

受迫自激振子的周期、拟周期和混沌运动

凌复华

(上海交通大学工程力学系)

提要 本文对 van der Pol 振子和滞后振子的定常运动进行了数值研究, 说明了受迫自激振子的周期、拟周期和混沌运动的一些特征。

一、研究内容和方法

对于受迫自激振子的传统研究课题是“同步”, 或称为 1:1 锁相, 即自激振子在不太大的外加周期作用力下按外力的频率而振动的现象。这种现象在机械系统和电系统中都十分重要, 有着广泛的应用。此外, 尚有较复杂的 $p:q$ 锁相, 这时系统振动频率与外加频率之比为有理数 p/q , 参见 [10] 及其中所引的文献。

近年来, 非线性动力学系统中混沌性态的发展这一问题引起了广泛的兴趣, 文献十分浩繁, 但关于自激振子中锁相与混沌性态之间的关系却尚少研究工作。除了对 van der Pol 方程的早期研究 [6] 以外, 新近只见到对一个电系统的研究。这两篇文献中都构造了一个非线性代数映射来模拟较复杂的微分方程。本文拟采用数值分析技巧 (Poincaré 映射、功率谱分析等) 对一个电系统 (vander pol 方程) 和一个机械系统 (有滞后特性的振子) 的描述方程直接进行研究, 从而得到关于这类振动系统中可能具有的定常运动状态的比较直接的知识。本文是在我们已做工作 [1-4] 基础上发展而写成的。

非线性动力学系统的定常运动状态可以是周期性的、拟周期性的和混沌的。其中周期运动是传统非线性振动理论研究的主要内容, 拟周期运动实际上是非周期运动, 例如由至少两个频率互不通约的简谐运动迭加而成, 在相图上表现为一根稠密轨道, 也称为概周期运动或各态历经运动。对它的研究也已有很长的历史, 近年来由于它与混沌运动之间的密切关系, 更受到充分的注意。对于混沌运动尚无明确的定义, 事实上, 人们往往把除这前两种运动以外的定常运动状态都称之为混沌运动。

对运动状态作数值研究, 目前实际上只限于单自由度系统, 或即三维自治系统。所用的数学技巧最主要的是作 Poincaré 断面和功率谱分析方法。各种运动状态的特征见表 1。

由表 1, 表面上似乎很容易区分这几种运动状态, 事实上并非如此, 原因在于:

1. 周期运动的周期可能很长, 因此, Poincaré 点集很可能是由很多个点组成的, 从而难于与一无限点集区分开来。

2. 拟周期运动中包含的互不通约频率可能有很多个, 于是功率谱由离散谱线构成但可能相当密集, 因而也难于与混沌运动的连续谱线相区分。

作功率谱分析, 实际上就是对一个样本过程作 Fourier 展开, 求出它的各阶谐波的频

表1 各种运动状态的特征

特点 \ 运动状态	周期运动	拟周期运动	混沌运动
研究方法			
时间 T Poincaré 断面 (T 为强迫力周期)	有限点	闭曲线上稠密的无限点	无限长曲线上稠密的无限点
功率谱	离散谱	离散谱	连续谱

率与振幅的关系。如果过程是周期性的,那么取一个周期内的过程为样本过程就可以代表全过程。如果在一个随机过程中也能取出代表全过程数字特征的一个样本过程,那就称这个随机过程为各态历过程。这样看来,上面对拟周期和混沌运动的功率谱分析,其实蕴含着认为它们是各态历过程的假设,这当然并不符合实际情况,只有当样本过程取得足够长时,产生的误差才足够小。把样本过程 Fourier 的级数写为

$$x_T(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{N/2} c_m e^{-i \frac{2\pi}{T} t} \right] \quad (1)$$

则可用离散 Fourier 变换求得诸(复)系数为:

$$c_m = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_T \left(\frac{2\pi k}{N} \right) e^{-i \frac{2\pi k m}{N}} \quad (2)$$

如上所述,样本过程延续的时间越长,求得的诸系数 c_m 就越能反映全过程的数字特征,这时的分辨率也越高,即谱线之间的间隔越小,但频谱的总宽度 $2\pi N/T$ 也越小。注意实际可用的只是 $\pi N/T$, 因为由(2)式容易看出

$$c_m = c_{N-m} \quad (3)$$

但事实上高阶谐波项应趋于零,而应有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = 0 \quad (4)$$

这样看来,点数 N 越多越好,时间 T 越长越好。但 T 的增加意味着计算时间的增加, N 的增加除要增加计算时间外,还要增加存储量。但这二者都受到计算机条件和计算费用的限制, N 和 T 究竟取多大才合适,需视具体问题而定。

二、van der Pol 振子及其受迫运动

这个熟知的方程最早是由真空三极管电路模化得到的。当存在一个外加激励力时,它的形式为

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = F \cos \Omega t \quad (5)$$

