由Gurtin变分原理导出的两种求解动力响应的方法

张汝清　董　明

（重庆大学）

提要　本文以Gurtin变分原理为基础导出了两种求解结构动力响应的递推公式：（1）用时间对偶有限元在时间域上离散，并由卷积的特性导出一种递推公式；（2）在每一时间步上离散，采用θ积分参数得到无条件稳定的递推公式。

一、引　　言

目前，人们计算弹性体的动力响应问题，一般都是从瞬时最小势能原理着手，得到线性常微分方程组，再导出直接积分、振型迭加等各种数值方法。也有采用Hamilton原理，对时间进行离散，用时间有限元法来处理的。但Hamilton原理考虑的是时间上的边值问题而不是考虑初始值问题[2]。即用边值条件：

$$\text{在}\ t=0\ \text{时：}\ \{u\}=\{u_0\}，\ \text{在}\ t=t_1\ \text{时：}\ \{u\}=\{u_1\}$$

而不用初始条件：

$$\text{在}\ t=0\ \text{时：}\ \{u\}=\{u_0\}，\quad \frac{\partial\{u\}}{\partial t}=\{\dot{u}_0\}$$

Benthien-Gurtin最小转换能量原理以及Gurtin变分原理，即含边值条件，又含初值条件[1,2]。Benthien-Gurtin最小转换能量原理是将体系的运动微分方程对时间进行Laplace变换，得到相当的象函数平衡方程，即转换后的平衡方程。由此平衡方程导出的能量原理就叫最小转换能量原理。由于采用了Laplace变换，泛函中就包含了系统的初值条件。

1974年，Ulrich Holzlöhner[3]对此原理提出了他的求解方法，首先，求解含初始条件的线性代数方程，然后用数值法进行Laplace逆变换。1977年Mustafa M. Aral，Ülgen Gülcat[4]对此提出新的求逆变换技术。1982年，G. V. Narayanen，D. E. Beskos[5]总结出8种Laplace逆变换法用于该原理。显然，用Benthien-Gurtin最小转换能量原理的主要问题是如何计算Laplace逆变换。

用Gurtin变分原理可不计算逆变换，这是由于它是将最小转换能量原理经拉氏逆变换恢复到原函数，由原函数所构成的泛函得到的变分原理。

二、由时间对偶有限元导出递推公式

1. 公式推导

Gurtin变分原理指出：在各种可能运动状态中，精确解使泛函 Λ 取驻立值。即

$$\delta\Lambda=0 \tag{1·1}$$

其中，

$$\Lambda=\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{T}[A]*\{\varepsilon\}+\frac{1}{2}\rho\frac{\partial\{u\}^{T}}{\partial t}*\frac{\partial\{u\}}{\partial t}+\frac{1}{2}c\cdot\frac{\partial\{u\}^{T}}{\partial t}*\{u\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}c\{u_0\}^{T}\{u\}-\rho\{\dot{u}_0\}^{T}\{u\}-\{f\}^{T}*\{u\}\right)d\Omega-\iint_{B_2}\{\bar{P}\}^{T}*\{u\}dB \tag{1·2}$$

式中算子“$*$”代表两个时间函数的卷积，$[A]$为弹性矩阵，ρ为密度，c为阻尼系数。

由Gurtin变分原理可导出运动方程，初始条件和边界条件，这里，初始条件为自然边界条件。显然，由于经过Laplace逆变换，原最小转换能量原理中的乘积关系变成了卷积，这在某些方面增加了问题的复杂性。

（1）对泛函的处理

从（1·2）中看出，Λ不仅是$\{u\}$的函数，而且是时间的t函数，我们可将t视为一参数，当对Λ取变分时t保持不变就导出瞬时运动方程。由于$\{u\}$是以卷积的形式出现在泛函中，因此Λ又与o到t区域内的$\{u\}$和$\{\dot{u}\}$有关，由此可以说，Gurtin变分原理是具有时间历程的变分原理。于是可将时间τ作为自变量（它的区域与参数t有关），将$\{u\}$在空间Ω和时间τ张成的广义空间中离散成有限个单元作近似插值，注意到泛函中只含$\{u\}$及其一阶导数，因此它属于c_0连续问题。为便于书写，以下将$\iiint_{\Omega}$简记为$\int_{\Omega}$，$\iint_{B_2}$简记为$\int_{B}$。

