本的观点上重新考虑了此类问题、吸收了经典能量准则的某些思想，针对冲击载荷下屈曲问题的特点，提出了一种修正了的能量准则和相应的数学计算方法，并用这种方法处理了几个冲击载荷下的塑性屈曲问题，得到了良好结果。

二、能量准则的基本思想

经典能量法则告诉我们，假若一定载荷作用下的系统，相对于它所处的状态作任何一个可能偏离，都必将导致系统的总势能增大，则系统所处的状态是稳定的。这里，系统的总势能包括了载荷的势能。特别指出，在计算由于偏离引起的能量变化时，忽略了引起偏离的初始扰动的能量。

吸收上述准则的思想，我们用来处理此类问题的能量准则的基本思想就是：在一定冲击载荷下的系统（例如圆柱壳），若相对于它的基本运动作任意一个可能的偏离运动，都必将使系统由于该偏离所吸收和消耗的能量大于载荷对于该偏离所作的功，则系统不会发生屈曲，即它的基本运动状态为稳定的运动状态。若记扰动 $w(x, t)$ 满足的基本运动方程为

$$f(V, w(x, t))=0 \tag{1}$$

等式左边表示一个赖于冲击速度 V 的线性微分算子作用于 w，且使 $\ddot{w}$ 项的系数为正，这里"·"表示对 t 求导。那么，我们的基本准则说，假若对任意可能的偏离 $w(x, t)$ 皆有

$$F(v, w)=\int_0^L\int_0^{t_f} f(V, w)\dot{W}dtdx>0 \tag{2}$$

则基本运动为稳定的。这里假定 $0\leqslant x\leqslant L$，t_f 为冲击持续时间。

必须指出，问题的关键是如何定义用来描写失稳过程的所谓偏离。这里，根据物理直观和经典能量法则的相应概念，我们认为，所谓偏离，除必须满足边界条件外，在此类问题中还应具备如下特点：

（1）偏离 $w(x, t)$ 所决定的初始扰动能量很小，在计算$F(V, w)$ 时可略去不计；

（2）初始时刻未发生屈曲，所以$w(x, t)$ 及其对 x 的各阶导数（它们描述屈曲程度）在 $t=0$ 时的初始值，在平均的意义下相对于它们在 $t=t_f$ 时的末态值可略去不计。

上述两条是描写失稳过程的所谓偏离的基本特点。其实对此类有限时间内屈曲问题，扰动初值的处理是关键之一。我们认为能量方法可以自然而恰当地处理这个问题，这似乎是它比较成功的因素之一。下面将结合具体问题来说明如何利用上述两条进行分析计算。

假若记具备上述两条性质而且满足边界条件的偏离的全体为集合 B，则稳定性充分条件即为

$$\underset{w\in B}{F}(V, w)>0 \tag{3}$$

容易理解，我们实际上在处理一个有限时间内的屈曲问题，而且是塑性动力问题，所以方程中必包含非保守项。这就要求我们借鉴经典的能量法则时必须针对这些特点提出新的观点和处理方法。

三、圆柱壳的屈曲

首先介绍两个不等式，可化成本征问题来证明，这里从略。

（1）若 $u(0)=u(L)=u''(0)=u''(L)=0$，且 $u(x)$ 不恒为零，设 $C>0$，则必有

$$\frac{\int_0^L u''^2 dx + C\int_0^L u^2 dx}{\int_0^L u'^2 dx} \geqslant 2\sqrt{C} \qquad (4)$$

而且等号只是在 $u(x)$ 和 $\sin(n\pi x/L)$ 仅差一常因子时成立，其中自然数 n 近似等于

$$n^4 = CL^4/\pi^4$$

"$'$" 表示对 x 求导。

（2）记 $(dv(t))/dt = \dot{v}$，若 $v(t)$ 使得下式左边有意义，则恒有

$$\int_0^d \frac{\dot{v}(t)^2}{(1-t/d)}dt \geqslant \frac{2}{d}\,(v(d)-v(0))^2 \qquad (5)$$

