弹性力学中广义变分原理的进一步研究

钱 伟 长
（上海工业大学）

提要 本文介绍了作者近年来有关弹性力学中广义变分原理的研究[6,7]。我们证明了在弹性力学的胡海昌-鹫津久一郎变分原理[1,2,3,4]中，应力应变关系仍属变分约束条件，于是在本原理三类变分变量 σ_{ij}，e_{ij}，u_i 中，只有两类是独立的，即 σ_{ij}，u_i 或 e_{ij}，u_i。从此，我们在胡海昌-鹫津久一郎原理和海林格-赖斯纳原理[8,9]之间，找到了等价定理。

为了解除应力应变关系的变分约束，我们提出了一个高阶拉格朗日乘子法。用这个高阶拉氏乘子法，我们从胡鹫原理和海赖原理分别导出了前所未知的更普遍的广义变分原理。我们也证明了在这两类变分原理之间，有等价定理和相关的等价关系存在。

一、弹性力学中小位移问题的数学描述

设 V 是弹性体的容积，它受分布体积力 $\bar{F}_i(i=1,2,3)$ 的作用，S_σ 是受有已知外力 $\bar{p}_i$ 作用的那一部份边界表面，而 S_u 是位移 $\bar{u}_i$ 已知的另一部份边界表面，在静力平衡时，应力 σ_{ij}，应变 e_{ij} 和位移 u_i 满足下列五组条件，即

1．平衡条件

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0\ （在\ V\ 内） \tag{1·1}$$

其中，$\sigma_{ij,j}$ 代表 $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$，而 j 为哑标。

2．应力应变关系，对线性弹性而言，我们有

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl}\ 或\ e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl}\ （在\ V\ 内） \tag{1·2}$$

其中 a_{ijkl} 和 b_{ijkl} 分别为弹性常数和柔性常数，$a_{ijkl}=a_{klij}=a_{jikl}=a_{ijlk}$，和相类的 b_{ijkl} 对称关系。

3．应变位移关系

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\ （在\ V\ 内） \tag{1·3}$$

其中 u_i 为位移分量，$u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j$。

4．已知表面位移的边界条件

$$u_i=\bar{u}_i\ （在\ S_u\ 上） \tag{1·4}$$

5．边界面上外力已知的边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\overline{P}_i \quad (在 S_\sigma 上) \tag{1·5}$$

设 S 为总边界面积，则

$$S=S_u+S_\sigma \tag{1·6}$$

从（1·1），（1·2），（1·3）等十五个方程式中，我们找到满足边界条件（1·5），（1·6）的 σ_{ij}，e_{ij}，u_i 在容积 V 中的解。

现在让我们列入应变能密度 $A(e)$ 和余能密度 $B(\sigma)$，它们是由下列积分定义的

$$A(e)=\int_0^{e_{ij}}\sigma_{ij}de_{ij} \qquad B(\sigma)=\int_0^{\sigma_{ij}}e_{ij}d\sigma_{ij} \tag{1·7}$$

对线性弹性力学而言，它们可以用（1·2）式写出下式，其意义亦见图 1a。

$$A(e)=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \qquad B(\sigma)=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1·8}$$

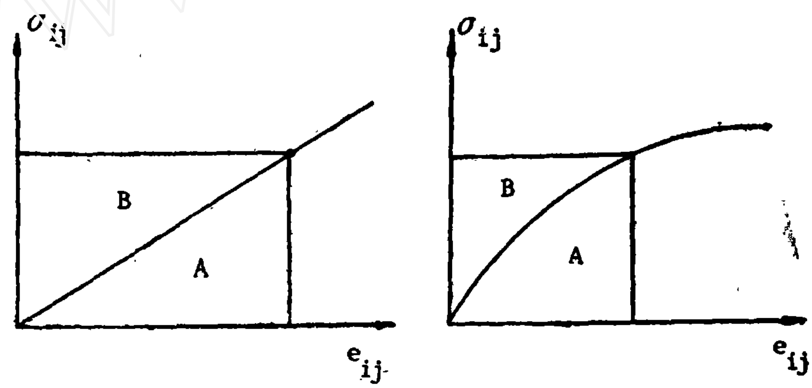
而且满足下列能量密度恒等式

$$A+B-e_{ij}\sigma_{ij}=0 \tag{1·9}$$

在非线性弹性力学（见图 1b）中，$A(e)$ 和 $B(\sigma)$ 是用（1·7）定义的，所以应力应变关系可以写成

$$\frac{dA}{de_{ij}}=\sigma_{ij}, \quad \frac{dB}{d\sigma_{ij}}=e_{ij} \tag{1·10}$$