令

$$\phi=\sum_{e}\phi^{e}=\sum_{e}\frac{1}{2}\int_{\Omega^{e}}\int_{t^{e}}\{\varepsilon(\tau)\}^{T}[A]\{\varepsilon(t-\tau)\}d\tau d\Omega \tag{2·1}$$

$$\psi=\sum_{e}\psi^{e}=\sum_{e}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\Omega^{e}}\int_{t^{e}}\rho\frac{\partial\{u(\tau)\}^{T}}{\partial\tau}\frac{\partial\{u(t-\tau)\}}{\partial\tau}d\tau d\Omega \tag{2·2}$$

$$\lambda=\sum_{e}\lambda^{e}=\sum_{e}\frac{1}{2}\int_{\Omega^{e}}\int_{t^{e}}c\frac{\partial\{u(\tau)\}^{T}}{\partial\tau}\{u(t-\tau)\}d\tau d\Omega \tag{2·3}$$

$$\beta=\sum_{e}\beta^{e}=\sum_{e}\int_{\Omega^{e}}\int_{t^{e}}\{f(\tau)\}^{T}\{u(t-\tau)\}d\tau d\Omega \tag{2·4}$$

$$\alpha=\sum_{\bar{e}_t}\alpha^{\bar{e}_t}=\sum_{\bar{e}_t}\left(\int_{\Omega^{e}}\rho\{\dot{u}_0\}^{T}\{u(t)\}d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega^{e}}c\{u_0\}^{T}\{u(t)\}d\Omega\right) \tag{2·5}$$

$$\theta=\sum_{e_\partial}\theta^{e_\partial}=\sum_{e_\partial}\int_{B_{e_\partial}}\int_{t_{e_\partial}}\{\bar{P}(\tau)\}^{T}\{u(t-\tau)\}d\tau dB \tag{2·6}$$

其中，e代表单元，$\bar{e}_t$，e_∂为边界单元。

于是

$$\Lambda=\phi-\psi+\lambda-\alpha-\beta-\theta \tag{2·7}$$

从（2·1）、（2·2）中看出，在单元e的积分中由于有$t-\tau$这一卷积量，$\{\varepsilon(t-\tau)\}$并不是单元e内的应变，而是$t-\tau$时的应变，同样，$\left\{\frac{\partial u(t-\tau)}{\partial\tau}\right\}$也是$t-\tau$时的速度。

（2）单元划分与坐标变换

为便于计算，将单元划分对称于$\frac{t}{2}$，即以$\tau=\frac{t}{2}$平面为对称面，左右单元数相等，单元形状以$\frac{t}{2}$平面为镜面作反映，下面是一维空间问题示意图。

于是，对于单元e，其泛函即包含单元e的应变，又正好包含单元$\bar{e}$的应变，同理，对单元$\bar{e}$，其泛函也正好包含上述两个单元的应变。另外注意到当τ从t_1变到t_2时，$t-\tau$则从$t-t_1$变到$t-t_2$，因此，我们称单元e和$\bar{e}$互为对偶单元，或称e为基本元，$\bar{e}$为对偶元。