其中。$d>0$。这里，等号也是可达到的。

轴向冲击载荷下圆柱壳塑性屈曲问题中，通常只考虑横向扰动 $w(x, t)$ 的屈曲，其基本运动方程据〔2〕写成 (x, t) 形式应为

$$f(V, w) = \frac{1}{1-t/t_f}\left(\frac{h^3\sigma^\circ L}{36V}\dot{w}'''' + \frac{4L\sigma^\circ h}{3a^2V}\dot{w} + \frac{h^3\sigma^\circ L}{9a^2V}\dot{w}''\right)$$

$$-\frac{h^3E_h}{18a^2}w'' + \frac{h^3E_h}{12}w'''' + \sigma^\circ h w'' + Ph\ddot{w} = 0 \qquad (6)$$

其中 $w(x, t)$ 满足简支端条件。这里 V 为冲击速度，h 为壳厚，L 为壳长，σ° 为平均应力，E_h 为线性强化系数，a 为半径，ρ 为密度，M、m 分别为壳的质量和壳所附带的重物的质量，冲击持续时间 t_f 为[2]

$$t_f = \frac{\rho VL(1+M/m)}{\sigma^\circ} \qquad (7)$$

由于通常 $\sigma^\circ \gg h^3E_h/18a^2$，所以方程左边第四项相对于第六项常可略掉。

另外，由于 $\dot{w}$ 也满足简支边条件、于是利用第一个不等式（4）可以证明，由于通常 $1 \gg (h/2\sqrt{3}a)$，所以对任意 t 皆有

$$\int_0^L \frac{h^3\sigma^\circ L}{36V}\dot{w}''^2 dx + \int_0^L \frac{4hL\sigma^\circ}{3a^2V}\dot{w}^2 dx \gg \int_0^L \frac{h^3\sigma^\circ L}{9a^2V}\dot{w}'^2 dx$$

于是右边相对于左边常可忽略。

注意到这两点，于是前面定义的泛函 F 为，

$$F(V, w) = \frac{h^3\sigma^\circ L}{36V}\int_0^L\left(\int_0^{t_f}\frac{\dot{w}''^2}{1-t/t_f}dt\right)dx + \frac{4h\sigma^\circ L}{3a^2V}\int_0^L\left(\int_0^{t_f}\frac{\dot{w}^2}{1-t/t_f}dt\right)dx$$

$$+\int_0^L\left[\frac{h^3E_h}{24}w''^2 - \frac{\sigma^\circ h}{2}w'^2 + \frac{\rho h}{2}\dot{w}^2\right]_0^{t_f}dx$$

必须强调指出，忽略前述两项其实等价于在几何关系中用简单式子

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\left(\frac{V}{a}\right)\left(1-t/t_f\right)$$

代替〔2〕中采用的更精确的式子

$$\dot{\varepsilon}_\theta=-\left(\frac{V}{a}\right)(1-t/t_f)(1-z/a)$$

这说明，采用简单的扁壳几何关系式，解答的精度几乎不受什么影响，下面将始终利用这个结论。

注意偏离的两个性质，于是由第二个不等式（5）可得

$$F(V,w)\geqslant\frac{h^3L\sigma^\circ}{36V}\int_0^L\frac{2}{t_f}w''^2dx+\frac{4hL\sigma^\circ}{3a^2V}\int_0^L\frac{2}{t_f}w^2dx$$

$$+\int_0^L\frac{h^3E_h}{24}w''^2dx-\sigma^\circ h\int_0^L\frac{w'^2}{2}dx$$

这里 w 及其对 x 的各阶导数都取 t_f 时的值、为简单计未加标注。

这样、稳定的充分条件即为上述不等式右端大于零，或等价地

$$\frac{\int_0^L\left(\frac{h^2L^2}{18}w''^2+\frac{h^2Vt_fLE_h}{24\sigma^\circ}w''^2+\frac{8L^2}{3a^2}w^2\right)dx}{\frac{Vt_fL}{2}\int_0^Lw'^2dx}>1 \tag{8}$$

这里 w 满足简支边条件。

这样，临界速度 V_{Cr} 满足的方程应是上述不等式左端的最小值等于1。最后可解出

$$\frac{\rho V_{Cr}^2(1+M/m)}{\sigma^\circ}=\frac{8h}{3\sqrt{3}a}\left(\frac{\sqrt{3}hE_h}{3a\sigma^\circ}+\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}hE_h}{3a\sigma_\circ}\right)^2}\right) \tag{9}$$

