# 线载荷积分方程法分析嵌在非均匀半空间的轴向受力桩

云 天 铨

（华中工学院）

**提要** 本文用线载荷积分方程法分析嵌在泊桑比 $\nu$ 为常数、剪切模量 $G$ 沿深度 $Z$ 线性地变化的、各向同性的弹性半空间中的轴向受压刚性和可压缩桩。这些桩的分析问题归结为一 Fredholm 第一种积分方程并用数值法求解。本法创新或其优点主要是：1．根据“组合定理”和圣维南原理用于非均匀介质的一个假设。本文给出一个适于非均匀半空间的具有简单且封闭的型式的点力公式。2．由桩顶以下的 $G(z)$ 的累计影响可以用封闭型式来计及。3．不用 $E$ 的等效值或者修正系数，免去确定这些值的争论。

线载荷积分方程法较之其它的积分方程法的主要优点是所得到的积分方程是一维，非奇异的。还有，当用于可压缩桩时，无需用迭代策略求解。

本文的数值结果和他人的作了比较。

## 一、概　　述

由于非均匀的弹性半空间的模型更接近于许多土壤的实测情形[1]，因此近来受到更多的注意[6-9]。因为至今还未在发表的文献中找到适用于非均匀弹性半空间的点力解[7]，因此限制了有效的积分方程方法的应用。于是，人们提出许多近似的分析方法。其中好些方法[6-9]有如下不足之处：

1．桩尖以下至无穷远的 $G(z)$ 的累计影响无法考虑。例如在文献〔6，8〕中，桩尖以下的土壤当作是均匀的土壤来处理。

2．在这些分析中需要弹性系数 $E$ 的等效值或者修正系数，而这些值的确定有许多争议。例如在〔8〕中，简单地把适于均匀半空间的 Mindlin 点力解中的 $E$ 换成某个等效的 $E$ 便应用于非均匀的半空间情形。这等效 $E$ 的选择就有很多种，如〔8〕中的（2）式。同样，采用修正系数方法，修正系数也有许多争议（文献〔6〕中的 1472 页）。

3．对建议用于非均匀半空间的点力公式或者过于简单，或者过于复杂。例如：在〔9〕中，只是简单地将 $G(z)$ 代替 Mindlin 公式中的 $G$，因而其他点的 $G$ 的影响未能计及。又如在〔7〕中，建议的公式不仅基于一个很复杂的，表示为 Bessel 函数和指数函



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数为项的无穷积分（部分还不能精确地积出）的基本解，而且未能明显列出，而是包含在一个未公开的程序中，人们自然无法去应用它。

本文企图克服上述缺点。在第二节中，给出一个“组合定理”，根据此定理以及圣维南原理用于非均匀介质的一个假设，并利用倒易定理，就可以得到一个具有封闭形式的适于非均匀半空间的点力公式。这个公式不是精确的点力解。因此应用它于积分方程方法所作的分析只是一种近似分析。在第三、第四节中分别导出刚性桩和可压缩桩的积分方程。最后一节对嵌在均匀的和 Gibson 土壤的半空间中的单根刚性桩和可压缩桩作数值计算，并将结果与他人的资料作了比较。

和其他积分方程方法比较，线载荷积分方程法的主要优点是所得的积分方程是一维非奇异的[4,5]。此外，对压缩桩而言本法无需象文献〔2〕那样采用迭代策略求解。

## 二、点力公式的推导

为求得 $\nu$ 为常数、$G(z)$ 的半空间中的点力公式，先考虑 $\nu$ 为常数、$G$ 分两水平层的半空间情形。为了考虑下层 $G$ 的增加的影响，我们首先给出一个“组合定理”，用来确定弹性系数相组合的物体的应力和位移。

**“组合定理”**：令 $u_{ol}^{(k)}$，$\sigma_{olj}^{(k)}$ 为第 $k$ 个（$k=1$，2）均匀、各向同性的弹性静力问题的解。假定每个这些弹性体有同样的边界，不同的弹性常数，不同的载荷及边界条件，则这两个弹性体组合为一的弹性静力问题的解是：

$$\sigma_{ij}=\sigma_{olj}^{(1)}+\sigma_{olj}^{(2)},\quad u_i=au_{ol}^{(1)}+bu_{ol}^{(2)} \tag{2·1}$$

式中诸常数 $a$，$b$，$\lambda$，$G$ 满足：

$$a=\lambda^{(1)}/\lambda=G^{(1)}/G,\quad b=\lambda^{(2)}/\lambda=G^{(2)}/G \tag{2·2}$$

其中 $\lambda^{(k)}$，$G^{(k)}$，$\lambda$，$G$ 分别为第 $k$ 个弹性体及组合体的 Lamè 系数；体积力 $F_i$，给定边界面力 $T_i$，给定位移 $\overline{u}_i$ 满足：

$$F_i=F_i^{(1)}+F_i^{(2)},\quad T_i=T_i^{(1)}+T_i^{(2)},\quad \overline{u}_i\equiv a\overline{u}_{oi}^{(1)}+b\overline{u}_{oi}^{(2)} \tag{2·3}$$