早就用谐波平衡法对它的同步问题进行了研究,所得共振曲线 ($\mu=1$) 见图 1^[8]。用打靶型直接数值方法可以精确地求出共振曲线,所得到的结果 ($\mu=1$) 如图 2^[7], 其精度是 10^{-6} , 可以看出,二图的形状基本一样,但在很多区域内,用直接数值方法未求出同步解。另外,当 Ω 较大时,也不存在稳定的同步解。在以上这些情况下,系统的定常运动状态究竟是什么样的呢?这正是本文要探讨的问题。

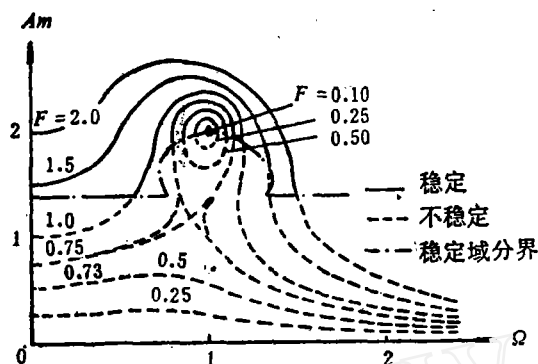


图1 受迫 van der Pol 方程共振曲线(谐波平衡法, $\mu=1$)

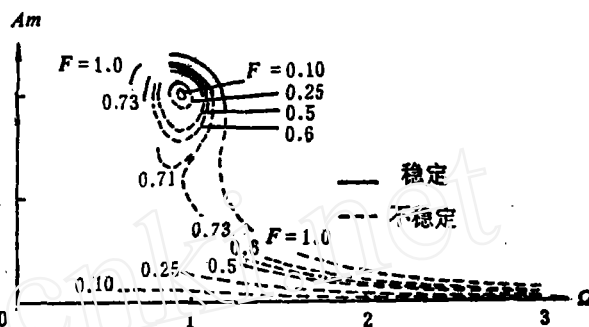


图2 受迫 van der Pol 方程共振曲线(直接数值方法, $\mu=1$)

取 $F=1.0$ 和 10.0 , 用直接数值积分方法求出 Ω - μ 参数平面中一些点处的定常运动情况如表 2。

表 2 受迫 van der Pol 方程的定常运动

$F \backslash \mu$	1.0											10.0
	0.01	0.05	0.1	0.5	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	10.0	30.0	10.0
0.1	同	同										
0.5	同	同	同									
1.0	同	同	同	同	同	同						
5.0	次	次				△	△					
10.0	次	次		拟	△	△	△	△	*	*	*	*

注: 同——同步, 次——次谐波, 拟——拟周期, △, * —— 见正文中说明

得出表 2 时对周期性的判别采取了较低的精度 (10^{-2}), 因而当频率较低时也得出图 2 中没有的周期解。严格说来, 这些是拟周期解, 但周期的变化极小, 在实际应用中, 是难以与周期解相区分的。当 Ω 较大和 μ 稍大时出现拟周期运动, 其 Poincaré 点集分布在一条闭曲线上, 典型地如图 3 所示 ($F=1, \Omega=10, \mu=0.5$)。

当 μ 更大时, 定常运动呈现图 4 所示的 Poincaré 点集 ($F=1, \Omega=10, \mu=1.5$), 这个点集分布在一条闭曲线上, 但各点之间存在相当大的间隙, 当点数增加时, 各点有外移的趋势而不是填满这条曲线。曾怀疑这是因计算精度不高而造成的, 但改善精度后仍出现相同的图形。这类运动看来接近于拟周期的, 但需进一步验证。同类的运动在表 2 中以 Δ 标记。

μ 继续增大, 出现图 5 所示的图形 ($F=1, \Omega=10, \mu=10$), Poincaré 点集密集在靠近 x 轴处, 但在这个区域之外仍有少量的点。这一情况当 F 加大时更加明显, 参见图 6 ($F=10, \Omega=10, \mu=10$)。同类的运动在表 2 中以 * 标记。这种运动较多地具有混沌运动

的特征, Poincaré 点集分布在有限区域内的非封闭曲线上, 并呈现出某种结构 (有点象眉毛), 但仍有少量的点在“眉毛”之外。限于条件, 我们计算的点还较少 (1000 点), 需计算一个大得多的 Poincaré 点集才能得出比较肯定的结论。

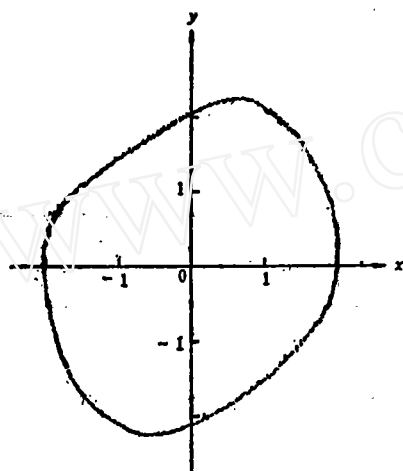


图3 受迫 van der Pol 方程拟周期解的 Poincaré 点集 ($F=1, \Omega=10, \mu=0.5$)