使达到最小值的函数即屈曲型式，为 $\sin(n\pi x/L)$，其中 n 近似为

$$n^4=\frac{48L^4}{\pi^4a^2h^2}\frac{1}{(1+3Vt_fE_h/4L\sigma^\circ)} \tag{10}$$

此即半波数公式，十分简洁。

Vaughan[2] 关于 V_{Cr} 的经验公式是

$$\frac{\rho V_{Cr}^2(1+M/m)}{\sigma^\circ}=\frac{h}{a}$$

显然，本文所得理论结果和它相当接近。二者最显著的差异，是前者显含了 E_h 而后者不然。从公式可知，包含 E_h 的项对 V_{Cr} 的影响是较小的。

关于半波数公式，将与文献〔1〕和〔2〕中提供的一些理论和实验数据比较。那里，取 $a=0.45\text{in}$，$h=0.1\text{in}$，$E_h/\sigma_\circ=2.5$，但 L 和 Vt_f/L 各不同。利用（10）式计算时，为简单计，近似地取冲击速度为临界速度值。因为二者接近，而且 n 对 V 不敏感，所以是足够精确的。比较结果见表1。

可见本文理论结果是很好的。显然，这里的计算公式较之〔1〕、〔2〕的方法要简单得多。特别指出，本文方法的基础是能量法则，和已有的放大函数方法的概念截然不同，它提供了计算屈曲型式的一种新途径。

表 1 （参见〔1〕、〔2〕）

试件编号	L(in)	实验数据	〔1〕位移扰动	〔1〕速度扰动	〔2〕理论值	本文(10)式
1, 2, 3	3	8	11	7	9	10
4	3	8	11	7	9	10
10	4	12	15	7	11	13
13, 14, 15	4	12	15	8	12	13
20	4	12	14	9	12	13
22	6	14	23	12	16	20
23, 24	6	15	22	13	16	20

四、加筋圆柱壳的屈曲

N. Jones 和 E. A. Papageorgiou[3] 研究了轴向冲击载荷下加筋圆柱壳的塑性屈曲，此时 $w(x, t)$ 的基本方程可写为

$$\frac{1}{1-t/t_f}\left[\frac{-A_1 t_f}{a}\dot{W}'' - \frac{A_5 t_f \dot{W}''''}{a} - \frac{A_7 t_f \dot{W}}{a}\right] + \frac{A_2 w''''}{a}$$

$$+(A_3+A_4)\frac{w''}{a} + \frac{A_6}{a}w + t_f^2\frac{\ddot{w}}{a} = 0 \tag{11}$$

特别注意这里的"′"表示对无量纲坐标 x/L 的导数而不再是对 x 的导数。方程中诸系数表达式如下：

$$A_1 = -\alpha^2\bar{\sigma}/18\bar{h} + 2\bar{\sigma}(A^*e^* - 2I^*)/3\bar{h} - \alpha^2\beta^2(1-\sigma_y/\sigma^\circ)/72$$
$$-\beta^2 I^*(1-\sigma_y/\sigma^\circ)/6$$

$$A_2 = \beta^2\bar{E}(I^* + \alpha^2/12)/\bar{h}$$

$$A_3 = \bar{E}\{1 + A^* + A^*e^*/3 - (1-\sigma_y/\sigma^\circ)\bar{h}\beta^2 A^*e^*/4\bar{\sigma}\}/\lambda\bar{h}$$

$$A_4 = \bar{E}\{A^*e^*\beta^2\bar{h}/2\bar{\sigma} - \alpha^2/18 - 2I^*/3\}/\bar{h}$$

$$A_5 = -\bar{\sigma}A_2/3\bar{E}$$

$$A_6 = \beta^2\bar{E}\bar{h}/4\bar{\sigma}^2$$

$$A_7 = -4\bar{\sigma}/3\beta^2\bar{h}$$

这里 $\alpha = h/a$，$\bar{\sigma} = 1 + M/m$，$\bar{h} = 1 + h'/h$，而 h' 表示加筋引起的厚度增加（等面积意义