式中 $F_i^{(k)}$，$T_i^{(k)}$，$\overline{u}_{oi}^{(k)}$ 分别为第 $k$ 个弹性体的体积力，给定边界面力和给定边界位移。（注意这一组合体的给定边界位移并不是定义为两个弹性体给定位移的直接相加）

这个组合定理的证明只需将（2·1）式代入弹性力学基本方程，即可得到满足。而（2·3）式表明组合问题的边界条件也是满足的。因此，（2·1）式是组合问题的解。

当第二个弹性体是零应力体，且 $G=G^{(1)}+G^{(2)}$，$\nu=\nu^{(1)}=\nu^{(2)}$，$\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$ 时，则（2·2）式是满足的，此时 $u_{oi}^{(2)}=0$，$\sigma_{oij}^{(2)}=0$。

$$\sigma_{ij}=\sigma_{olj}^{(1)},\quad u_i=au_{ol}^{(1)},\quad a=G^{(1)}/(G^{(1)}+G^{(2)}) \tag{2.4}$$

若我们把有两水平层的半空间（图1）的下层 $G_2$ 看作是零应力体和半空间 $G_1$ 组合，则组合体内（包括组合体边界）的应力和位移按（2·4）式计算。但组合体外的点，例如 $A$ 的位移怎样计算？我们需要一假定。

假设：圣维南原理应用于两个条件相同，但弹性系数一个是均匀的另一个是非均匀



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的问题时，给出同样的结果。

或者以图来说明得清楚些。

图2（a）和（b）分别表示一均匀的和层状的半空间。$\hat{u}_i(c;\ G_1)$ 和 $u_i^*(C;\ G_1+G_2)$ 分别表示这两个半空间的 $C(o,\ o,\ c)$ 点由一对单位力作用于 $A(x,\ y,\ t_j)$ 和 $B(x,\ y,\ t_{j+1})$ 引起的位移（$A$ 点在上层，$B$ 点在上层或两层交界面）。则上面的假设是指：

$$\hat{u}_i(C;\ G_1)=u_i^*(C;\ G_1+G_2)$$

当 $$\Delta t=t_{j+1}-t_j\to 0 \qquad (2\cdot5)$$

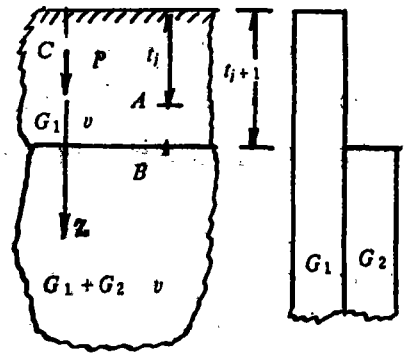


图1　有两水平层的半空间

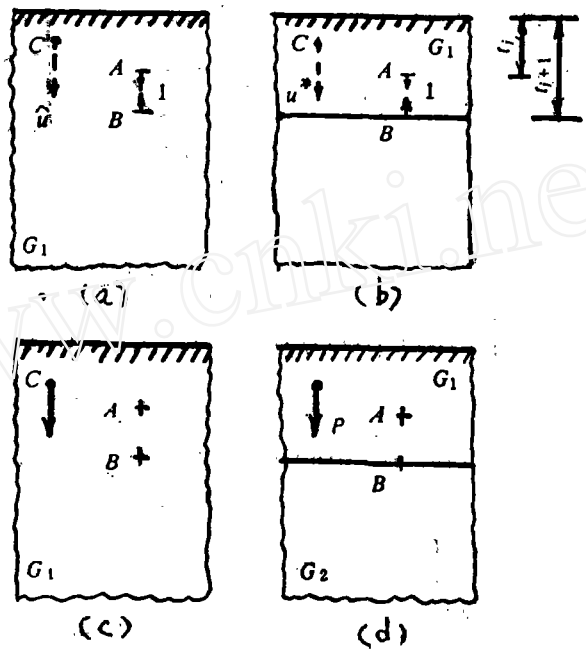


图2　圣维南原理应用于均匀和非均匀介质两种情形的假设

利用倒易定理，系统1的外力（图2（a）和（b））在系统2（图2（c）和（d））的位移上所作的功，等于系统2的外力在系统1的位移上所作的功，我们分别得到：

$$p\cdot\hat{u}_i(C;\ G_1)=1\cdot[u_{oi}(A;\ G_1)-u_{oi}(B;\ G_1)]$$

$$p\cdot u_i^*(C;\ G_1+G_2)=1\cdot[u_i(A;\ G_1+G_2)-u_i(B;\ G_1+G_2)]$$

利用（2·5）式，得：

$$u_i(A;\ G_1+G_2)-u_i(B;\ G_1+G_2)=u_{oi}(A;\ G_1)-u_{oi}(B;\ G_1) \qquad (2\cdot6)$$

此式表明，层状半空间中任意两个相距很近的点的相对位移等于均匀空间中同样的两点的相对位移。（2·6）式的右边的位移是按 Mindlin 公式计算；左边第二项因 $B$ 在组合体边



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

界上按（2·4）式计算，于是：

$$u_i(A;\ G_1+G_2)=u_{oi}(A;\ G_1)+G_1[1/(G_1+G_2)-1/G_1]u_{oi}(B;\ G_1) \qquad (2\cdot7)$$