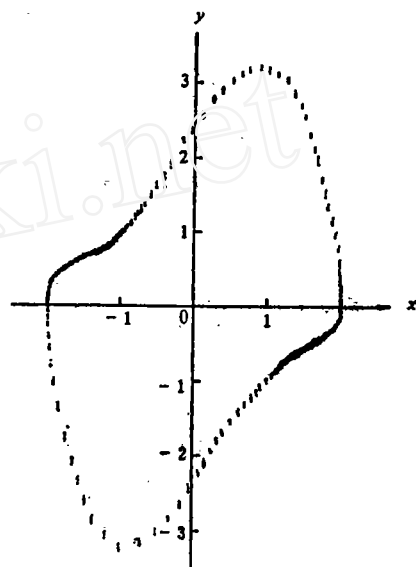


图4 受迫 van der Pol 振子定常运动 Poincaré 点集 ($F=1, \Omega=10, \mu=1.5$)

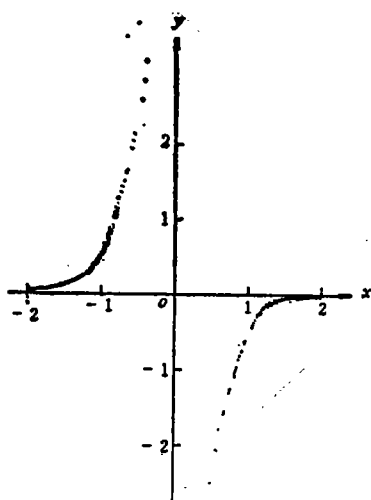


图5 受迫 van der Pol 振子定常运动 Poincaré 点集 ($F=1, \Omega=10, \mu=10$)

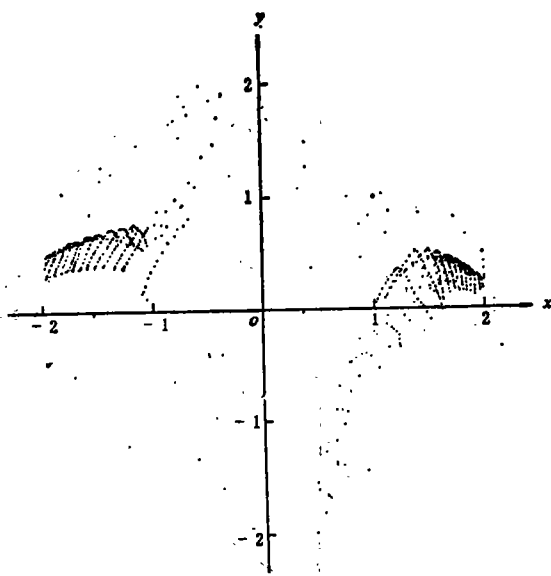


图6 受迫 van der Pol 振子定常运动 Poincaré 点集 ($F=0, \Omega=10, \mu=10$)

三、有滞后特性自激振子的受迫振动

滞后特性在许多物理系统中出现, 其中大部分是消耗能量的 (如材料阻尼, 磁滞回线

等)。这里述及的是补充能量机制,图7示出恢复力的滞后特性,注意回线的走向恰与耗散情况相反。当系统中还存在某种阻尼时,这类振子一般会达到一种自激振动状态,其物理模型为例如滑块在由行程开关控制的磁场中的运动。相应的运动方程是,

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon = 0$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & x \geq a \cap (-a < x < a \cup \dot{x} \leq 0) \\ -1 & x \leq -a \cap (-a < x < a \cup \dot{x} \geq 0) \end{cases} \quad (6)$$

上式已经过无量纲化而只有转变位置 α 这一个参数。

〔6〕中对(6)用摄动法进行了研究,〔2〕中给出了极限环诸参数的精确解为

自振周期 T 满足:

$$\alpha = \frac{T}{4} - \text{th} \frac{T}{4}$$

从而自振频率 ω 满足:

$$\alpha = \frac{\omega}{2\pi} - \text{th} \frac{\pi}{2\omega} \quad (7)$$

最大速度 $\dot{x}_0$ 为:

$$\dot{x}_0 = \frac{T}{4} - \alpha$$

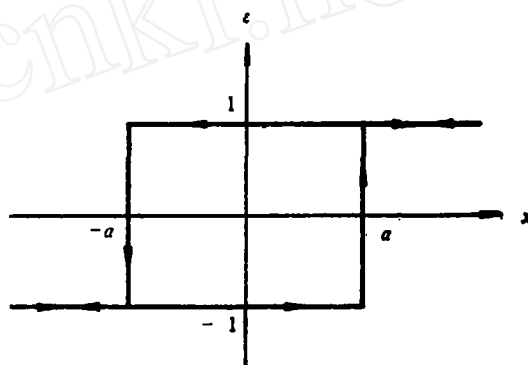


图7 滞后特性

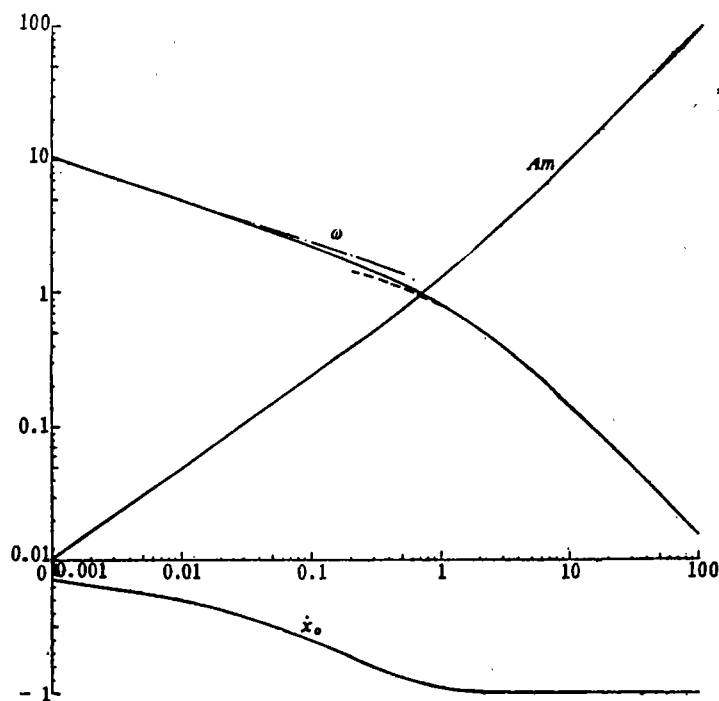


图8 滞后振子的自激振动参数

——按(7)式, --- 按(8a)式, -·- 按(8b)式

振幅 A_m 为:

$$A_m = \ln \operatorname{ch} \frac{T}{4}$$

又可由上式导出 ω 的近似公式

$$\omega \approx \frac{\pi}{\alpha(\alpha+1)}, \quad \alpha \text{ 较大} \quad (8a)$$

$$\omega \approx \frac{\pi}{2\sqrt[3]{3\alpha}}, \quad \alpha \text{ 较小} \quad (8b)$$

图 8 中给出了, ω , $\dot{x}_0$, A_m 与 α 的关系。图 9 示出了 $\alpha=0.5$ 时的极限环。

[9] 中对该振子受到外激励时

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon = F \cos \Omega t \quad (9)$$

出现的周期解进行了详细的数值研究。所得到的共振曲线的典型例子示如图 10。可以看出, 激励力较小时, 在 Ω 值的很大范围内不存在同步解。在这些区域中振子的可能定常运动状态究竟如何, 自然是一个饶有兴味的问题。

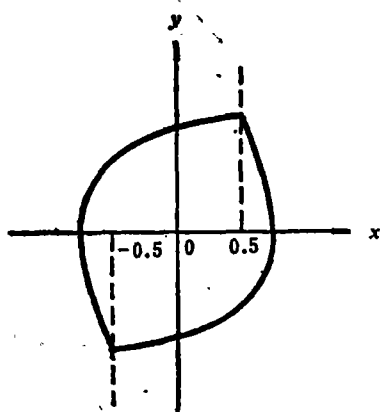


图 9 滞后振子的极限环 ($\alpha=0.5$)

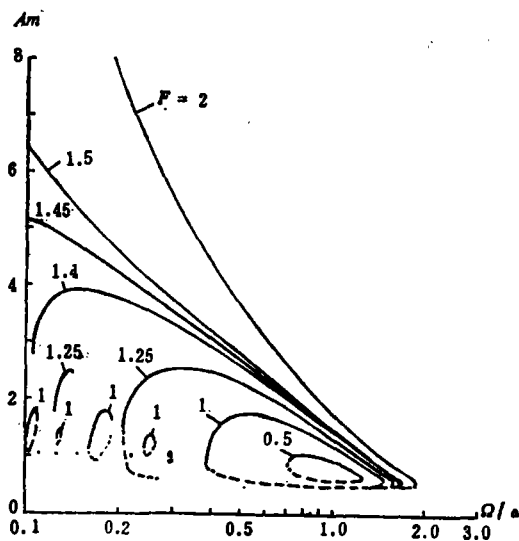


图 10 滞后振子的共振曲线 ($\alpha=0.5$, 自振频率 $\omega=1.137$)