（1·9）即能量密度恒等式在非线性应力应变关系中对一切 σ_{ij} 和 e_{ij} 也是满足的。



（a）线性弹性　　（b）非线性弹性

图 1　应变能密度和余能密度

二、胡海昌-鹫津久一郎原理及其变分约束

胡海昌-鹫津久一郎变分原理是最小位能原理通过解除其约束而导出的。在小位移弹性静力学中，最小位能原理可以写成下式：

$$\delta\Pi_p=0 \tag{2·1}$$

$$\Pi_p=\iiint[A(e)-\overline{F}_iu_i]dV-\iint\overline{P}_iu_idS_\sigma \tag{2·2}$$

其变分约束条件为

$$\frac{dA}{de_{ij}}=\sigma_{ij} \qquad e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (在 V 内) \tag{2·3ab}$$

$$u_i=\bar{u}_i \text{（在 } S_u \text{ 上，其中 } S_u+S_\sigma=S\text{）} \tag{2·4}$$

这里很易证明，当 Π_p 为极小时（在约束条件（2·3a，b）和（2·4）下），（2·1）给出的欧拉方程即为平衡方程（1·1），和给出的自然边界条件即为已知外力的边界条件（1·5）。所以，满足最小位能原理的解 e_{ij}，u_i，σ_{ij} 即为满足小位移弹性力学的全部数学方程（1·1）—（1·5）的解。

胡海昌-鹫津久一郎变分原理认为：如果 σ_{ij}，e_{ij}，u_i 是三类相互独立的变量，则泛函

$$\Pi_{HW}=\Pi_P-\iiint\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV-\iint\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·5}$$

为驻值的条件

$$\delta\Pi_{HW}=0 \tag{2·6}$$

所给出的 σ_{ij}，e_{ij}，u_i 必满足全部弹性力学方程（1·1）—（1·5）。（2·5）式也可以写为

$$\Pi_{HW}=\iiint\left\{A(e)-\bar{F}_iu_i-\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right\}dV$$
$$-\iint\bar{p}_iu_idS_\sigma-\iint\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·7}$$

人们长期以来，误认为这个变分原理是“弹性力学中最一般的变分原理。弹性力学中的其他的变分原理，都可以看作是三类变量广义变分原理的特殊情况”，（见〔2〕中第387，288页），或明确把海林格赖斯纳原理看作是这个原理的特殊情况（见〔4〕的2·4节）。

不论胡海昌或鹫津久一郎的推导和证明都有先验的成份。

例如，胡海昌在1955年的文章[1]中，先验地认为（2·5）或（2·7）式中的三类变量一定都是独立的。如果这三类变量可以证明是独立变量，则 Π_{HW} 的驻值条件的确给出全部弹性力学方程的解。可惜这只是一个先验的假设。无法予以证实。

鹫津久一郎（1955）〔3〕和（1968）〔4〕的文章和专著试图通过拉氏乘子法来推导解决这个问题。可惜在推导过程中也用了几个先验的假说。为了说明这个问题，让我们按鹫津（1975）〔4〕的中译本2·3节的原文来进行讨论。鹫津在译本第35，36，37页中有这样一段话。“引用拉氏乘子，可以把上述应变位移关系和边界位移已知条件并入变分表达式的骨架内来推广最小位能原理。通过引进分别定义在 V 内和 S_u 上的九个拉氏乘子 σ_{ij} 和 β_i，广义原理可以表达如下：问题的真实解可以由下面所定义的泛函 Π_I 的驻值条件给出。

$$\Pi_I=\iiint[A(e)-\bar{F}_iu_i]dV-\iiint\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV$$
$$-\iint\bar{p}_iu_idS_\sigma-\iint\beta_i(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·8}$$

在这个泛函中，经受变分的独立量是十八个，即 e_{ij}，σ_{ij}，u_i，β_i 而没有约束条件，对这些取变分，我们有

$$\delta\Pi_I=\iiint\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta e_{ij}-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\right.$$
$$\left.-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV+\iint(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_idS_\sigma$$
$$+\iint(\sigma_{ij}n_j-\beta_i)\delta u_idS_u-\iint(u_i-\bar{u}_i)\delta\beta_idS_u \tag{2·9}$$

而驻值条件则表明为

在 V 内： $\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \quad e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ (2·10a, b)

$\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i=0$ (2·10c)

在 S_σ 上 $\sigma_{ij}n_j-\overline{P}_i=0$ (2·10d)

在 S_u 上 $\sigma_{ij}n_j-\beta_i=0 \quad u_i-\overline{u}_i=0$ (2·10e, f)

可以看出，方程 (2·10a)，(2·10e) 确定了拉氏乘子 σ_{ij}，β_i 的物理意义，而使 Π_I 取驻值的关系式就是弹性力学问题的全部方程，如果把方程 (2·10b) 和 (2·10f) 当作约束条件，那么，Π_I 重新简化为最小位能原理的泛函 Π_P。

消去式中的拉氏乘子 β_i，我们可以得到这个变分原理的泛函表达式 Π_{HW}，即 (2·7) 式。

在泛函 (2·7) 式中，经受变分的独立量是十五个，即 e_{ij}，σ_{ij}，u_i，而且没有变分约束条件，对这十五个量取变分时，其驻值条件是由 (2·10a, b, c)，(2·10d, f) 给出的。”