（2·4）式和（2·7）式分别用来计算位于组合体内（包括其边界）和体外的点的位移。

**剪切模量 G 沿深度连续地变化的半空间**

ν 为常数，$G=G_0+G(z)$ 连续地变化的受载的半空间（图3）可以看成是一个受载的均匀的半空间 $G_0$ 和一无限序列的剪切模量为 $\Delta G_j=G_{j+1}-G_j$，ν 相同的零应力的半空间，在不同水准 $t_j=j\cdot\Delta t$（$j=1,\ 2,\cdots\cdots$）上当 $\Delta t\to0$，$j\to\infty$ 时的组合。

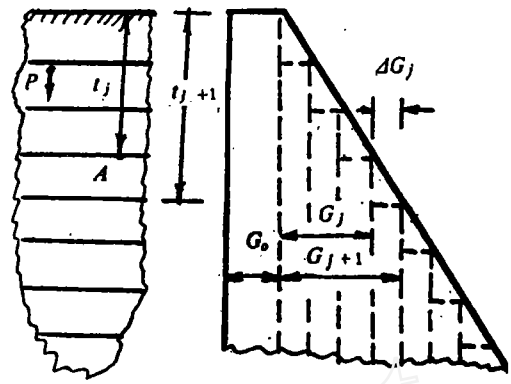

图3　G 连续变化的半空间的处理

利用两层半空间的位移计算方法（2·4）和（2·7）式，可以推广到多层半空间情形，再取极限，便可得到 ν＝常数，$G=G_0+G(z)$ 连续变化的半空间的位移表达式。略去推导过程，我们给出此位移表达式

$$u_i(x,\ y,\ z)=G_0\Big\{u_{oi}(x,\ y,\ z;\ G_0)/(G_0+G(z))$$
$$+\int_z^\infty[d(1/\underline{G}(t))/dt]u_{oi}(x,\ y,\ t;\ G_0)dt\Big\} \qquad (2\cdot8)$$

式中　$u_i(x,\ y,\ z)$ 表示 $G=G_0+G(z)$ 连续变化的半空间中任一点的位移；$u_{oi}(x,\ y,\ z;\ G_0)$ 为均匀半空间 $G_0$ 的位移，即 Mindlin公式；$\underline{G}(t)=G_0+G(t)$、

当 $G$ 沿深度线性地变化，即 $G=G_0+mz$，上式为：

$$u_i(x,\ y,\ z)=G_0\Big\{u_{oi}(x,\ y,\ z;\ G_0)/(G_0+mz)$$
$$-m\int_z^\infty[u_{oi}(x,\ y,\ t;\ G_0)/(G_0+mz)^2]dt\Big\} \qquad (2\cdot9)$$

利用积分表，可将（2·9）式中多数项积出。对于若干项，如：

$$\int_z^\infty(p+t)^{-2}(R_2+t+c)^{-1}dt,\quad \int_z^\infty(p+t)^{-2}R_2^{-1}(R_2+t+c)^{-1}dt,$$
$$\int_z^\infty(p+t)^{-2}R_2^{-1}(R_2+t+c)^{-2}dt$$

积分表中没有相应公式，则作变换，即被积函数中分子分母同乘以 $[R_2-(t+c)]$ 或 $[R_2-(t+c)]^2$，即可化简，然后再用积分表便可将（2·9）式的全部积出。下面，列出结果。

**垂直点力 $P$ 作用于（o，o，c）的位移公式**

$$U(x,\ y,\ z)=G_0\{U_0(x,\ y,\ z)/(m\nu)-U_1(x,\ y,\ z)\} \qquad (2\cdot10)$$

$$W(x,\ y,\ z)=G_0\{W_0(x,\ y,\ z)/(m\nu)-W_1(x,\ y,\ z)\} \qquad (2\cdot11)$$



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式中 $U_0$，$U$，$W_0$，$W$ 分别是均匀和非均匀介质情形的径向和铅垂方向的位移。

$$
\left.\begin{aligned}
&U_0(x,\ y,\ z)=Pr\{(z-c)/R_1^3+(3-4\nu)(z-c)/R_2^3-4(1-\nu)(1-2\nu)/[R_2(R_2+z+c)]+6cz(z+c)/R_2^5\}/[16\pi G_0(1-\nu)]\\
&U_1(x,\ y,\ z)=Pr\{K_2-(c+p)K_3+(3-4\nu)[K_5-(c+p)K_6]-4(1-\nu)(1-2\nu)[1/z-f_2-(c-p)F_2]/r^2+6c[K_8+(c-2p)K_9+p(p-c)K_{10}]\}/[16\pi mG_0(1-\nu)]\\
&W_0(x,\ y,\ z)=P\{(3-4\nu)/R_1+[8(1-\nu)^2-(3-4\nu)]/R_2+(z-c)^2/R_1^3+[(z+c)^2(3-4\nu)-2cz]/R_2^3+6cz(z+c)^2/R_2^5\}/[16\pi G_0(1-\nu)]\\
&W_1(x,\ y,\ z)=P\{(3-4\nu)F_1+[8(1-\nu)^2-(3-4\nu)]F_2+(C_1K_1+C_2K_2+C_3K_3)+(C_4K_4+C_5K_5+C_6K_6)+(C_7K_7+C_8K_8+C_9K_9+C_{10}K_{10})\}/[16\pi mG_0(1-\nu)]
\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot12)
$$