方程 (a) 解可以分段解析表示, 这使对这个振子的数值研究比较方便, 主要的计算工作量在于确定解的分段转折处的位置。强迫振动的相轨线是在三维相空间 (x, y, t) 中描绘的, 这里 $y=\dot{x}$ 。容易想到, 相轨线会多次通过 $x=\alpha(y>0)$ 和 $x=-\alpha(y<0)$ 这些转折处。引入无量纲时间 $z=t/T$, $T=2\pi/\Omega$, 设从 (α, y_t, z_t) 处出发的相轨线经过 $(-\alpha, y_t', z_t')$ 到达 $(\alpha, y_{t+1}, z_{t+1})$ 。又记 $G=F/(1+\Omega^2)$, 则容易求出:

$$y_{t+1} = G \cos(2\pi z_{t+1}) + G \Omega \sin(2\pi z_{t+1}) - [G \cos(2\pi z_t') + G \Omega \sin(2\pi z_t') + 1 - y_t'] \exp\left[-\frac{2\pi}{\Omega}(z_t' - z_{t+1})\right] + 1 \quad (10)$$

$$y_t' = G \cos(2\pi z_t') - G \Omega \sin(2\pi z_t') - [G \cos(2\pi z_t) + G \Omega \sin(2\pi z_t) - 1 - y_t] \exp\left[\frac{2\pi}{\Omega}(z_t - z_t')\right] - 1 \quad (11)$$

其中出现的转折时刻 z'_i, z_{i+1} 由 (12), (13) 式确定 (注意 z_i 是已知的)

$$\frac{G}{\Omega} \sin(2\pi z_i) - G \cos(2\pi z'_i) - \frac{2\pi}{\Omega} (z_i - z'_i) + G \cos(2\pi z_i) - \frac{G}{\Omega} \sin(2\pi z_i) - 1 - y_i - \alpha + [G \cos(2\pi z_i) + G \Omega \sin(2\pi z_i) - 1 - y_i] \exp \left[\frac{2\pi}{\Omega} (z_i - z'_i) \right] = 0 \quad (12)$$

$$\frac{G}{\Omega} \sin(2\pi z_{i+1}) - G \cos(2\pi z'_{i+1}) - \frac{2\pi}{\Omega} (z'_i - z_{i+1}) + G \cos(2\pi z'_i) - \frac{G}{\Omega} \sin(2\pi z'_i) + 1 - y'_i + \alpha + [G \cos(2\pi z'_i) + G \Omega \sin(2\pi z'_i) + 1 - y'_i] \exp \left[\frac{2\pi}{\Omega} (z'_i - z_{i+1}) \right] = 0 \quad (13)$$

值得注意的是, (10)---(13) 式在变换

$$z_i \longrightarrow z_i + 1, z'_i \longrightarrow z'_i + 1, z_{i+1} \longrightarrow z_{i+1} + 1 \quad (14)$$

下是不变的, 这是 (9) 式的时间周期性的直接后果。因此可以在相空间 $R^2 \times S^1$ 中观察这个振子的运动, 这里我们对 $\alpha=0.5$ 的情况分别观察了 R^2 断面和 $R \times S$ 断面上的 Poincaré 点集。

由对于 R^2 断面上 Poincaré 点集的观察, 可以在参数平面 $F-\Omega$ 中画出各种定常运动的分布区域如图 11。其中中部的一个大的同步区域中, 系统的运动是完全确定的, 这个区域的界线交横轴于 $\Omega \approx 1.14$ 处, 这正是自激振动的频率, 在非周期运动的区域中, 情况相当复杂, 一是还存在许多个周期运动的“小岛”, 例如图 11 中 $a-e$ 点在“周期一”小岛中, f 点在“周期十一”小岛中。只是由于我们的计算点数有限, 未能把这类“小岛”一一发现。图 12 中给出了一条周期运动的相轨线 ($F=0.5, \Omega=0.092, \alpha=0.5$)。小岛以外的区域自然是拟周期解或混沌解。图 13 是一个典型的拟周期解 Poincaré 点集及其功率谱 ($F=0.5, \Omega=2.5, \alpha=0.5$)。参数平面上尚有许多点, 其对应方程的 Poincaré 点集明显地位于一封闭曲线上, 但功率谱上有较多的峰值。鉴于前面所述的理由, 对应的运动看来还是拟周期运动。在另一些点上, 主要是在图 11 的左部中段 Poincaré 点集分布在非封闭曲线上, 如图 14 ($F=1.0, \Omega=0.15, \alpha=0.5$) 和图 15 ($F=1.25, \Omega=0.225, \alpha=0.5$), 但尚未呈现明显