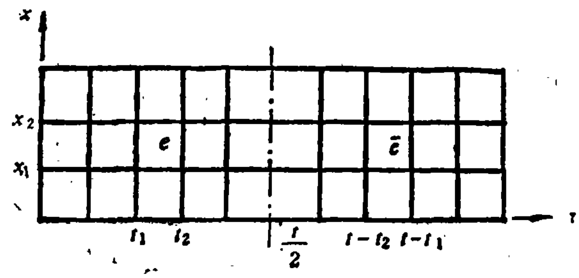

图 1　对偶单元的划分

将图 1 中单元的局部结点编号按如下的对偶镜象规则排列（图 1 为例作 4 结点单元，n 结点单元完全类似）。同时，建立局部坐标与整体坐标之间的转换关系：

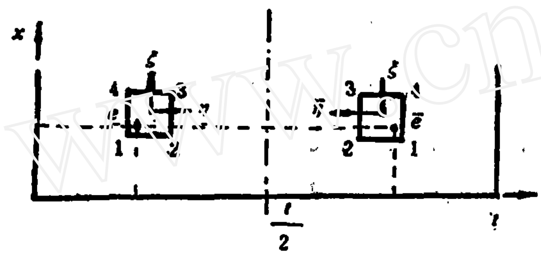

图 2　局部坐标下的结点编码与坐标变换

对单元e和$\bar{e}$都有x的平移变换（若为曲边单元则进行等参变换）。即有

$$\xi=a(x-l) \tag{3·1}$$

对单元e有τ的平移变换，即有

$$\eta=b(\tau-k) \tag{3·2}$$

对单元$\bar{e}$有τ的平移和反射两种变换，即有

$$\bar{\eta}=-b(\tau-t+k) \tag{3·3}$$

式中　$a>0$，$l>0$是与单元的空间度量有关的常数，$b>0$，$k>0$是与时间度量有关的常数。

按上图中所示的结点排列，对未知函数作单元插值。

对单元e：$u^e=\Sigma N_i(\xi,\ \eta)u_i=[N_1N_2N_3N_4]\{\delta^e\}$　　(3·4)

对单元$\bar{e}$：$u^{\bar{e}}=\Sigma N_i^*(\xi_1,\ \eta)\bar{u}_i=[N_1^*N_2^*N_3^*N_4^*]\{\delta^{\bar{e}}\}$　　(3·5)

由于结点编号和局部坐标的对偶性，不难得证，形函数N_i和N_i^*在对偶点（ξ，η）和（ξ，$\bar{\eta}$）上，它们的值及对局部坐标的导数值都是相等的，即

$$N_i(\xi,\ \eta)=N_i^*(\xi,\ \bar{\eta}) \tag{3·6}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial\xi}(\xi,\ \eta)=\frac{\partial N_i^*}{\partial\xi}(\xi,\ \bar{\eta}) \tag{3·7}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial\eta}(\xi,\ \eta)=\frac{\partial N_i^*}{\partial\bar{\eta}}(\xi,\ \bar{\eta}) \tag{3·8}$$

同时从坐标变换关系，当τ对应着η时，$t-\tau$正好对应着$\bar{\eta}$，则有

$$N_i(x,\ \tau)=N_i^*(x,\ t-\tau) \tag{3·9}$$

这时的自变量x，τ，$t-\tau$并不是直接替换ξ，η，$\bar{\eta}$，而是通过逆变换代入。

又因为
$$\frac{\partial N_i}{\partial x}(x,\ \tau)=\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=a\frac{\partial N_i}{\partial\xi}(\xi,\ \eta)$$

$$\frac{\partial N_i^*}{\partial x}(x,\ t-\tau)=\frac{\partial N_i^*}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=a\frac{\partial N_i}{\partial\xi}(\xi,\ \bar{\eta})$$

由（3·7），得

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}(x,\tau)=\frac{\partial N_i^*}{\partial x}(x,\ t-\tau) \tag{3·10}$$

又因为
$$\frac{\partial N_i}{\partial \tau}(x,\tau)=\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau}=b\frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi,\ \eta)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \tau}(x,\ t-\tau)=\frac{\partial N_i^*}{\partial \bar{\eta}}\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau}=-b\frac{\partial N_i^*}{\partial \bar{\eta}}(\xi,\ \bar{\eta})$$

由（3·8）则有

$$\frac{\partial N_i(x,\ \tau)}{\partial \tau}=-\frac{\partial N_i^*(x,\ t-\tau)}{\partial \tau} \tag{3·11}$$

以上各式确定了两对偶元间形函数及导数的关系。

（3）基于对偶元分别处理泛函中各项

(i) 广义单刚的形成及组集

由
$$\{\varepsilon(\tau)\}^e=\frac{\partial u}{\partial x}(\tau)=\left[\frac{\partial N_1}{\partial x}\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\ \frac{\partial N_4}{\partial x}\right]\{\delta^e\}=[\widetilde{\mathbf{B}}(\tau)]\{\delta^e\}$$

$$\{\varepsilon(t-\tau)\}^{\bar{e}}=\frac{\partial u^{\bar{e}}}{\partial x}(t-\tau)=\left[\frac{\partial N_1^*}{\partial x}\ \frac{\partial N_2^*}{\partial x}\ \frac{\partial N_3^*}{\partial x}\ \frac{\partial N_4^*}{\partial x}\right]\{\delta^{\bar{e}}\}=[B^*(t-\tau)]\{\delta^{\bar{e}}\}$$