其中：

$$r=(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$R_1=[x^2+y^2+(2-c)^2]^{1/2}=R_1(z)$$

$$R_2=[x^2+y^2+(z+c)^2]^{1/2}=R_2(z)$$

$$F_1=\int_2^\infty v^{-2}R_1(t)^{-1}dt=\{R_1t_1-1-[b_1/(2y_1)]f_1\}/y_1$$

$$F_2=\int_2^\infty v^{-2}R_2(t)^{-1}dt=\{R_2t_1-1-[b_2/(2y_2)]f_2\}/y_2$$

$$C_1=1,\qquad C_2=-2(c+p),\qquad C_3=c^2-p^2-C_2p,$$

$$C_4=3-4\nu,C_5=4c(1-2\nu)-2C_4p,\ C_6=c^2(3-4\nu)-C_4p^2-C_5p,$$

$$K_1=\int_2^\infty R_1(t)^{-3}dt=[1-(z-c)/R_1]/r^2$$

$$K_4=\int_2^\infty R_2(t)^{-3}dt=[1-(z+c)/R_2]/r^2$$

$$K_2=\int_2^\infty v^{-1}R_1(t)^{-3}dt=[-1/R_1-(b_1/2)K_1+f_1]/y_1$$

$$K_5=\int_2^\infty v^{-1}R_2(t)^{-3}dt=[-1/R_2-(b_2/2)K_4+f_2]/y_2$$

$$K_3=\int_2^\infty v^{-2}R_1(t)^{-3}dt=[1/(vR_1)-(5b_1/2)K_2-4K_1]/y_1$$

$$K_6=\int_2^\infty v^{-2}R_2(t)^{-3}dt=[1/(vR_2)-(5b_2/2)K_5-4K_4]/y_2$$

$$C_7=6c\qquad C_8=12c^2-3C_7p$$

$$C_9=6c^3-3C_7p^2-2C_8p\qquad C_{10}=-C_7p^3-C_8p^2-C_9p$$

$$K_7=\int_2^\infty vR_2(t)^{-5}dt=1/(3R_2^3)-(b_2/2)K_8$$

$$K_8=\int_2^\infty R_2(t)^{-5}dt=2/(3r^4)-(z+c)(1/R_2^3+2/r^2)/(3r^2R_2)$$

$$K_9=\int_2^\infty v^{-1}R_2(t)^{-5}dt=[-1/(3R_2^3)+f_3-(b_2/2)K_8]/y_2$$



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$
\left.\begin{aligned}
&K_{10}=\int_2^{\infty} v^{-2}R_2(t)^{-5}dt=[1/(vR_2^3)-(5b_2/2)K_9-4K_8]/y_2\\
&f_3=[-1/R_2+f_2-(b_2/2)K_4]/y_2\\
&f_2=-L_n[(x_{02}+(1+x_{02}^2)^{1/2})/(x_{12}+(1+x_{12}^2)^{1/2})]/(y_2)^{1/2}\\
&f_1=-Ln[(x_{01}+(1+x_{02}^2)^{1/2})/(x_{11}+(1+x_{11}^2)^{1/2})]/(y_1)^{1/2}\\
&x_{01}=-(c+p)/r \qquad x_{02}=(c-p)/r\\
&x_{11}=(2y_1t_1+b_1)/(2r) \qquad x_{12}=(2y_2t_1+b_2)/(2r)\\
&y_1=(c+p)^2+r^2 \qquad y_2=(c-p)^2+r^2\\
&b_1=-2(c+p) \qquad b_2=2(c-p)\\
&t_1=1/(z+p) \qquad v=p+z\\
&p=G_0/m
\end{aligned}\right\} \tag{2.13}
$$

## 三、刚性桩的积分方程的推导

如忽略径向位移的相容性（按文献〔3〕的结论，径向位移的相容性对铅垂位移的解的影响不大）并假定土壤与桩粘结在一起，则轴向受力的刚性桩的问题的边界条件，可以表为：

$$
\left.\begin{aligned}
&z=0,\ r\neq 0, \qquad \sigma_z=\tau_{rz}=0\\
&0\leqslant z\leqslant L \qquad W(o,\ a,\ z)=W_0\\
&P=-2\pi\left[a\int_0^L \tau_{rz}(o,\ a,\ s)ds+\int_0^a r\sigma_z(r,\ L)dr\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3·1}
$$