以上引录，除了在符号上用本文的符号外，并未作任何实质性的更改。

我们必须指出：（1）鹫津所用九个拉氏乘子 σ_{ij} 和 β_i 中，σ_{ij} 是先验地决定的。于是驻值条件 (2·10a) 不是确定了 σ_{ij}（作为待定的拉氏乘子）的物理意义为 $\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}$，而是代表了应力应变关系 (2·3a)。（2）如果 σ_{ij} 在 (2·8) 中是待定的拉氏乘子。则(2·8)这个泛函中，只解除了 $e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ 和 $u_i-\overline{u}_i=0$ 两个约束条件，还有应力应变关系这个约束条件并未解除，就不能说这个泛函“没有约束条件”。所以，认为胡鹫原理是没有约束条件这一判断，也是先验的，没有根据的。

最后，胡海昌在他的著作 (1982)〔2〕的6·10节中，其论述也是先验的，胡海昌在这里说（这里用本文的符号）：

“在 §6·7 中已证明最小位能原理 $\delta\Pi_P=0$，其中的自变函数 u_i 和 e_{ij} 要求满足应变位移关系 (1·3) 和已知边界位移条件 (1·4)，用适当的拉氏乘子将方程 (1·3)，(1·4) 并入变分式 $\delta\Pi_P=0$ 内，便得到 $\delta\Pi_{HW}=0$，Π_{HW} 见 (2·7) 式，此式中的 σ_{ij} 和 $\sigma_{ij}n_j$ 起初是作为拉氏乘子引进的。不过它们的力学意义就是应力和边界上的面力，所以直接用了 σ_{ij} 和 $\sigma_{ij}n_j$ 这两个记号。经过如上的推广之后，变分式 $\delta\Pi_{HW}=0$ 便相当于弹性力学的全部方程和边界条件”。

显而易见，胡海昌把 σ_{ij} 和 $\sigma_{ij}n_j$ 作为拉氏乘子是先验的，同时，这两个乘子只能解除两个约束条件，而应力应变关系这一条件既未解除，则 $\delta\Pi_{HW}=0$ 就不能“相当于弹性力学的全部方程和边界条件”，所以，这个结论也是先验的。

现在让我们认真地使用拉氏乘子法解除 (1·2)，(1·3) 和 (1·4) 的约束。

设 $f=0$ 是一个约束条件，为了解除这个约束条件，泛函应有在修正项 $\Phi(f)$，而且

$$\Phi(f)_{f\to 0}=0 \tag{2·11}$$

如果 $\Phi(f)$ 是 f 的正规函数，则当 f 较小时，可以展开为 f 的泰勒级数。

$$\Phi(f)=\alpha_1 f+\alpha_2 f^2+\cdots \tag{2·12}$$

如果 f 很小，我们可以略去 f^2 以上的高次项，得

$$\Phi(f)=\alpha_1 f \tag{2·13}$$

其中 α_1 是待定的非零乘子，我们称之为拉氏乘子，因为这是 f 的线性项的乘子，所以，也

可以称为线性拉氏乘子。

当 $\alpha_1=0$ 时，这种约束称之为临界约束。而泛函的修正项，应该考虑高阶拉氏乘子项，即

$$\Phi(f)=\alpha_2 f^2 \tag{2·14}$$

其中 α_2 也是待定乘子，也称高阶拉氏乘子。

最小位能原理（2·1）中有两种变量 e_{ij}，u_i，变分时，受有两种约束条件的约束，即（2·3b）和（2·4），或

$$\delta\Pi_P=\iiint\left[\frac{dA}{de_{ij}}\delta e_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i\right]dV-\iint\bar{p}_i\delta u_i dS_\sigma \tag{2·15}$$

在用了约束条件（2·3b）和（2·4）后，上式可以化为

$$\delta\Pi_P=-\iiint\left[\left(\frac{dA}{de_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i dV+\iint\left[\frac{dA}{de_{ij}}n_j-\bar{p}_i\right]\delta u_i dS_\sigma \tag{2·16}$$

极值条件 $\delta\Pi_P=0$ 给出

$$\left(\frac{dA}{de_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad \text{在 } V \text{ 内} \tag{2·17a}$$

$$\frac{dA}{de_{ij}}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \tag{2·17b}$$

这两个欧拉方程和自然边界条件并不和平衡方程（1·1）和外力已知边界条件（1·5）相同，只有当 $\frac{dA}{de_{ij}}$ 和 σ_{ij} 满足应力应变关系(1·10)时，才是相同的。因此，应力应变关系(1·10)虽然不是变分时的约束条件，但是，也是定义应力时的定义，在实质上也是某种意义上讲的约束条件。

现在先让我们用拉氏乘子法解除最小位能原理的两个约束条件（对 e_{ij}，u_i 的约束条件），相关的待定拉氏乘子为 α_{ij}，β_j，于是，修正后的泛函数为

$$\Pi_P^*=\Pi_P+\iiint\alpha_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV+\iint\beta_i(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·18}$$