由（3·10）有

$$[\widetilde{\mathbf{B}}(\tau)]=[\widetilde{\mathbf{B}}^*(t-\tau)]$$

$$\phi^e=\frac{1}{2}\{\delta^e\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[\widetilde{\mathbf{B}}(\tau)]^T[A][\widetilde{\mathbf{B}}(\tau)]d\tau d\Omega\{\delta^{\bar{e}}\}$$

而
$$\begin{aligned}\phi^{\bar{e}}&=\frac{1}{2}\{\delta^{\bar{e}}\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[\widetilde{\mathbf{B}}^*(\tau)]^T[A][\widetilde{\mathbf{B}}(t-\tau)]d\tau d\Omega\{\delta^e\}\\&=\frac{1}{2}\{\delta^{\bar{e}}\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[\widetilde{\mathbf{B}}^*(t-\tau)]^T[A][\widetilde{\mathbf{B}}(\tau)]d\tau d\Omega\{\delta^e\}\\&=\frac{1}{2}\{\delta^e\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[\widetilde{\mathbf{B}}(\tau)]^T[A][\widetilde{\mathbf{B}}^*(t-\tau)]d\tau d\Omega\{\delta^{\bar{e}}\}\\&=\phi^e\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\phi^e+\phi^{\bar{e}}&=\{\delta^e\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[\widetilde{\mathbf{B}}]^T[A][\widetilde{\mathbf{B}}]d\tau d\Omega\{\delta^{\bar{e}}\}\\&=\{\delta^e\}^T[\bar{K}]^e\{\delta^{\bar{e}}\}\end{aligned} \tag{4·1}$$

式中$[\bar{K}]$称为广义单刚，它是对称的。令单元数 $m=2n$，则

$$\phi=2\sum_e^n\phi^e=\{\delta\}^T[\bar{K}]\{\bar{\delta}\} \tag{4·2}$$

式中，组集刚度阵 $[\bar{K}]=\sum_e^n[\bar{K}]^e$

$\{\delta\}$为 $0\leqslant\tau\leqslant\frac{t}{2}$ 区域内的结点变量，$\{\bar{\delta}\}$为对偶域变量。还应注意到整体结点必须按对偶编号才能组集。

(ii) 广义单元质量阵的形成及组集

$$\psi^e=-\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\int_{t^e}\rho\{\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau)\}^T\{\frac{\partial u}{\partial \tau}(t-\tau)\}d\tau d\Omega$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\int_{t^e}\{\delta^e\}^T\left[\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_2}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_3}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_4}{\partial\tau}\right]^T\rho$$

$$\times\left[\frac{\partial N_1^*}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_2^*}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_3^*}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_4^*}{\partial\tau}\right]\{\delta^{\bar{e}}\}d\tau d\Omega$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\int_{t^e}\{\delta^e\}^T[p(\tau)]^T\rho[p^*(t-\tau)]d\tau d\Omega\{\delta^{\bar{e}}\}$$

仿照与刚度阵相同的方法可证得 $\psi^{\bar{e}}=\psi^e$

又由（3·11），有$[p(\tau)]=-[p^*(t-\tau)]$，则

$$\psi^e+\psi^{\bar{e}}=\{\delta^e\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[p]^T\rho[p]d\tau d\Omega\{\delta^{\bar{e}}\}=\{\delta^e\}^T[\widetilde{M}]\{\delta^{\bar{e}}\} \tag{4·3}$$

于是 $$\psi=2\sum_e^n\psi^e=\{\delta\}^T[\widetilde{M}]\{\bar{\delta}\} \tag{4·4}$$

式中$[\widetilde{M}]$称为广义质量阵，它是对称、稀疏的。

(iii) 初值条件的影响

在泛函中 $\alpha=\int_\Omega(\rho\{\dot{u}_0\}^T+\frac{1}{2}c\{u_0\}^T)\{u(t)\}d\Omega$ 未包含时间卷积，参数 t 为一常数。

$$\begin{aligned}\alpha^{\bar{e}t}&=\{\delta^{\bar{e}t}\}^T\int_\Omega\tau[N_1^*\ O\ O\ N_4^*]^T(\rho\{\dot{u}_0^e\}+\frac{1}{2}c\{u_0^e\}d\Omega\\&=\{\delta^{\bar{e}t}\}^T\{V_t\}^{et}\end{aligned} \tag{4·5}$$