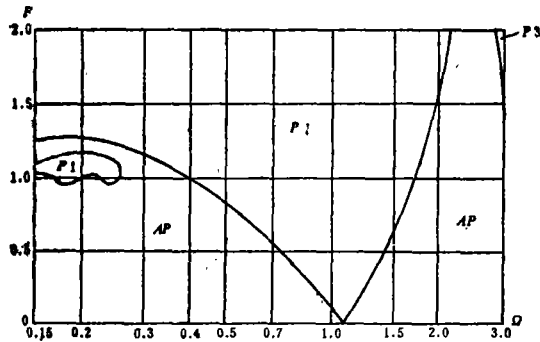


图 11 滞后振子定常运动分布 ($\alpha=0.5$)
P1——周期一, 同步, P3——周期三, AP——非周期

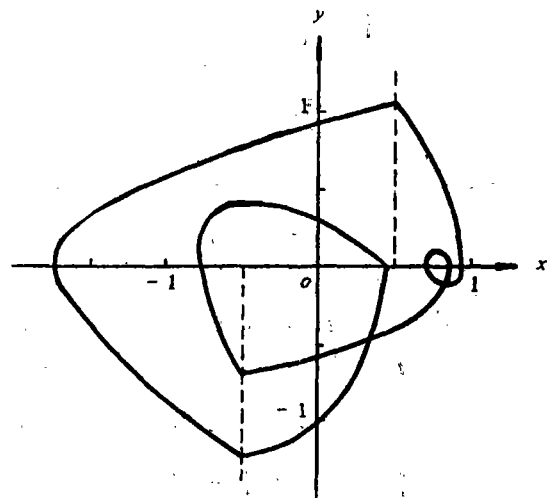


图 12 滞后振子周期运动相轨线
($F=0.5, \Omega=0.092, \alpha=0.5$)

的结构, 看来需计算更多的点才能确定对应的是否混沌运动。

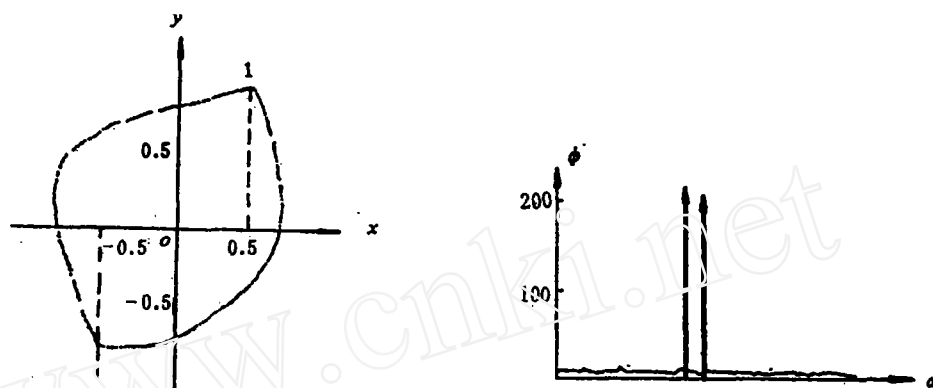


图 13 滞后振子拟周期运动 ($F=0.5$, $\Omega=2.5$, $\alpha=0.5$)

(a) R^2 断面 Poincaré 点集 (b) 功率谱

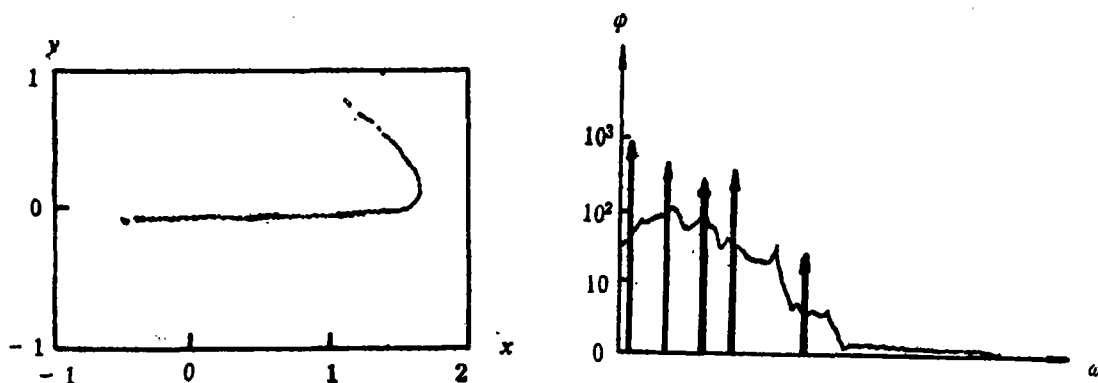


图 14 滞后振子非周期运动 ($F=1.0$, $\Omega=0.15$, $\alpha=0.5$)