其中 α_{ij}，β_i，σ_{ij}，u_i 都可以看作为独立变量。通过分部积分，Π_P^* 的驻值条件可以写成

$$\begin{aligned}\delta\Pi_P^*=&\iiint\left\{\left[\frac{dA}{de_{ij}}+\alpha_{ij}\right]\delta e_{ij}+\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\alpha_{ij}+(\alpha_{ij,j}-\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV\\&+\iint\{(u_i-\bar{u}_i)\delta\beta_i+(\beta_i-n_j\alpha_{ij})\delta u_i\}dS_u-\iint(n_j\alpha_{ij}+\bar{p}_i)\delta u_i dS_\sigma=0\end{aligned} \tag{2·19}$$

从此，我们得

(a) $\frac{dA}{de_{ij}}+\alpha_{ij}=0$ （在 V 内） (2·20a)

(b) $e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ （在 V 内） (2·20b)

(c) $\alpha_{ij,j}-\bar{F}_i=0$ （在 V 内） (2·20c)

(d) $u_i-\bar{u}_i=0$ （在 S_u 上） (2·20d)

(e) $\beta_i-n_j\alpha_{ij}=0$ （在 S_u 上） (2·20e)

(f) $n_j\alpha_{ij}+\bar{p}_i=0$ （在 S_σ 上） (2·20f)

其中（20a），（20e）决定了待定的拉氏乘子

$$\alpha_{ij}=-\frac{dA}{de_{ij}},\quad \beta_i=-\frac{dA}{de_{ij}}n_j \tag{2·21a, b}$$

(2·20b)，(2·20d) 分别为应变位移关系（1·3）和已知边界位移条件（1·4）。(2·20c)，(2·20f) 可以写成

$$\left(\frac{dA}{de_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \quad（在 V 内） \tag{2·22a}$$

$$\frac{dA}{de_{ij}}n_j-\bar{P}_i=0 \quad（在 S_\sigma 上） \tag{2·22b}$$

这是用$\frac{dA}{de_{ij}}$代表应力的平衡方程（1·1）和外力已知边界条件（1·5），如果应力应变关系（1·10）得到满足，（2·22a, b）就等于（1·1）和（1·5）。把（2·21a, b）中识别了的 α_{ij}，β_i 代入（2·18）式，得

$$\Pi_P^*=\Pi_P-\iiint\frac{dA}{de_{ij}}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV-\iint\frac{dA}{de_{ij}}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·23}$$

其中，Π_P 见（2·2）式。

Π_P^* 的驻值条件。

$$\delta\Pi_P^*=0 \tag{2·24}$$

给出应变位移关系（2·20b），边界位移已知条件（2·20d），以及用$\frac{dA}{de_{ij}}$来表示的平衡方程（2·22a）和边界外力已知条件（2·22b）。这是一个两变量（e_{ij}，u_i）的驻值原理，在这两个变量中已经没有任何约束条件，为了求得 σ_{ij}，我们必须利用应力应变关系

$$\sigma_{ij}=\frac{dA}{de_{ij}} \tag{2·25}$$

从已知的 e_{ij} 中导出。因此，（2.25）还是求取应力 σ_{ij} 的约束条件。

（2·23）可以写成

$$\Pi_P^*=\Pi_P-\iiint\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV+\iiint\left(\sigma_{ij}-\frac{dA}{de_{ij}}\right)\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV$$

$$-\iint\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u+\iint\left(\sigma_{ij}-\frac{dA}{de_{ij}}\right)n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·26}$$

在（2·25）式的约束条件下，上述立刻化为胡海昌-鹫津久一郎原理的泛函 Π_{HW}。

$$\Pi_{HW}=(\Pi_P^*)_{\sigma_{ij}=\frac{dA}{de_{ij}}}=\Pi_P-\iiint\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]dV$$

$$-\iint\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u \tag{2·27}$$

所以，胡鹫变分原理可以写作：

小变形弹性力学问题的准确解可以从 Π_{HW} 在约束条件（2·25）下的驻值条件。

$$\delta\Pi_{HW}=0 \tag{2·28}$$

中求得。

这里必须指出，（2·27）式 Π_{HW} 的泛函，并不象胡海昌[1,2]和鹫津久一郎[3,4]所认为的那样，σ_{ij}，e_{ij}，u_i 都是独立的，变分是没有约束的，恰好相反，它们受有（2·25）式的约束，或即是说，在这三种变量中只有两类是独立的。我们可以把 σ_{ij}，u_i 看作为独立