这里 $\bar{e}_t$ 代表 $\tau=t$ 边界上的单元，而$\{\dot{u}_0^e\}$和$\{u_0^e\}$代表 $\bar{e}_t$ 对偶元上的初始值。

于是 $$\alpha=\sum\alpha^{\bar{e}t}=\{\bar{\delta}_t\}^T\{V_t\} \tag{4·6}$$

式中$\{\bar{\delta}_t\}$为 $\tau=t$ 边界上的结点变量。

(iv) 广义体力的影响

$$\begin{aligned}\beta^e&=\int_{\Omega^e}\int_{t^e}\{\delta^{\bar{e}}\}^T[N_1^*\ N_2^*\ N_3^*\ N_4^*]^T\{f(\tau)\}^e d\tau d\Omega\\&=\{\delta^{\bar{e}}\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[N_1\ N_2\ N_3\ N_4]^T\{f(\tau)\}^e d\tau d\Omega\\&=\{\delta^{\bar{e}}\}^T\{F\}^e\end{aligned} \tag{4·7}$$

$$\begin{aligned}\beta^{\bar{e}}&=\{\delta^e\}^T\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[N_1\ N_2\ N_3\ N_4]^T\{f(t-\tau)^{\bar{e}}\}d\tau d\Omega\\&=\{\delta^e\}^T\{\bar{F}\}^{\bar{e}}\end{aligned} \tag{4·8}$$

所以 $$\beta=\sum_e^{2n}\beta^e=\begin{Bmatrix}\delta\\\bar{\delta}\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}\bar{F}\\F\end{Bmatrix} \tag{4·9}$$

(v) 边界力的影响

将 d 中的 $f(\tau)$换为$\bar{p}(\tau)$，Ω^e换为 $\partial\Omega^e$，F换为$\{H_\partial\}$，

则 $$\theta=\Sigma\theta^{e\partial}=\begin{Bmatrix}\delta_\partial\\\bar{\delta}_\partial\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}\bar{H}_\partial\\H_\partial\end{Bmatrix} \tag{4·10}$$

其中 e_∂ 为应力边界单元，$\begin{Bmatrix}\delta_\partial\\\bar{\delta}_\partial\end{Bmatrix}$为其边界上的结点。

(vi) 阻尼的影响

因阻尼的公式推导较繁，仅写出结果如下：

$$\lambda^e=\frac{1}{2}\{\delta^e\}[\tilde{c}^e]^T-[\tilde{c}^e]\{\delta^e\}$$

式中
$$[\tilde{c}]^e=\int_{\Omega^e}\int_{t^e}[p(\tau)]^T c[N(\tau)]d\tau d\Omega$$

所以
$$\lambda=\frac{1}{2}\{\delta\}^T([\tilde{c}]^T-[\tilde{c}])\{\bar{\delta}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\bar{\delta}\}^T([\tilde{c}]-[\tilde{c}]^T)\{\delta\} \tag{4·11}$$

由上面可知，每一表达式中，对偶区域的形函数及导数值都由基本区域的形函数及导数值所替换，因此，用一般的方法就能得到各系数阵。

（4）系统运动代数方程组的推导

Gurtin 变分原理指出，真实解使泛函Λ取驻立值，即

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\{\delta\}^T}=\{O\},\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial\{\bar{\delta}\}^T}=\{O\} \tag{5·1}$$

它是将区域分为以 $\tau=\frac{t}{2}$ 为界面的两个对偶子结构加以处理的。于是得

$$\left([\tilde{K}]-[\tilde{M}]+\frac{1}{2}[\tilde{c}]-\frac{1}{2}[\tilde{c}]^T\right)\{\bar{\delta}\}=\{\bar{F}\}+\{\bar{H}_\partial\} \tag{5·2}$$

$$\left([\tilde{K}]-[\tilde{M}]+\frac{1}{2}[\tilde{c}]^T-\frac{1}{2}[\tilde{c}]\right)\{\delta\}=\{V_t\}+\{F\}+\{H_\partial\} \tag{5·3}$$