我们采用铅垂点力以未知集度函数 $T(c)$ 沿 $c$ 轴（即 $z$ 轴）的 $(O,\ L)$ 内分布（图4），则点 $(x,\ y,\ z)$ 的铅垂位移为：

$$W(x,\ y,\ z)=\int_0^L A(x,\ y,z;\ c)T(c)dc \tag{3·2}$$

式中核 $A(x,\ y,\ z;\ c)$ 为单位点力公式（2·11）式。

将（3·2）式代入（3·1）式，得：

$$\int_0^L A(O,\ a,\ z;\ c)T(c)dc=W_0 \tag{3·3}$$

（3·3）式是一个一维的、非奇异 Fredholm 第一种积分方程，可用一般的方法求解。解得 $T(c)$ 后，任一点的位移便不难求得。

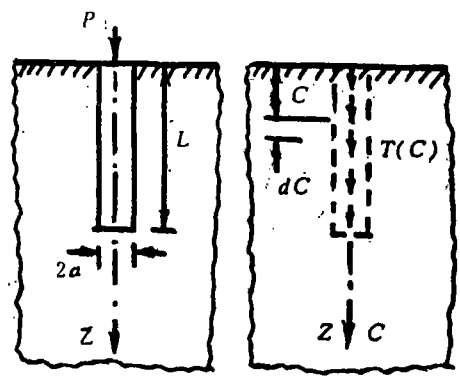

图4　虚载荷沿线分布解轴向受力桩问题

利用图4所示的真实载荷（左图）和虚载荷（右图）两种情形的桩以外的半空间有相同的位移和应力场，根据平衡条件，就能得出：

$$P=\int_0^L T(c)dc \tag{3·4}$$



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

应用（3·4）式计算与给定位移 $W_0$。相应的作用于桩顶的载荷 $P$ 将较（3·1）式简便。

## 四、可压缩桩的积分方程的推导

可压缩桩问题的边界条件与刚性桩的相同只是以（4·1）式代替（3·1）之第二式，即：

$$\left.\begin{aligned} &W(O,\ a,\ z)=W_0-\int_0^z p(s)ds/(EF) \\ &p(s)=P+\int_0^s 2\pi a\tau_{rz}(O,\ a,\ t)dt \\ &\tau_{rz}(O,\ a,\ t)=\int_0^L S(O,\ a,\ t;\ \xi)T(\xi)d\xi \end{aligned}\right\} \tag{4·1}$$

式中：$S(O,\ a,\ t;\ \xi)$ 为单位力作用于 $(O,\ O,\ \xi)$ 引起点 $(O,\ a,\ t)$ 的剪应力；$E$ 为桩的弹性模量；$F=\pi a^2$。为简化计算，在此我们采用近似的公式计算 $S(O,\ a,\ t;\ \xi)$，即用 Mindlin 公式

$$\begin{aligned} S(x,\ y,\ z;\ \xi)=r\{&-(1-2\nu)(1/R_1^3-1/R_2^3)-3(z-\xi)^2/R_1^5 \\ &-3[(3-4\nu)z(z+\xi)-3\xi(3z+\xi)]/R_2^5-30\xi z(z+\xi)^2/R_2^7\} \end{aligned} \tag{4·2}$$

于是，（4·1）式可写成：

$$\int_0^L A_1(O,\ a,\ z;\ t)T(t)dt=W_0 \tag{4·3}$$

式中：$W_0$ 为桩顶的铅垂位移，

$$\begin{aligned} A_1(O,\ a,\ z;\ t)=&A(O,\ a,\ z;\ t)+z/(EF)+(2/(Ea)) \\ &\cdot\int_0^z\int_0^s S(O,\ a,\ u;\ t)duds \end{aligned} \tag{4·4}$$

（4·3）式也是一个一维非奇异的 Fredholm 积分方程，可用一般方法来解。对于均匀的半空间，（4·2）式是精确的，此时本法归结为（4·4）式可以不必象〔2〕那样采用迭代的策略求解。

## 五、数 值 解

Fredholm 第一种积分方程的数值解法，通常是简单地用离散的代数方程来代替，即（3·3）式以下式来代替：

$$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{T}\}=\{\boldsymbol{W}\} \tag{5·1}$$

式中 $[\boldsymbol{A}]=n\times n$ 矩阵；$\{\boldsymbol{T}\}$，$\{\boldsymbol{W}\}$ 为 $n$ 列阵。其元 $a_{ij}$，$T_j$ 和 $W_i$ 分别为：

$$\left.\begin{aligned} &a_{ij}=\int_{(j-1)\Delta L}^{j\Delta L} A(O,\ a,\ z_i;\ t)dt,\quad T_j=T(t_j) \\ &W_i=W_0\quad \Delta L=L/n\quad i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n \end{aligned}\right\} \tag{5·2}$$

通常（5·1）式是适定的，对于一给定的 $W_0$ 可以解出一个唯一的 $\{\boldsymbol{T}\}$，则相应的 $P$



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由

$$P=\Delta L\sum_{j=1}^{n}T_j \tag{5·3}$$

定出。类似地，（4·3）式也用〔$A_1$〕{$T$}={$W$} 代替，〔$A_1$〕的元 $a_{1ij}$ 的计算亦同，只是以 $A_1(O,\ a,\ z_i;\ t)$ 代替 $A(O,\ a,\ z_i;\ t)$。

下面给出刚性桩和可压缩桩嵌在均匀的和 Gibson 土壤的计算结果。计算在 IBM3700 机上进行，取 $n=10$，即桩等分为 10 段。

对于均匀土壤，我们计算的目的是比较线载荷积分方程法与其他方法所得的结果的差异。图 5 表示本文的载荷-沉降曲线与文献〔2〕的曲线是接近的；对 $L/D=20$ 误差约 5%，对 $L/D=80$，误差约 11%。图 6 表示桩侧剪应力的分布曲线的形状也大致和文献〔2〕相同。图 7 表示桩底反力所占的百分比的理论计算的结果与实测资料的比较，对于 $L/D=10$—20（实测资料只有在这范围内有几个点的资料），本文的计算较文献〔2，7〕更接近实测点些。所有这些表明线载荷积分方程法不但计算简单，对桩嵌在均匀半空间的分析亦足够精确。