变量，也可以把 e_{ij}，u_i 看作为独立变量。这种误解的来源就因为胡海昌和鹫津久一郎在证明中都采用了先验的假设，这一点在本节开头时就已指出了。

到此为止，还有两个问题必须解决。

问题（一）：

胡海昌在他的专著（1982）[2]的 6·10 节中曾指出，（2·28）式的变分可以写成

$$\delta\Pi_{HW}=\iiint\left\{\left[\frac{dA}{de_{ij}}-\sigma_{ij}\right]\delta e_{ij}-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV$$
$$+\iint(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i dS_\sigma-\iint\delta\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS_u=0 \qquad (2\cdot 29)$$

从（2·29），当 δe_{ij}，$\delta\sigma_{ij}$，δu_i 都是任意时，就得到（1·1）—（1·5）所有的弹性力学问题的方程式和边界条件。似乎一切方程都是变分问题的欧拉方程和自然边界条件，这不是说明胡鹫原理是无条件的变分原理吗？其实应该看到，这个结论是建立在“三种变量 σ_{ij}, e_{ij}, u_i 都是独立的”先验假设上的。我们在前面已经认真地证明了这个先验假设是错的，它们之间不是独立的，而是以应力应变关系（2·25）式为其约束条件的。亦即是说（2·29）式的 σ_{ij}，e_{ij} 之间必须满足（2·25），于是（2·29）应该写成

$$\delta\Pi_{HW}=-\iiint\left\{\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV$$
$$+\iint(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i dS_\sigma-\iint(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS_u=0 \qquad (2\cdot 30)$$

在 σ_{ij}，u_i 都是独立的条件下，给出除应力应变关系（2·25）以外的弹性力学问题的其它关系和边界条件。

问题（二）：

有没有可能用通常的拉氏乘子法把 $\delta\Pi_{HW}=0$ 中约束条件（2·25）式解除呢？为此，我们采用拉氏乘子 λ_{ij}，把（2·27）修正为

$$\Pi^*_{HW}=\Pi_{HW}+\iiint\lambda_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{dA}{de_{ij}}\right)dV \qquad (2\cdot 31)$$

其变分为

$$\delta\Pi^*_{HW}=\iiint\left\{\left[\frac{dA}{de_{ij}}-\sigma_{ij}-\lambda_{kl}\frac{d^2A}{de_{kl}de_{ij}}\right]\delta e_{ij}-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\lambda_{ij}\right]\delta\sigma_{ij}\right.$$
$$\left.+\left[\sigma_{ij}-\frac{dA}{de_{ij}}\right]\delta\lambda_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV+\iint(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i dS_\sigma$$
$$-\iint(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS_u \qquad (2\cdot 32)$$

驻值条件给出欧拉方程和自然边界条件：

$$\frac{dA}{de_{ij}}-\sigma_{ij}-\lambda_{kl}\frac{d^2A}{de_{kl}de_{ij}}=0 \quad 在\ V\ 内 \qquad (2\cdot 33a)$$

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\lambda_{ij}=0 \quad 在\ V\ 内 \qquad (2\cdot 33b)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{dA}{de_{ij}}=0 \quad 在\ V\ 内 \qquad (2\cdot 33c)$$

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \quad 在\ V\ 内 \qquad (2\cdot 33d)$$

$$\sigma_{ij}n_j-\overline{p}_i=0 \qquad 在 S_\sigma 上 \tag{2·33e}$$

$$u_i-\overline{u}_i=0 \qquad 在 S_u 上 \tag{2·33f}$$

从（2·33a）和（2·33c），我们很易证明

$$\lambda_{ij}=0 \tag{2·34}$$

也即是说，Π_{HW} 是一个有临界约束的泛函，线性拉氏乘子法不能解除这种约束。

三、海林格赖斯纳变分原理的推导及其变分约束

最小余能原理可以写成

$$\delta\Pi_C=0 \tag{3·1}$$

$$\Pi_C=\iiint B(\sigma)dv-\iint\overline{u}_in_j\sigma_{ij}dS_u \tag{3·2}$$

其变分约束条件为

$$\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i=0 \quad （在 V 内） \tag{3·3}$$

$$\sigma_{ij}n_j=\overline{p}_i \quad （在 S_\sigma 上，而且 S_\sigma+S_u=S） \tag{3·4}$$

在变分约束条件（3·3），（3·4）下 Π_c 的极小条件（3·1）给出下列关系

$$\frac{dB}{d\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0 \quad （在 V 内） \tag{3·5}$$

$$u_i=\overline{u}_i \quad （在 S_u 上，而且 S_\sigma+S_u=S） \tag{3·6}$$

最后，应变张量是根据下列定义计算的

$$\frac{dB}{d\sigma_{ij}}=e_{ij} \quad （在 V 内） \tag{3·7}$$

海林格赖斯纳原理可以用拉氏乘子法解除 Π_C 中的变分约束（3·3）和（3·4）而求得。

设 α_i 和 β_i 是相关的拉氏乘子，让我们分别以这两个乘子乘约束条件（3·3）和（3·4），再将其积吸收入原来的最小余能原理的泛函中去，得到下列新的修正了的泛函。

$$\Pi_C^*=-\Pi_C+\iiint\alpha_i(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)dV+\iint\beta_i(n_j\sigma_{ij}-\overline{p}_i)dS_\sigma \tag{3·8}$$