下)，而 $\beta = a/L$，$\bar{E} = E_h t_f^2 / \rho L^2$，$E_h$ 为线性强化系数、$\lambda = E_h / \sigma^\circ$，$e^* = e/a$，其中

$$e = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h'} z \frac{dA}{A}$$

为筋离开壳壁中面的偏心矩。$A^* = A/bh$，A 为单个筋的横截面积，b 为筋的环向间矩

$$I^* = I/a^2 bh, \ I = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h'} z^2 dA$$

为筋对壳壁中面的转动惯量而 $t_f = \rho V L (1 + M/m)/\sigma^\circ$，，为冲击持续时间。

容易证明，A_6 项通常可以忽略。利用偏离集合 B 的性质、和前述类似地可得

$$F(V, \ w) = \int_0^1 \left(\frac{A_2}{2} w''^2 - (A_3 + A_4) \frac{w'^2}{2} \right)_{t = t_f} dX$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{t_f} \frac{1}{1 - t/t_f} (A_1 t_f \dot{w}'^2 - A_5 t_f \dot{w}''^2 - A_7 t_f \dot{w}^2) \, dt dX \tag{12}$$

其中 X 表示 x/L。注意这个式子其实去掉了一公因子 $1/a$。

以下运算中需要把上式中第二项关于 t 的积分利用不等式（5）进行变形。为此需假定其为正。这是一个本质的要求，但是它并不奇怪，它实际上相当于文献〔3〕中进行分析运算时，所需要的某些量恒为正的前提假定，反映了此类非振荡形式失稳的所谓“直接”(direct) 屈曲现象的特点之一。这里假定其成立，后面将指出为此所应满足的条件。

于是，利用不等式（5）且注意偏离的性质，可得

$$F(V, \ w) \geqslant \int_0^1 \left[\frac{A_2}{2} w''^2 - 2A_5 w''^2 - 2A_7 w^2 \right.$$

$$\left. - \left(\frac{A_3 + A_4}{2} - 2A_1 \right) w'^2 \right]_{t = t_f} dX$$

于是稳定性充分条件为

$$\frac{\int_0^1 \left[\frac{A_2}{2} w''^2 - 2A_5 w''^2 - 2A_7 w^2 \right] dX}{\int_0^1 \left(\frac{A_3 + A_4}{2} - 2A_1 \right) w'^2 dX} > 1$$

其中 w 及其对 x 的各阶导数皆取 t_f 时的值。同前面类似地可得临界速度满足的关系式

$$\bar{E}_{Cr} = 4 \frac{A_1 (A_3 + A_4)/\bar{E} - 2A_2 A_7 / \bar{E} + \sqrt{[A_1 (A_3 + A_4)/\bar{E} - 2A_2 A_7 / \bar{E}]^2}}{[(A_3 + A_4)/\bar{E}]^2}$$

$$+ \sqrt{\frac{-(A_1^2 - 4A_5 A_7)[(A_3 + A_4)/E]^2}{[(A_3 + A_4)/\bar{E}]^2}} \tag{13}$$

注意等式右边其实不依赖于 $\bar{E}$，因 A_2，A_3，A_4 皆含因子 $\bar{E}$。

达到最小值的函数即屈曲型式，为 $\sin(n\pi x/L)$，其中 n 为

$$n^4 = n_0^4 \frac{1}{(1 + 12 I^* a^2 / h^2)} \tag{14}$$

这里 n_0 为不加筋时在同样速度下的屈曲半波数，此公式很简洁。

现来指出（12）中第二项为正的条件。假定用 w 表示 t_f 时的位移，则此条件可写成

$$\int_0^1 (A_1 w'^2 - A_5 w''^2 - A_7 w^2) dX > 0 \tag{15}$$

若 $A_1 > 0$ 则显然条件成立。但 A_1 常为负，此时即需把 $w = \sin(n\pi x L)$ 代入上述不等式左端来满足该条件，其中 n 由（14）式计算。其实保证（15）成立有一简单的充分条件，利用（4）容易证明，若