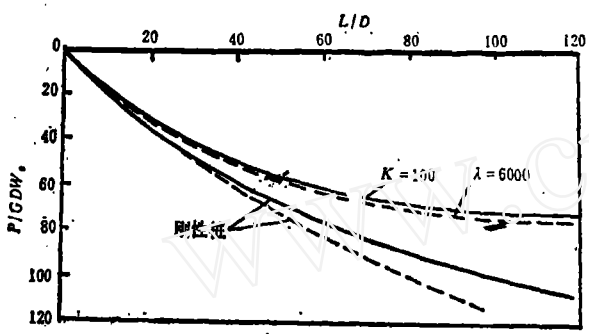


图 5　均匀土壤中的桩的载荷-沉陷曲线
…… Buterfield et al (2)
$\lambda=Ep/G$
$K=\pi a^2Ep/E=0.01047\lambda$
$\nu=0.5$

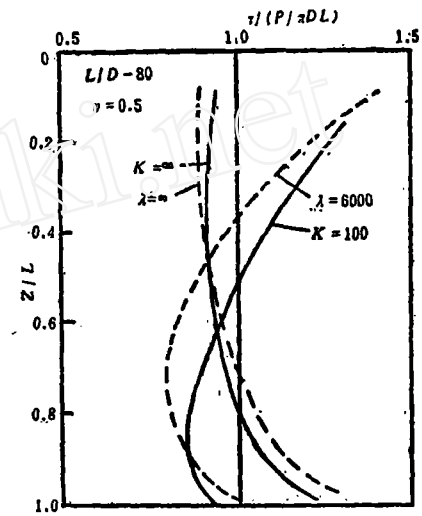


图 6　均匀土壤中的桩的剪应力分布
…… Banerjee et al (2)

对于 Gibson 土壤，图 8 的载荷-沉陷曲线和〔7〕的有某些差异（对 $L/D=20$ 时，误差约 20%；$L/D=40$ 时约 26%），但它却更接近〔6〕和〔6〕的有限元分析（见图10，对 $L/D=20$ 时，误差约 4.7%）。图 9 表示一轴向受力刚性桩嵌在 Gibson 土壤中的沉陷场。从图中可见深度 $z=2.5L$ 的水准上的点的位移，大约只有 $W_0$ 的（2—3）%，这样我们可以检查在有限元的分析（文献〔6〕）中采用 $z=2.5L$ 的水准的点当作没有沉陷的刚性假设是合理的。图 10 表示在 $z=0.5L$ 水准上的位移情形，本文的位移略大于文献〔6〕的，这是部分由于〔6〕的有限元计算是以 $z=2.5L$ 处为刚性所致。如果文献〔6〕考虑该层有沉陷，则和本文的曲线将更接近。图 11 表示桩侧表面剪应力分布随 $L/D$ 而变化情形；当 $L/D$ 增大时，桩下层的剪应力将变得更大。（这是因为桩愈长，桩下部的



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$G$ 更大之故)

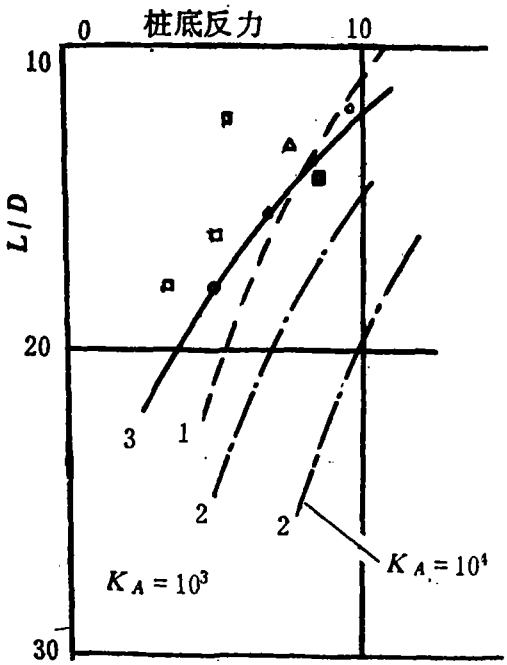


图7 桩底受力的百分比

□ 全尺寸测量 (Whitaker 1966)

△ 全尺寸测量 ( Sowere 等 1961)

1 …… Butterfield 等 (2)