这两个方程组并不是相互独立的，两组方程中的刚度和质量矩阵是完全相同且是对称稀疏的，而阻尼阵是反对称的。因此，在整体结点编号时，如果将对偶区域内的结点顺着前面的结点编号继续进行，则形成最后的整体编号，通过子结构的结点编号和整体结构编号的对应关系将两个子结构重新组集，就得到系统方程

$$([\tilde{K}]^*-[\tilde{M}]^*+[\tilde{c}]^*)\{\delta^*\}=\{V_t^*\}+\{F^*\}+\{H_\partial^*\} \tag{5·4}$$

式中以＊表示系统的整体矩阵和广义外力矢量。

2．引入边界条件和初始条件导出递推公式

由卷积的特点，二次泛函的形式并不象普通泛函那样为$\frac{1}{2}\{\delta\}^T[\cdot]\{\delta\}$，而是$\{\delta\}^T[\cdot]\cdot\{\bar{\delta}\}$的形式。因此，引入边界值和初始值就会导出完全不同的结果。

由（5·1）式可知，在$\{\delta\}^T[\cdot]\{\bar{\delta}\}$中若$\{\delta\}$中有一已知值，对$\{\delta\}$变分时则必然应在（5·2）中划去一行，而在对$\{\bar{\delta}\}$求变分时，必然应在（5·3）中划去一列，对应着（5·4）则应划去基本列和对偶行。同理，若$\{\bar{\delta}\}$中有一已知值，则在（5·4）中应划去基本行和对偶列。

由于已知边界位移不会随时间发生性质改变，即已知位移边不会随时间的改变而变为应力边，因此，边界条件对于时间也是对偶的。这样就可采用一般的有限元法中划去同行同列以及对偶行对偶列来引入边界条件。然而对初始条件的引入就不同了，因为$\tau=t_0$时，有已知值，而在$\tau=t$时，即在对偶点上并不是已知值，所以，必须按划去基本列和

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ t_n \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
A_0 & B_{01} & & & & \\
B_{10} & A_0+B & B_{01} & & & O \\
 & B_0 & \cdot & \cdot & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
O & & & \cdot & \cdot & B_1 \\
 & & & & B_{10} & A_0+B
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{6·1}$$

对偶行的办法进行。

下面以线性插值为例说明递推公式的推导。

设系统在每个时空单元的端部 τ 平面上有 m 个空间结点，边界条件引入后，则（5•4）中的系数阵为公式（6•1）的形。式引入初值条件，根据前面所述的法则，系数阵中应划去 t_0 对应的 m 列以及 t_1 对应的 m 行，于是我们得到一个拟下三角阵，由前 m 行就能求得 t_1 时刻的系统位移值。由第二个 m 行就能求得 t_2 时刻的位移，这就形成了递推公式。

设$\{u_0\}$为系统的初位移，$\{u_i\}$为 t_i 时刻的位移，则第一步，有

$$[B_{01}]\{u_1\}=-[A_0]\{u_0\}+\{V_t\}+\{F_1\}+\{H_{21}\} \tag{6•2}$$

第 i 步，有

$$[B_{01}]\{u_i\}=-[B_{01}A_0+B]\left\{\begin{matrix}u_{i-2}\\u_{i-1}\end{matrix}\right\}+\{F_i\}+\{H_{\partial i}\} \tag{6•3}$$

对于线性插值，由（3）中公式可计算出

$$[A_0]=\frac{\Delta t}{3}[K]-\frac{1}{\Delta t}[M] \tag{6•4a}$$

$$[B_{01}]=\frac{\Delta t}{6}[K]+\frac{1}{\Delta t}[M]+\frac{1}{2}[c] \tag{6•4b}$$

$$[B_{11}]=\frac{\Delta t}{6}[K]+\frac{1}{\Delta t}[M]-\frac{1}{2}[c] \tag{6•4c}$$

$$[B]=\frac{1}{3}\Delta t[K]-\frac{1}{\Delta t}[M] \tag{6•4d}$$

其中 Δt 为每个单元在时间坐标上的长度，$[K]$、$[M]$和$[C]$分别是一般有限元法中的刚度、质量和阻尼矩阵。显然，$[B_{01}]$是对称正定稀疏的。对于二次以上的插值，可以用类似的方法得到其递推公式。