$$A_1^2 - 4A_5 A_7 < 0 \tag{16}$$

则（15）显然成立。而且可立即看出此时 $\bar{E}_{CT}$ 确实是正实数。

进一步注意 A_1 表达式最后两项常可忽略，而第一项也可忽略（参见 $e^* = 0$ 时的相应简化）所以上述条件可写成

$$4(I^* + \alpha^2/12) > (A^* e^* - 2I^*)^2 \tag{17}$$

这条件通常很容易验证。

利用（13）式可定量计算由于加筋引起的临界速度的变化。这里我们不去对具体数据进行计算，只指出稍加一些简化分析就容易证明，加筋后确实趋于安全，而且外加筋比内加筋更安全。这和〔3〕一致。

再来看半波数公式。它告诉我们，加筋后半波数的变化只取决于 I^*，这是〔3〕未能揭示的一个普遍结论。特别，e^* 的正负号对 n 的影响可以不考虑，这与文献〔3〕中数值结果一致。

下面就加筋后半波数的变化，将本文公式和文献〔3〕中的数值结果进行比较：

表2　(h/a＝0.10，e*＝0.2)

n_0/n \ A^*	0.5	1.0	1.5	2.0
〔3〕中图八	2.5	2.77	3.2	3.47
本文 (14) 式	2.33	2.76	3.05	3.27

表3　(h/a＝0.15，e*＝0.2)

n_0/n \ A^*	0.5	1.0	1.5
〔3〕中图九	1.85	2.174	2.35
本文 (14) 式	1.9	2.236	2.45

计算中用到文献〔3〕中公式：$I^* = A^*(4e^{*2} - \alpha e^* + \alpha^2/4)/3$，显然二者很好吻合。但是本文用的是一个十分简洁的解析表达式，它把文献〔3〕中通过计算机得到的许多数值结果统一表达在一个公式中清晰地揭示出 n 对其它量的依赖关系。

提醒注意，上述两例充分满足条件（17）。

五、矩形平板的屈曲

和圆柱壳类似，Goodier 在文献〔4〕中也研究了以速度 V 运动的矩形板撞击固定刚靶的塑性屈曲，所用试件是矩形截面的方管，把每个侧面看成一个平板窄条。因为矩形平板可看成半径无穷大的情形来处理（圆柱壳的极限情形），所以我们将研究这个问题。必须指出，此时文献〔2〕中方法不可直接沿用，而且动能项是不可忽略的。我们也正想通过此例来说明如何处理动能项。

据文献〔4〕，横向扰动 $w(x, t)$ 的基本运动方程为

$$\frac{h^3\sigma^\circ L}{36V}\dot{w}'''' + \frac{h^3E_h}{12}w'''' + \sigma^\circ hw'' + \rho h\ddot{w} = 0 \tag{18}$$

w 仍然满足简支条件，其余记号含义与圆柱壳问题中相同，特别 $0 \leqslant x \leqslant L$。

板的质量为 m，附带物为 M，则冲击持续时间 t_f 为

$$t_f = \frac{\rho VL}{2\sigma^\circ}(1 + M/m) \tag{19}$$

这是根据〔4〕中关于冲击过程中轴向压缩速度不变的假定所得。

利用和（5）类似的不等式

$$\int_0^d \dot{v}^2 dt \geqslant \frac{1}{d}(v(d) - v(0))^2$$

和偏离的两个性质，可得

$$F(V, w) \geqslant \int_0^L \left[\left(\frac{h^3\sigma^\circ L}{36Vt_f} + \frac{h^3E_h}{24}\right)w''^2 - \frac{\sigma^\circ h}{2}w'^2 + \frac{\rho h\dot{w}^2}{2}\right]dx \tag{20}$$

w 及其对 x 各阶导数皆取 t_f 时的值。

把 $w(x, t)$ 写成关于 x，t 的分离变量形式，则关于 t 的部分满足的是 t 的常系数二阶方程，所以必为指数形式解答。因为此类问题为所谓“直接”屈曲问题，所以不失一般性，可设其偏离运动解为 e^{pt/t_f}，其中 p 为待定正数。于是有

$$\dot{w}(t_f) = \frac{p}{t_f}w(t_f)$$

将此代入（20）则可把稳定性充分条件写成

$$\frac{\int_0^L\left[\left(\frac{h^3\sigma^\circ L}{36Vt_f} + \frac{E_hh^2}{24}\right)w''^2 + \frac{p^2\rho h}{2t_f^2}w^2\right]dx}{\frac{\sigma^\circ h}{2}\int_0^L w'^2dx} > 1$$