(a) R^2 断面 Poincaré 点集 (b) 功率谱

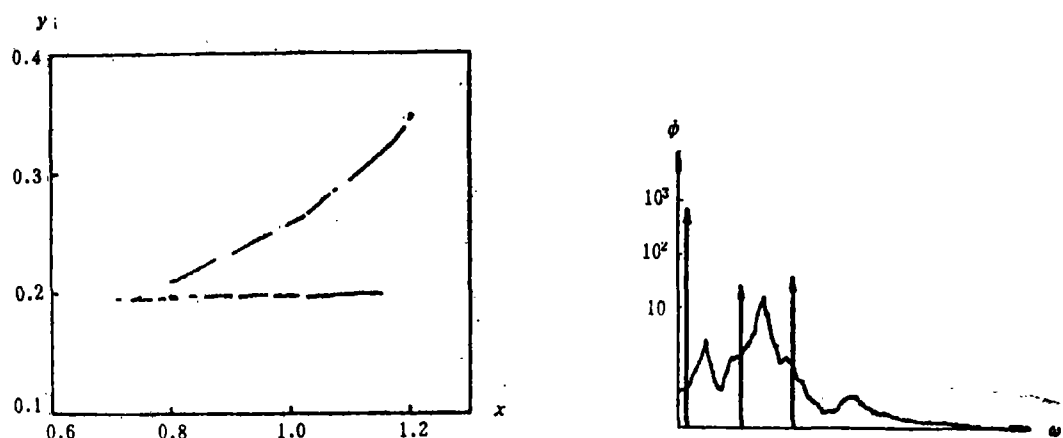
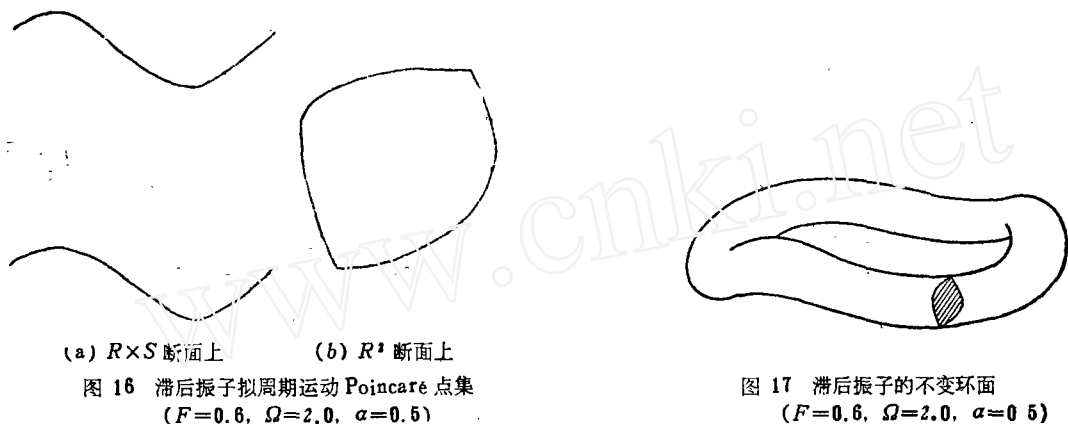


图 15 滞后振子非周期运动 ($F=1.25$, $\Omega=0.225$, $\alpha=0.5$)

(a) R^2 断面 Poincaré 点集 (b) 功率谱

对 $R \times S$ 断面 (柱面) 上 Poincaré 点集的观察使我们能得到关于在相空间中轨线分布的较全面知识。图 16(a) 示出这样的点集, 其中已把相柱面展开成平面, 图的上部是

$x=\alpha, y>0$, 下部是 $x=-\alpha, y<0$ 。图 16(b) 是 R^2 断面上的 Poincaré 点集。综合二者, 可以看出滞后振子拟周期解稠密轨道所在不变环面如图 17, 这个环面有点象受到撞击而变形的轮胎。



最后我们考虑左转折界限 $x=-\alpha$ 自身也振动的情况, 即转折处的坐标满足

$$x(t'_i) = -\alpha + \beta \cos \omega t \quad (15)$$

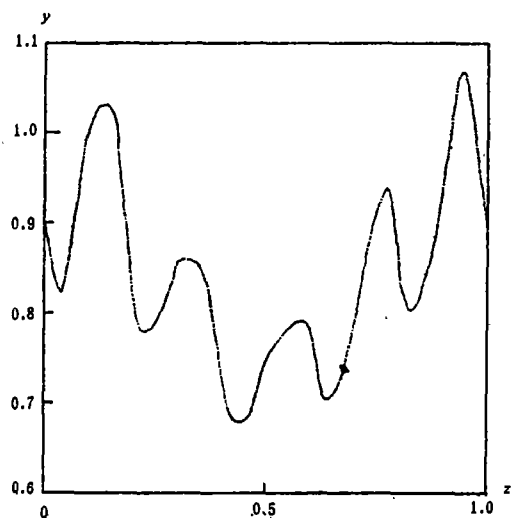


图 18 相柱面 $R \times S$ 上滞后振子的 Poincaré 点集
($F=0.2, \Omega=0.1, \omega=0.5, \alpha=0.5, \beta=0.5$)

的情况。这时确定 z_{i+1} 的 (13) 式左端需增加一项 $-b \cos\left(2\pi \frac{\omega}{\Omega} z_{i+1}\right)$, 一般说来, 变化后的 (13) 式不再对变换 (14) 不变。但当 $\omega/\Omega = n$ (正整数) 时仍有不变性, 而当 $\omega/\Omega = 1/n$ 时, 把 (14) 中的 1 换为 n 后, 变化后的 (13) 式仍有不变性。对相柱面上 Poincaré 点集的讨论也只有在这些情况下才有明确的意义。这时得到的多数仍是拟周期运动, 但不变环面有较多的波纹, 图 18 给出了 $\omega/\Omega=5$ 时相柱面上的一个 Poincaré 点集。