3．特征值问题

由（6•2）还可导出系统的特征值问题。当系统的初速度为零，且无外力作用时，若初位移为某一振型，则系统将以该振型对应的周期振动。因此，$\tau=\frac{T}{4}$时系统必然经过静力平衡位置，即$\{u\}=\{O\}$，于是，在（6•2）中，若略去阻尼，令

$$\{V_t\}=\{O\},\ \{F_1\}=\{O\},\ \{H_{\partial 1}\}=\{O\},\ \{u_1\}=\{O\},\ \Delta t=\frac{T}{4} \tag{7•1}$$

则导出

$$\left([K]-\frac{48}{T^2}[M]\right)\{u_0\}=\{O\}$$

这就是典型的广义特征值问题。设 Gurtin 变分原理导出的特征值为 ω_G^2，瞬时最小势能原理导出的特征值为 $\omega^2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$，则

$$\omega_G^2=\frac{12}{\pi^2}\omega^2=1.2158\omega^2 \tag{7•2}$$

若采用二次插值，则有

$$\omega_G^2=\frac{7-4\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\cdot\frac{40}{\pi^2}\omega^2=1.0060\omega^2 \tag{7•3}$$

由此说明 Gurtin 变分原理也能导出特征值问题。

4．稳定性讨论

由于导出的是一个递推公式，因而必须讨论其稳定性，现考虑单自由度问题。

设 $$\ddot{x}+2\xi\omega\dot{x}+\omega^2x=0,\ \dot{x}_0=0$$

则 $$u_t=-\frac{\Delta t^2\omega^2-6\xi\Delta t\omega-6}{\Delta t^2\omega^2+6\xi\Delta t\omega+6}u_{t-2}-\frac{4\Delta t^2\omega^2-12}{\Delta t^2\omega^2+6\xi\Delta t\omega+6}u_{t-1}$$

由稳定理论可知，当 $\Delta t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2\pi}T$ 时才能保证稳定，所以，它是条件稳定的。对高次插值导出的递推公式也有类似的讨论。

三、由 θ 积分参数导出无条件稳定的递推公式

用上述有限元插值导出的递推公式，完全类似于在每一时间间隔 Δt 上取泛函的极值，但它得出的公式是条件稳定的。若不用有限元插值，采用其它方法在每个时间区间上直接取驻立值，可导出无条件稳定的递推公式。

将 Gurtin 变分原理按另一种形式写出，即先在空间上采用有限元离散，而在时间上暂时不离散，略去阻尼，且令外载荷为零，则泛函表示为

$$\Lambda=\frac{1}{2}\{u\}^T[K]*\{u\}+\frac{1}{2}\{\dot{u}\}^T[M]*\{\dot{u}\}-\{u\}^T[M]\{\dot{u}_0\} \tag{8·1}$$

单自由度时

$$\Lambda=\frac{1}{2}\omega^2u*u+\frac{1}{2}\dot{u}*\dot{u}-u_0u(t) \tag{8·2}$$

在 0 到 Δt 区间将 $u(\tau)$ 按任何一种形式插值，而积分（即卷积分）取为零到 $\theta\Delta t$，于是（8·2）具有下列形式

$$\Lambda=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^{\theta\Delta t}u(\tau)u(\theta\Delta t-\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\theta\Delta t}\dot{u}(\tau)\dot{u}(\theta\Delta t-\tau)d\tau-\dot{u}_0u(\theta\Delta t) \tag{8·3}$$

若在下一次计算时，取 Δt 时的值为作初值条件，再往下计算，并通过选择适当的 θ 值就能达到无条件稳定的递推公式。由于 θ 的出现，产生出某种算法阻尼，滤掉了系统的高频振动。若取 $\theta=1$，则递推公式类似于（6·4）式的形式。

下面以线性插值为例加以说明。

取 $$u=u_t+\frac{\tau}{\Delta t}(u_{t+\Delta t}-u_t) \tag{8·4}$$

代入（8·3）取变分，这时的积分限为 t 到 $t+\theta\Delta t$，经过整理最后导出

$$\begin{Bmatrix}\Delta t\dot{u}_{t+\Delta t}\\ u_{t+\Delta t}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{6}{\theta^2\Delta t^2\omega^2+6} & -\dfrac{3\Delta t\omega^2\theta^2}{\theta^2\Delta t^2\omega^2+6}\\ \dfrac{6}{\theta^2\Delta t^2\omega^2+6} & -\dfrac{3\theta\Delta t^2\omega^2-\theta^2\Delta t^2\omega^2-6}{\theta^2\Delta t^2\omega^2+6}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta t\dot{u}_t\\ u_t\end{Bmatrix} \tag{8·5}$$