最后可得临界速度关系式

$$\varepsilon_{cr}=\frac{\rho V_{cr}^2(1+M/m)}{2\sigma^\circ}=\frac{hp}{3L}\left(\frac{\frac{E_h h}{\sigma^\circ L}p+\sqrt{\left(\frac{E_h h}{\sigma^\circ L}p\right)^2+4(1+M/m)}}{1+M/m}\right) \tag{21}$$

同时得屈曲半波数

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4=\frac{36p^2}{h^2L^2(1+3E_hVt_f/2\sigma^\circ L)(1+M/m)} \tag{22}$$

公式（21）和（22）都赖于未知量 p，为求得 p 把 $w\sim e^{pt/tf}\sin(n\pi x/L)$ 代入运动方程（18）即得关系式

$$\left(\frac{h^3\sigma^\circ L}{36Vt_f}p+\frac{E_h h^3}{12}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4-\sigma^\circ h\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{\rho h p^2}{t_f^2}=0 \tag{23}$$

把（22）代入（23）则得 p 的二次方程，解出 p 为 V 的函数，再代回（22）则得冲击速度 V 下 n 的表达式。容易证明 $V=V_{cr}$ 时 p 为 2，于是临界速度可写为

$$\varepsilon_{cr}=\frac{4h}{3L}\left(\frac{\frac{E_h h}{\sigma^\circ L}+\sqrt{(1+M/m)+(E_h h/\sigma^\circ L)^2}}{1+M/m}\right) \tag{24}$$

而 n 为：

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4=\frac{144}{h^2L^2(1+3E_hVt_f/2\sigma^\circ L)(1+M/m)} \tag{25}$$

下面就文献〔 4 〕中的一个试件，将本文理论结果和〔 4 〕中的实验和理论结果进行比较。这个试件就是〔 4 〕中记为“4CSC-3”的矩形管。它沿四条棱剪开，易于比较临界速度。为了进行比较，下面将取 $M=0$。

首先看临界情形。这试件 $L=5\text{in}$，$h=\frac{1}{16}\text{in}$，由文献〔 4 〕中照片可知冲击速度为 $59f_t/s$ 时已屈曲，但接近临界状态，此时按〔 4 〕取 $E_h/\sigma^\circ\sim10$，于是 $\frac{E_h h}{\sigma^\circ L}$ 相对于 1 可忽略，于是由（24）式得

$$\varepsilon_{cr}=\rho V_{cr}^2/2\sigma^\circ=0.0167$$

又因 $1\gg3E_hVt_f/2\sigma^\circ L$，故近以地由（25）得

$$\frac{L}{n}=0.5(\text{in})$$

而〔 4 〕中实验数据 $\varepsilon=0.01$，$\frac{L}{n}=0.61(\text{in})$，理论值 $\frac{L}{n}$ 对初始位移扰动为 0.62，对速度扰动为 0.99，可见本文结果还是不坏的。

速度较高时，例如 V 为 $100f_t/s$，则 $E_h/\sigma_\circ\sim5$，（22）近似为

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4=36\frac{p^2}{h^2L^2}$$

代回（23）可得 p 的近似表达式

$$p=\sqrt{1+6\varepsilon L/h}-1$$

其中 $\varepsilon=\rho V^2/2\sigma^\circ$，为轴向总应变。将其代回前式得

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2=\frac{6}{Lh}\left(\sqrt{1+6\varepsilon L/h}-1\right)$$

若取 $\varepsilon=0.03$，得 $L/n=0.42$(in)，而据〔4〕实验值为 0.51(in)。〔4〕中理论值按位移扰动为 0.54(in)，速度扰动为 0.61(in)，再一次说明本文结果符合良好。而且容易看出，若考虑 M 的影响，上述全部结果将更接近实验值。