其中，Π_C 见（3·2），在它之前，我们使用了一个负号，这是根据卞学璜[5]的经验，可以直接导出海林格赖斯纳原理的泛函Π_{HR}。

把（3·8）变分，并进行分部积分，Π_C^* 的变分驻值给出

$$\begin{aligned}\delta\Pi_C^*=&\iiint\left\{-\left[\frac{dB}{d\sigma_{ij}}+\frac{1}{2}(\alpha_{i,j}+\alpha_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}+[\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i]\delta\alpha_i\right\}dV\\&+\iint\{(\alpha_i+\beta_i)n_j\delta\sigma_{ij}+(\sigma_{ij}n_j-\overline{p}_i)\delta\beta_i\}dS_\sigma\\&+\iint(\alpha_i+\overline{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS_u=0\end{aligned} \tag{3·9}$$

因为 V 中的 $\delta\sigma_{ij}$，$\delta\alpha_i$，S_u 中的 $\delta\sigma_{ij}$，S_σ 中的 $\delta\sigma_{ij}$ 和 $\delta\beta_i$ 都是相互独立的，（3·9）于是导出

1．欧拉方程

$$\frac{dB}{d\sigma_{ij}}+\frac{1}{2}(\alpha_{i,j}+\alpha_{j,i})=0 \quad \text{在} V \text{中} \tag{3·10a}$$

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \quad \text{在} V \text{中} \tag{3·10b}$$

2．自然边界条件

$$\alpha_i=-\bar{u}_i \quad \text{在} S_u \text{上} \tag{3·11}$$

$$\alpha_i+\beta_i=0 \quad \text{在} S_\sigma \text{上} \tag{3·12a}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \quad \text{在} S_\sigma \text{上} \tag{3·12b}$$

其中（3·10b），（3·12b）即为原来的变分约束条件，而（3·11），（3·10a），（3·12a）即可给出待定的拉氏乘子。

$$\alpha_i=-u_i\ (\text{在} V+S \text{中})，\ \beta_i=u_i \quad \text{在} S_\sigma \text{上} \tag{3·13a, b}$$

这样，（3·10a）和（3·11）即可给出（3·5），（3.6）。把识别了的拉氏乘子α_i，β_i代入（3·8），求得海林格赖斯纳变分原理的泛函Π_{HR}[8,9]。

$$\Pi_{HR}=-\iiint\{B(\sigma)+u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\}dV$$

$$+\iint \bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS_u+\iint u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS_\sigma \tag{3·14}$$

这里证明了在海林格赖斯纳原理中，只有两类变量u_i和σ_{ij}。其第三类变量e_{ij}可以通过应力应变关系（1·10）求得，而且我们也可以把（1·10）式看作为变分约束条件。

四、胡鹫原理和海赖原理间的等价定理

我们很易证明，胡鹫原理和海赖原理有相同的约束条件——即应力应变关系，所以，必然是等价的，即

$$\Pi_{HW}=\Pi_{HR} \tag{4·1}$$

从（2·7）和（3·14），我们有

$$\Pi_{HW}-\Pi_{HR}=\iiint\{A(e)+B(\sigma)-e_{ij}\sigma_{ij}\}dV \tag{4·2}$$

对于满足应力应变关系的σ_{ij}和e_{ij}而言，必满足能量恒等式（1·9），于是，得

$$\Pi_{HW}-\Pi_{HR}=0 \tag{4·3}$$

这就证明了在σ_{ij}和e_{ij}满足应力应变关系的条件下，（4·1）是确定的。这是证明了胡鹫原理和海赖原理间的等价定理。

虽然胡鹫原理有三种变量σ_{ij}，e_{ij}，u_i，但在应力应变关系的约束下，只有两种变量是独立的，所以，胡鹫原理并不能象胡海昌在（1982）〔2〕第387页所说的那样是“三类变量广义变分原理”，“是弹性力学中最一般的变分原理”，以及“弹性力学中的其他变分原理，都可以看作是三类变量广义变分原理的特殊情况”。

五、高阶拉氏乘子法，从Π_{HW}和Π_{HR}中导出的更一般的广义变分原理

在第Ⅱ，Ⅲ节中，证明了局限于线性拉氏乘子法，由于乘子等于零，所以无法用拉氏乘

子消除约束条件。这当然和原来假定拉氏乘子是非零乘子是矛盾的，在这种临界状态下，我们只能采用高阶乘子的高阶项，如（2•14）的$\alpha_2 f^2$，作为解除约束的修正项$\Phi(f)$。在我们的问题中，线性弹性的应力应变关系是我们的临界约束条件，即

$$f=e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \tag{5•1}$$

取

$$\Phi(f)=A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq}) \tag{5•2}$$

其中A_{ijkl}为待定的二阶拉氏乘子。我们有下列对称关系

$$A_{ijkl}=A_{klij}=A_{jikl}=A_{ijlk} \tag{5•3}$$

让我们取下述特殊形式的A_{ijkl}，这并不损失其一般性，即

$$A_{ijkl}=\frac{1}{2}\lambda a_{ijkl} \tag{5•4}$$

其中λ为一待定的任意标量，a_{ijkl}为弹性常数，见（1•2）式，

$$\begin{aligned}\Phi(f)&=\frac{1}{2}\lambda(a_{ijkl}e_{ij}-\sigma_{kl})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\\&=\lambda\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\right)\\&=\lambda(A+B-\sigma_{ij}e_{ij})\end{aligned} \tag{5•5}$$