四、面积收缩率

这两种受迫自激振子都有一个明显的特点：Poincaré 点向不变集的收敛速度极快，除了少数开始的点，所有的点都落在不变集上。这显然是因为解映射有较大的面积收缩率。事实上，每一点都以隐函数方式（经过方程）决定了下一点，而可以写成

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= f_2(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (16)$$

面积收缩率定义为

$$k_n = \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y_n} - \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \quad (17)$$

取 $x_0 = y_0 = 1.0$ ，用差分格式算出 van der Pol 方程的面积收缩率如表 3，可以看出当阻尼稍大时面积收缩率就很大，对滞后振子也有类似情况。

表 3 van der Pol 方程解的面积收缩率 ($\omega = 10$)

F	10.0					1.0
μ	0.5	1.5	2.5	4.0	10.0	10.0
$\frac{10}{11}k_n$ $n=1$	0.3127	0.2303×10^{-2}	0.2016×10^{-5}	0.4093×10^{-13}	0.4089×10^{-34}	0.8535×10^{-28}

五、结 束 语

1. 受迫自激振子的定常运动状态以拟周期运动为主。
2. 对 van der Pol 振子和滞后振子，都发现具有混沌运动特征的定常运动 Poincaré 点集，对之应作进一步的研究。
3. 受迫自激振子的不变集有很强的吸引性，阻尼较大时尤其如此。

× × × ×

本研究工作得到教育部“非线性振动数值研究”课题基金的支持，参加者还有赵世鹰、魏焕民、黄怡、黄季楠等同志。

参 考 文 献

- [1] 黄季楠，强迫 van der Pol 方程的数值研究，学士论文，上海交通大学（1984）。
- [2] 凌复华，用直接数值方法分析滞后特性引起的自激振动，振动与冲击，2（1984），15—26。
- [3] 凌复华，黄怡，滞后系统中混沌性态，投寄“固体力学学报”。
- [4] 凌复华，魏焕民，强迫 van der Pol 方程混沌运动的数值研究，第三次全国非线性振动学术交流会宣读，载于“非线性振动论文选”，上海交通大学（1983）。
- [5] Cartwright, M. L. and Littlewood, J. E., On nonlinear differential equations of the second order, *J. London Math. Soc.*, 20（1945），180—189。
- [6] Eppler, R., Schwingungen, vorlesungs manuskript, Uni. Stuttgart (1978)。

- [7] Ling, F. H., Numerische Berechnung periodischer Lösungen einiger nichtlinearer Schwingungssysteme, Dissertation, Uni. Stuttgart (1981).
- [8] Magnus, K., Schwingungen, Teubner, Stuttgart (1980).
- [9] Mayer, J., Selbsterregter Schwinger mit Hysterese-Relais als Rückstellung unter harmonischer Zwangserregung, Diplomarbeit, Inst. A für Mech., Uni. Stuttgart (1981).
- [10] Nafeh, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear Oscillations, Wiley-Interscience, New York (1979).
- [11] Tang, Y. S., Mees, A. I. and Chua, L. O., Synchronization and Chaos, *IEEE Trans. CAS-30*, 9 (1983), 620-626.

Periodic, Almost Periodic and Chaotic Motions of Forced Self-sustained Oscillators

Ling Fuhua

(Dept. Engng. Mech. Shanghai Jiao Tong University)

Abstract

The steady motion of a nonlinear oscillator takes three forms; Periodic, almost periodic and chaotic. These forms are particularly to be expected for a self-sustained oscillator under external excitations. When it is synchronized, the relevant motions are periodic (basic harmonic), when not, apart from periodic (subharmonic), there are also almost periodic and chaotic motions. However, as our knowledge goes, the last two cases are still not intensively studied.

Two forced self-sustained oscillators are chosen as the objects of our study. One is the well-known van der Pol's oscillator,

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = p\cos\Omega t$$

and the other is that with hysteresis, whose equation of motion is as follows,

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = p\cos\Omega t$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & x \geq \alpha \cap (|x| < a \cap \dot{x} \leq 0) \\ -1, & x < -\alpha \cap (|x| < a \cup \dot{x} > 0) \end{cases}$$

Periodic motions of these two oscillators were studied by the so-called direct numerical method. In this paper, the steady motions of them are studied with standard numerical procedures (direct numerical integration, Fourier analysis etc.). The distribution of different forms of steady motions in the parameter plane is calculated and pictured, typical patterns of the Poincaré set and power spectrum are plotted, and for the oscillator with hysteresis, the form of an invariant torus is also shown.

The main results of this work are as follows:

1. The steady motion of the forced self-sustained oscillator is mainly almost periodic.

2. For the van der Pol's oscillator and the oscillator with hysteresis, some Poincaré sets having the feature of a chaotic motion are found, which deserve further studies.

3. The invariant sets of forced self-sustained oscillators are strong attractive, especially by a large damping.