$\lambda=600$ 均匀土壤

2 —·—·— Banerjee (7), Gibson 土壤

3 ——本文, 均匀土壤

$K=\pi a^2 Ep/E=60$

$K_A=Ep/E(L)$, $E(0)=0$

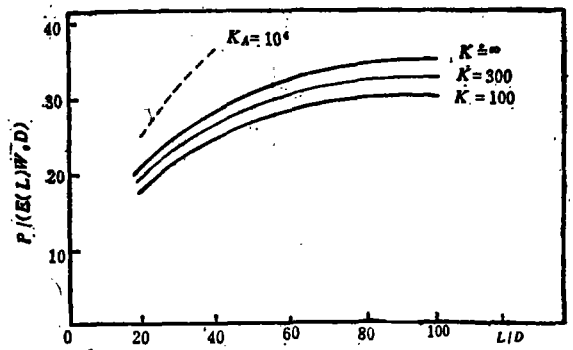


图8 Gibson 土壤中桩的载荷-沉陷曲线

$K_A=Ep/E(L)$ $K=\pi a^2 Ep/E(L)$

$\nu=0.5$ $a=0.1$(m)

$E(L)=2(1+\nu)\times10^3 L$(kN/m³)

…… Banerjee et al (7)

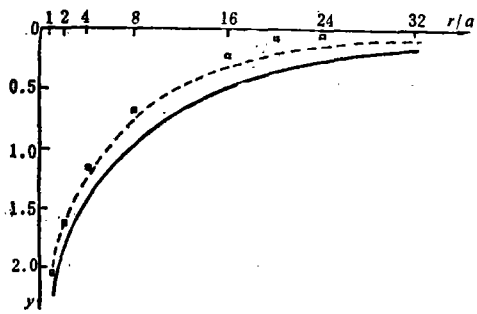


图 10 Gibson 土壤中桩的载荷-沉陷曲线

刚性桩 $L/a=40$ Gibson土$G=mz$

$m=10^3$(T/M³) $\nu=0.4$

$a=0.1$(m)

——本文

…… F. E. M. (6)

□ Randolph & Worth (6)

$y=(G_L a W_0/p)\times10^{-2}$ $G_L=mL$

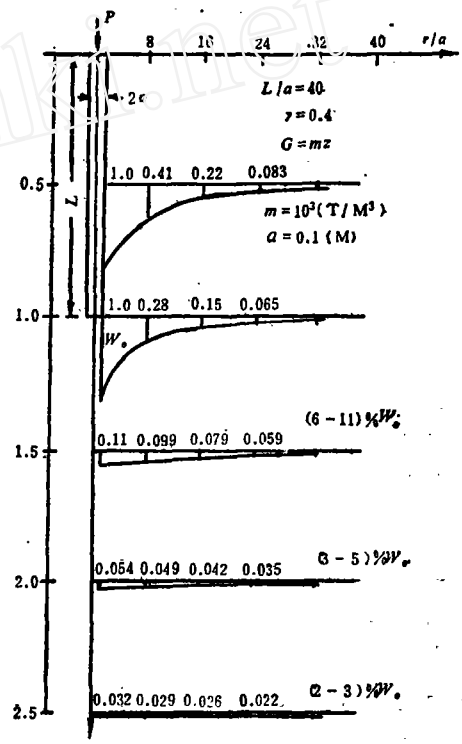


图9 Gibson 土壤中的刚性桩的位移场



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

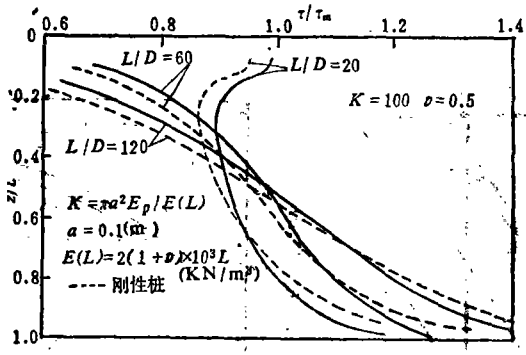


图 11　Gibson 土壤中桩的剪应力分布

## 参　考　文　献


[1]Fulan P., The relation between dynamic elastic parameters and depth of soil, Soil Dynamic and Earthquake Engineering Conference, Southanpton, Rotterdam, 1 (1982), 47.

[2]Butterfield R. and Banerjee P. K., The elastic analysis of compressible piles and pile group, *Geotechnique*, **21**, 1 (1971), 43—60.

[3]Mattes N. S., The influence of radial displacement compatibility on pile settlement, *Geotechnique*, **19**, 1 (1969), 157—159.

[4]Tian-quan Yun, A simple integral equation method for three-dimensional problems of cylinder embedded in a half space, XVth ICTAM ABSTRACT, Toronto (1980), 38.

[5]Tiau-quan Yun, Pile analysis by simple integral equation method, Applied Mathematical and Mechanics, **2**, 3 (1981), 307—320. (MR 83i: 73014)

[6]Randolph M. F. and Wroth C. P., Analysis of deformation of vertically loaded piles, ASCE J. Geotech. Engng. Div. Gt 12 (1978), 1465.

[7]Banerjee P. K. and Davies T. G., The behavior of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils, *Geotechnique*, **28**, 3 (1978), 309—326.

[8]Poulos H.G., Settlement of single piles in nonhomogeneous soil, J. Geotech. Engng. Div. Gt 5, PROC. ASCE, **105** (1979), 627—642.

[9]Krishnaswarmy N. R. et al., Stresses in nonhomogeneous soil around vertical piles, *Indian Geotechnical J.*, **11**, 4 (1981), 370—396.




© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

# Line-loaded Integral Equation Method for the Analysis of Axially Loaded Pile Embedded in Nonhomogeneous Half Space

*Yun Tianquan*

(Department of Mechanics Huazhong University of Science and Technology Wuhan, China)

## Abstract

The analysis of an axially loaded rigid and compressible pile embedded in an isotropic elastic half space with Poisson's ratio $\nu$=constant and shear modulus G linearly varied with depth z by line-loaded integral equation method is presented. Both problems of rigid and compressible pile are reduced to a Fredholm integral equation of the first kind and is solved by numerical method. The novel feature or the major advantages are:

1. According to "combination theorem" and an assumption of Saint-venant's-principle used in nonhomogeneous medium, a point force formula with simple and closed form suitable for nonhomogeneous half space is presented

2. The cumulative effect of G(z) from the pile tip to infinite is taken into account in a closed form.

3. Without equivalent value of E or modified coefficients, there is no debate on the determining of these values.

The major advantage of the line-loaded integral equation method is that the obtained integral equatiin is 1-dimensional and non-singular. And, it doesn't need an iterative scheme for compressible pile.

Numerical results are compared with published data from others'.

Derivation of the point force formula

The derivation of the point force formula is based on a "combination theorem" and an assumption.

Combination theo em

Iet $u_{oi}^{(K)}$, $\sigma_{oij}^{(K)}$ be the solution of the k-th (k= 1, 2.) homogeneous isotropic elastostatic problem. Suppose that each of these elasto-solid has same boundary, different elastic moduli, different loading and boundary conditions. Then, the solution of the "combined" elastostatic problem is:



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sigma_{ij}=\sigma_{0ij}^{(1)}+\sigma_{0ij}^{(2)},\quad u_i=au_{0i}^{(1)}+bu_{0i}^{(2)} \tag{1}$$

where constants a, b, λ, G satisfy:

$$a=\lambda^{(1)}/\lambda=G^{(1)}/G,\qquad b=\lambda^{(2)}/\lambda=G^{(2)}/G \tag{2}$$

$\lambda^{(k)}$, $G^{(k)}$, λ, $G$ are Lame coefficients of the k-th solid and the combined solid respectively; the body force $F_i$, traction $T_i$, given displacement $\bar{u}_i$ satisfy:

$$F_i=F_i^{(1)}+F_i^{(2)},\quad T_i=T_i^{(1)}+T_i^{(2)},\quad \bar{u}_i\equiv a\bar{u}_{0i}^{(1)}+b\bar{u}_{0i}^{(2)} \tag{3}$$

A spectial case, zero-stressed combination, $G=G^{(1)}+G^{(2)}$, $\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$,

$$\nu=\nu^{1}=\nu^{(2)},\quad u_{0i}^{(2)}=0,\quad \sigma_{0j}^{(2)}=0,\ \text{then},\ \sigma_{ij}=\sigma_{0ij}^{(1)},\quad u_i=au_{0i}^{(1)} \tag{4}$$

Assumption: The Saint-venent's principle used in two problems with same conditions but homogeneous and nonhomogeneous in elastic moduli respectively, gives same results. i. e., if let $\hat{u}_i$ $(C;\ G_O)$ and $u_i^*$ $(C;\ G_1)$ be the displacements of point C of a homogeneous and nonhomogeneous half space respectively, due to a coupled unit forces at any two points $A$ and $B$ near enough to each other, then, this assumption states

$$\hat{u}_i\ (C;\ G_O)=u_i^*\ (C;\ G_1)\quad \text{as}\ A\to B \tag{5}$$

The combination theorem is used for the calculation of displacement of points within the closure of the combinedpart, while the assumption is used for points outside the combined part (by reciprocal theorem).

A loadig half space with ν=constant and continuously varied $G=G_0+G(z)$can be veiwed as the combination of a same loading homogeneous half space $G_0$ and an infinite series zero-stresse half spaces with $\Delta G_j=G_{j+1}-G_j$ $(G_j=G_0+G(t_j))$ at level $t_j=j.\ \Delta t$ $(\Delta t=t_{j+1}-t_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$ as $\Delta t\to 0,\ j\to\infty$.

Using the above analysis, we obtain the displacement due to a point force is: (for linear case $G=G^0+mz$)

$$u_i\ (x,\ y,\ z)=G_0\{u_{0i}(x,\ y,\ z;\ G_0)/(G_0+mz)$$
$$-m\int_z^{\infty}[\,u_{0i}(x,\ y,\ t;\ G_0)/(G_0+mt)^2\,]dt\} \tag{6}$$

where $u_{0i}(x,\ y,\ z;\ G_0)$is the Mindlin's solution for homogeneous half space $G_0$.

Formulation for rigid pild.

The boundary conditions of an axially loaded rigid pile is assumed to be: $z=0,\ r\neq 0,\ \alpha_z=\tau_{rz}=0;\ 0\leqq z\leqq L,\ w(0,\ a,\ z)=w_0$. we solve this problem by distributing a fictitious vertical loads with unknown intensity $T(c)$ along the -axis in (O, $L$) and using (6) as an approximate fundamental solution, then the problem is reduced to a Fredholm integral equation of the first kind

$$\int_0^L A(0,\ a,\ z;\ c)T(c)dc=w_0 \tag{7}$$

(下转第 319 页)



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net