这里必须指出，（5•5）中的$\Phi(f)$在实际上是和能量恒等式（1•9）成正比，它和线性弹性力学问题中的二次项有关。

一般说来，即使对非线性弹性力学问题而言，我们仍可利用这个项来作为修正项，即

$$\Phi(f)=\lambda\{A(e)+B(\sigma)-e_{ij}\sigma_{ij}\} \tag{5•6}$$

对于满足应力应变关系（1•10）的e_{ij}，σ_{ij}而言，我们有

$$\Phi(f)=0 \tag{5•7a}$$

$$d\Phi=\lambda\left\{\left(\frac{dA}{de_{ij}}-\sigma_{ij}\right)de_{ij}+\left(\frac{dB}{d\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)d\sigma_{ij}\right\} \tag{5•7b}$$

这里还可以进一步指出，高阶拉氏乘子λ不仅可以是坐标x_i的函数，也可以是e_{ij}，σ_{ij}的任意函数。

从Π_{HR}，我们可以用高阶拉氏乘子法解除应力应变关系的约束，从而建立新的更一般的广义变分原理的泛函

$$\Pi_{\lambda G}=\Pi_{HR}+\iiint\lambda\{A(e)+B(\sigma)-e_{ij}\sigma_{ij}\}dV \tag{5•8}$$

$\Pi_{\lambda G}$的驻值条件为

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\lambda G}=&\iiint\left\{-\frac{dB}{d\sigma_{ij}}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})+\lambda\left(\frac{dB}{d\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\right\}\delta\sigma_{ij}dV\\&+\iiint\left\{\lambda\left(\frac{dA}{de_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta e_{ij}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i+(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})\delta\lambda\right\}dV\\&-\iint(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_jdS_u+\iint(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_idS_\sigma=0\end{aligned} \tag{5•9}$$

其中$\delta\sigma_{ij}$，δe_{ij}，δu_i，$\delta\lambda$在V中，δu_i在S_σ中，$\delta\sigma_{ij}$在S_u中都是独立变量，其系数都应等于零，于是，得

(A) 在 V 中

(a) $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ (5·10a)

(b) $-\dfrac{dB}{d\sigma_{ij}}+\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})+\lambda\left(\dfrac{dB}{d\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)=0$ (5·10b)

(c) $\lambda\left(\dfrac{dA}{de_{ij}}-\sigma_{ij}\right)=0$ (5·10c)

(d) $A+B-e_{ij}\sigma_{ij}=0$ (5·10d)

(B) 在 S_u 上

$$u_i-\bar{u}_i=0 \tag{5·11}$$

(C) 在 S_σ 上

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \tag{5·12}$$

(5·10a)，(5·11)，(5·12) 为原弹性力学问题的平衡方程和有关的边界条件。从 (5·10d)，我们得能量密度恒等式 (1·9)。这个恒等的导数给出应力应变关系 (1·10)，于是 (5·10c) 对于任意 λ 值都是满足的，而 (5·10b) 化为应变位移关系 (1·3) 。这里的 λ 无法识别。当 λ 为e_{ij}，σ_{ij}，u_i 的任意函数时，其证明完全相同。这是一个比胡鹫原理、海赖原理更为一般的广义变形原理。这个原理并无任何约束条件。这是一个驻值原理，它可以写成

$$\delta\Pi_{\lambda Q}=0\ (\text{驻值}) \tag{5·13}$$

$$\Pi_{\lambda Q}=\iiint\{-B(\sigma)-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i\}+\lambda(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})\}dV$$
$$+\iint\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS_u+\iint u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS_\sigma \tag{5·14}$$

其中 λ 是一个非零乘子，它可以是 x_i，u_i，e_{ij}，σ_{ij} 的任意函数。

这里还可以指出，(5·13)，(5·14) 也可以看作为罚函数法的约束变分原理。这一方面可以参考辛克维奇 (1977) [10] 的著作 3·14 节。

相似地，我们可以从 Π_{HW} 中用高阶拉氏乘子法解除应力应变关系的约束而求得新 的广义变分原理。

这个广义变分原理的泛函可以写成

$$\Pi_{\lambda' Q}=\Pi_{HW}+\iiint\lambda'(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{5·15a}$$