对〔4〕中其它试件，利用（22）和（23）同样可得 n 和 ε 关系式。计算表明，将其与〔4〕中实验数据比较，符合得也相当不错。

六、结　语

本文介绍的能量法则，为判断多么大的载荷下，结构将发生塑性动力屈曲提供了一种方法，这是以前的理论所未系统讨论过的一个重要问题。另外，从能量观点来计算屈曲型式，在塑性动力屈曲中尚未见过，具有概念明确，计算较简单的优点，是一种值得注意的尝试。

但本文只是一种初步的尝试。特别需要指出的是，能量法则通常只可给出稳定的充分条件，由此定出的临界量在一些问题中可能较保守，甚至很保守，需要具体情况具体分析。这是运用此能量法则必须注意的，如何改进有待进一步工作。

参　考　文　献

〔1〕Florence, A and Goodier, J. N., *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 80—86.

〔2〕Vaughan, H., Z. A. M. P., **20** (1969), 321—328.

〔3〕Jones, N. and Papageorigiou, E. A., *Int. J. Mech. Sci.*, **24** (1982), 1—20.

〔4〕Goodier, J. N., In Engineering Plasticity. Heyman, J. and Leckie, F. A. (Ed.) Cambridge Press, Cambridge. (1968), 183--200.

（上接第 275 页）

T-joints of offshore drilling platform with branch tube under axial compression and corresponding experiments were carried out by us. The computing results are compared not only with our experimental results (elastic-plastic), and also with previous computed results and experimental results (elastic). All these computing results are quite close to the experimental results. These show that the present method is feasible. This provides a new way for the elastic-plastic analysis of thin shell structures and worth for practical purposes.

An Energy Criterion for Plastic Buckling of Cylindrical Shells Under Impuisive Loading

Ru Chongqing *Wang Ren*

(Department of Mechanics Peking University

Abstract

In the case of impulsive loading, we believe the buckling takes place within a very short time t_f—— the respond duration of the motion, stability of the dominant motion depends on the behavior of the dominant motion within $[0, t_f]$ and so the investigation of the motion after t_f is not necessary, and in the calculation of energy, the initial disturbing energy that causes the perturbation is negligible.

The basic idea of the proposed energy criterion is:

for a system under a certain impulsive loading, when any kinematically admissible perturbation is imposed on its dominant motion, if the energy absorbed or dissipated by the system due to the perturbation is always larger than the work done by the load on the perturbation, then, the dominant motion of the system is a stable one.

If the kinematic equation of the perturbed motion w(x, t) is represented by:

$$f\ (V,\ w)\ = 0 \tag{1}$$

where f is a linear differential operator in which the coefficient for the acceleration $\ddot{w} > 0$ within $0 \leqslant x \leqslant L$, V is the inpulsive velocity. Then, the fundamental criterion can be stated as: The dominant motion is stable if for any admissible perturbatlion w $(x,\ t)$, we have

$$F\ (V,\ w) = \int_0^L \int_0^{t_f} f\ (V,\ w)\ \dot{W}\ dt\ dx > 0 \tag{2}$$

The response duration t_f can be treated as a function of the loading parameter and calculated from other consideration, the dot denotes time derivative.

Note especially, the perturbation w $(x,\ t)$ in addition to satisfying the geometric constraints, also possesses the following characteristics:

a. The energy of the initial perturbation determined by w (x, t) is small and can be neglected when computing F (V, w)

b. Buckling does not occur at the initial moment, so the initia values of w and its derivatives w. r. to x (needed to describe the buckled state) taken by their averages can be neglected as compared to their final values at $t=t_f$.

These characterize the perturbation at the very beginning of buckling.

Denote all admissible perturbation that possess these two characteristics to form a set B. then, the sufficiency condition for stability may be written as:

$$\underset{w \in B}{F} (V, w) > 0 \tag{3}$$

From this proposed modified energy criterion is derived some simple methods and formulae to estimate the buckling wave number and threshold velocity for circular cylindrical shells, stringer stiffened cylindrical shell under axial impact and rectangular plate under inplane impulsive loading. The computation is much simpler than those derived from the concept of amplification factor currently used. The comparison with existing computed and laboratory results shows good agreement.