当 $\theta\geqslant\frac{3}{2}=1.5$ 时，就能满足稳定性要求。因此取 $\theta=1.5$ 就可得到无条件稳定的递推公式。

对于二次插值的两种形式，我们也求出其相应的 θ 参数，分别为 $\theta=1.25$ 和 $\theta=3.4$。

其它的高阶形式也可求出对应的θ参数。

一旦选定了参数，由（8·1）再加上阻尼项和外载项就能导出类似于（6·2），（6·3），（8·5）的动力响应递推公式。具体的公式形式，由于篇幅有限，不能一一列出。

由上面的讨论可知，采用θ积分参数的选择，能够由 Gurtin 变分原理导出无条件稳定的递推公式。因此，它具有一定的实用价值。

四、结 束 语

由 Gurtin 变分原理的数值离散，经过对偶有限元的处理，可以导出动力问题的递推公式。由卷积性质可知，由此导出的也只能是递推公式。这是 Gurtin 变分原理数值离散的最大特点。但如果不采用其它方法，由它导出的递推公式必然是条件稳定的。这正如直接积分导出的递推公式一样。当采用适当的方法处理后，就可得到无条件稳定的格式，正如上一节所阐明的那样。当然用θ参数并不是唯一的处理方法，显然，改进的方法可以是各种各样的。

总之，Gurtin 变分原理是解决结构动力响应问题的变分法。采用各种数值离散处理方法可导出各种递推公式。

参 考 文 献

〔1〕Gurtin, M. E., The Linear Theory of Elastodynamics, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1, 16 (1964), 34.

〔2〕胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社（1981），419—421.

〔3〕Ulrich Holzlöhner, A Finite Element Analysis for Time-dependent Problems, *Int. J. Num. Meth. in Engr.*, 8 (1974), 55.

〔4〕Mustafa M. Aral and Ülgen Gülcat, A Finite Element Laplace Transform Solution Technique for the Wave Equation, *Int. J. Num. Meth. in Engr.*, 11 (1977), 1719.

〔5〕Narayanan, G. V., Beskos D. E., Numerical Operational Methods for Time-dependent Linear Problems, *Int. J. Num. Meth. in Engr.*, 12 (1982).

Two Methods of Solving Dynamic Response by Discreting of Gurtin Variational Principle

Zhang Ruqing Tong Ming

(Chongqing University)

Abstract

Based on Gurtin variational principle and the finite element method two

methods of step-by-step solution of linear structural dynamic response are derived in this paper.

One of them is that, using "dual time finite element" to discrete Gurtin variational principle which corresponds to linear elastodynamics and in which convolutions are involved , and making use of the characteristic of convolution, a step-by-step solution of structural dynamic response is obtained.

The "dual time finite elements" exist in pairs. The pairs are arranged symmetrically with respect to middle plane $\frac{t}{2}$ in the space and time domain. And the local corrodinates and the local order of nodes in dual elements are arranged by dual rules. In this way the functional involving convolutions are become what only consists of definite integral. This makes it easy to get numerical coefficient matrices of the functional.

According to Gurtin variational principle, Gurtin functional must be stationary for the solution of dynamic mixed problem. After the variation of the functional which has been discreted by the dual finite elements, a set of linear algebraic equations can be derived. In further discussion of the boundary conditions and the initial conditions, it is found that step-by-step formulas can be got at the same time when introducing initial displacement conditions.

It is of interest for us to notice that the step-by-step formulas result from the variation of Gurtin functional. And this is a considerable difference from the step-by-sted formula derived from direct integration method.

Eigenproblemes can also be derived from the step-by-step formulas of Gurtin variational principle. It implies that it is possible to get both the solution of dynamic response and that of eigenproblemes from Gurtin variational principle.

In the analysis of the stability of the step-by-step formulas, it is noticed that the scheme is only conditionally stable.

If we want to get further an unconditionally stable scheme, another method should be taken. This is the second method mentioned above.

By discreting the variational principle in each time step and taking an appropriate integration parameter θ, i. e, discreting the variational principle in the space first, and then interpolating nodal displacements in any form as we like in time interval, an unconditionally slable step-by-step solution is obtained.