其中 λ' 为又一非零标量，或可写成

$$\Pi_{\lambda' Q}=\iiint\left\{A+\lambda'(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_iu_i\right\}dV$$
$$-\iint n_j\sigma_{ij}(u_i-\bar{u}_i)dS_u-\iint\bar{p}_iu_idS_\sigma \tag{5·15b}$$

新的广义变分原理的驻值条件为

$$\delta\Pi_{\lambda' Q}=0 \tag{5·16}$$

这里可以看到，从 (5·14)，(5·15b)，

$$\Pi_{\lambda' Q}-\Pi_{\lambda Q}=\iiint(\lambda'-\lambda+1)(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{5·17}$$

其中 $\lambda'\neq0$，$\lambda\neq0$。

如果 λ，λ' 满足等价关系

$$\lambda'-\lambda+1=0\ (\lambda'\neq 0,\ \lambda\neq 0) \tag{5·18}$$

则从（5·17），我们求得等价定理

$$\Pi_{\lambda' G}=\Pi_{\lambda G} \tag{5·19}$$

这就证明了，当 $\lambda'-\lambda+1=0$，$\lambda'\neq 0$，$\lambda\neq 0$ 时，$\Pi_{\lambda' G}$、$\Pi_{\lambda G}$ 等价。

参 考 文 献

〔1〕胡海昌，论弹性力学与受范性体力学中的一般变分原理，物理学报，**10**，3（1954），259。

〔2〕胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社（1981）。

〔3〕Washizu, K., On the variational principles of elasticity and plasticity, Aeroelasticity and Structures Research Lab., Massachusetts Institute of Technology, Technical Report (1955), 25-18.

〔4〕鷲津久一郎，弹性和塑性力学中的变分法，老亮、郝松林译，科学出版社（1984）。

〔5〕Th. H. H. Pian（卞学璜）大连混合杂交有限元国际会议上的报告（1982），八月十一日至廿八日。

〔6〕钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，中国机械工程学报，**15**，2（1979），1—23。

〔7〕钱伟长，变分法和有限元（上册），科学出版社（1980），349—440。

〔8〕Hellinger, E., Der allgemeine Ansatz der Mechanik der Kontinue, Encyclopadia der Mathematishen Wissenshaften, **14**, 4 (1914), 609—694.

〔9〕Reissner, E., On a variational theorem in elasticity, *Journal of Mathematics and Physics*, **29**, 2 (1950), 90—95.

〔10〕Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. 3rd Edition, McGraw-Hill Book Company Limited. London(1977).

Furtherstudy of Generalized Variational Principle in Elasticity

Chien Weizang

(Shanghai University of Technology)

Abstract

It is shown in this paper that, in Hu-Washizu variational principle of elasticity, the stress-strain relation remains to be a variational constraint, and thus among three kinds of variational variables σ_{ij}, e_{ij}, u_i in this principle, only two of them are independent, namely σ_{ij}, u_i or e_{ij}, u_i. Consequently, an equivalent theorem between Hu-Washizu principle and Hellinger-Reissner principle in

（下转第224页）

不能因此就认为这三类变量是相互独立的。

4．除非有另外的措施以保证σ_{ij}，e_{ij}和u_i这三类变量相互独立，不能将Hu-Washizu广义变分原理和胡海昌“广义余能原理”当作互相独立的三类变量的广义变分原理使用。

参 考 文 献

〔1〕钱伟长，再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定理问题和胡海昌先生商榷，力学学报，4(1983)，325.

〔2〕钱伟长，关于弹性力学中的广义变分原理及其在板壳问题上的应用，未发表，1964年10月6日

〔3〕钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，机械工程学报，**15**，2(1979)，1—23.

〔4〕钱伟长，变分法和有限元，科学出版社，北京，(1980).

〔5〕钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，**4**，2(1983)，137—150.

〔6〕胡海昌，论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理，物理学报，**10**，3(1954)，259.

〔7〕胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社，北京，1981，387.

〔8〕胡海昌，略论Hellinger-Reissner和胡海昌-鹫津久一郎两种广义变分原理的联系，力学学报，3(1983)，301.

（上接第194页）

essence of the problems. Using two successive reduction techniques, the number of DOF of system can be reduced by two orders, for example, the number over than 1000 DOF can be reduced to 100 DOF for modal analysis. Further truncated to 10 DOF, the nonlinear dynamic response can be analyzed easily.

Up to now, the reduction methods to problems in nonlinear dynamic analysis have been limited, but this kind of work is of particular importance for large complex systems, whose predicted nonlinear response are costly and time-consuming. Using the final computer program DAPOS, the examples showing the advanages and success of the presented method are given.

（上接第217页）

elasticity is established.

In order to remove the variational constraint of stress-strain relations, an high order Lagrange multiplier method is proposed. With this method, we find more general forms of functional of generalized principle ever known to us from Hellinger-Reissner principle and Hu-Washizu principle respectively. It is also shown that there are equivalent theorem and related equivalent relation between these two general forms of functional in elasticity.