

# 关于准相似性条件和湍流理论

周培源

(中国科学院, 北京大学)

**提要** 本文从湍流速度脉动微分方程出发, 作为逐级近似方法, 建立了各级速度关联和它们所满足的方程。对于要求解的给定阶的关联函数, 我们可以截断这一近似过程, 而忽略更高阶的关联以及它们的方程。我们把曾在均匀各向同性湍流运动理论中引入的准相似性条件推广到普通剪切湍流, 并把这一理论用于求解在压力作用下的槽流和平面湍尾流。在现在的工作中, 仅考虑平均运动方程和二阶关联方程, 并略去了二阶关联方程中的三阶关联项。理论和实验的比较, 尤其是尾流, 是令人满意的。文中也讨论了理论今后的发展。

## 引 言

基于不可压缩粘性流体的 Navier-Stokes 方程建立的湍流理论, 早在上一世纪 90 年代就已经由 Reynolds 提出, 他的重要贡献在于把湍流运动分为平均运动和湍流脉动两部分。自 Reynolds 于 1895 年文章发表后的四十多年中, 关于湍流研究的主要兴趣集中在平均运动方程的实验和理论上。

研究从原有的 Navier-Stokes 运动方程中减去 Reynolds 平均运动方程所得到的湍流脉动方程及其应用等, 尽管在 Reynolds 时期并未引人注目, 但它却开辟了湍流研究的新方向<sup>[1,2]</sup>。自从 Rotta<sup>[3]</sup> 1950 年的早期工作以来, 已经发表了大量的文章<sup>[4]</sup>, 作者们是沿着这一思路进行的, 而这些工作主要在于建立二阶关联和三阶关联所满足的运动学方程以及寻找它们的解。

由于 Navier-Stokes 方程是非线性的, 因此湍流脉动方程也是非线性的, 并由此导出所建立的速度关联的运动方程组是不封闭的。到今为止的普通剪切湍流研究的主要工作就是通过建立给定阶的速度关联和低级的速度关联的关系等来解决这个不封闭的问题。事实上, Reynolds 的平均运动方程也是不封闭的。Prandtl, Taylor 和 Von Kármán 等的混合长理论正是这种解决封闭问题的一些著名的尝试。大家知道, Von Kármán 的相似性理论确实给出了槽流和管流具有相当精确的平均速度分布, 并给出了湍流速度脉动强度的定性描述。

在我们的 1940 年的文章中, 提出了一个四阶关联和二阶关联关系, 速度和压力脉动关联以及关于粘性项等假设条件等来处理封闭问题, 随着实验技术和计算机技术的发展, 在过去三十年来的不同时期, 为了给出理论和实验的更好的符合, 关于速度关联之间的其它假设条件也被提出过。

事实上,上述湍流理论中解决封闭问题的本身并非在理论上是满意的。首先,尽管所作的给定阶的速度关联和低阶的速度关联之间的关系在数学形式上是协变的,但它们必须有实验作为依据。其次,实验可以测量出更高阶的关联,而这些关联在这样处理的方法中是不加考虑的。

在1945年的文章<sup>[2]</sup>,我们提出过这样的观点,湍流运动问题的严格解,应从Reynolds平均运动方程和湍流脉动方程联立地解出平均运动速度和湍流脉动速度。求得之后,任何阶的关联,包括Reynolds应力在内都可以通过脉动的平均过程来获得。这个方法加上我们即将要讨论的准相似性条件一起应用于均匀各向同性湍流得到了丰硕的成果,<sup>[5,6]</sup>但是,由于普通剪切湍流的方法是极为复杂的非线性的积分微分方程组,如今直接求解是非常困难的。

此外,我们可以通过建立越来越高阶的关联函数方程,作为求解湍流问题的一个逐级近似过程。为满足实际需求,可以在某一级速度关联函数方程组停止,并求其解,而忽略更高阶的关联的作用。

由于湍流是一个具有统计本质的物理问题,因此不可能把它简单地化为一个微分方程理论中的边值问题,因此正如在解均匀各向同性湍流理论中选取一种符合实际的涡旋作为湍流元一样,在普通剪切湍流中,我们也必须引入一定的物理条件。在所有这些条件中,准相似性条件是很重要的。在现在的理论中,我们把曾在均匀各向同性湍流用过的这一准相似性条件推广到普通剪切湍流。为了说明我们的观点,作为应用的例子,我们求解了有压力的槽流和平面湍尾流。

作为一种近似,暂时我们仅考虑平均运动方程和二阶关联方程,而忽略三阶关联项。从槽流的一级近似得到了Kármán的相似性和结果。同样,对自由湍尾流可得到另一不同的相似性。这两种相似性以前曾求出过<sup>[7]</sup>。结果表明,槽流和尾流的平均速度,Reynolds应力和湍流微尺度都和实验符合得相当好。尤其是尾流,结果更为满意。

在文末,我们将讨论在二阶关联方程中被忽略的三阶关联的大小,讨论理论发展的前景以及如何获得更高阶的关联而使理论和实验更好地符合。

## 一、运动方程和准相似性条件

在解高Reynolds数定常不可压缩粘性流体的运动问题,如沿半无穷大平板流动,Prandtl的相似性或自模拟条件使得速度分布和实验符合得相当好。在流体的湍流运动中,我们已说明这种相似性确实存在,但只限定于一定性质的流动,即对于不同性质的流动存在着不同的相似性。

例如,在剪切湍流运动,Kármán的相似性可以应用于壁流中在压力作用下的槽流和管流及半无穷大平板流,而在自由湍流,如物体后的尾流和射流,我们则有另一种相似性<sup>[7]</sup>。

均匀各向同性湍流有和上述相当类似的情形。衰变的初期有一种相似性,而后期则有另一种相似性。准相似性条件的引入把这两种相似性结合起来,使得湍流能量,湍流的Taylor微尺度随时间的变化在衰变初期和后期都和实验相符合。

对于普通剪切湍流运动,我们将假设一个准相似性条件,它包括上面讲到的均匀各向同

性湍流中的相似性, Kármán 相似性和自由湍流相似性。在引入这一条件前, 我们首先给出以前曾推得的平均运动和二阶关联运动方程<sup>[1]</sup>。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U^j U_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} + \frac{1}{\rho} \tau_{i,j}^j + \nu \nabla^2 U_i \quad U_i^j = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{ik} - \frac{1}{\rho} (U_{i,j} \tau_{kj}^j + U_{kj} \tau_{ij}^j) - \frac{1}{\rho} U^j \tau_{ik,j} - \overline{(w_j w_i w_k)_{,j}} \\ & = -a^n m_{ik} U_{,n}^m - a^{np} m_{ik} U_{,np}^m - b_{ik} + \frac{2\nu}{3\lambda^2} (k-5) q^2 g_{ik} - \frac{2\nu k}{\lambda^2} \overline{w_i w_k} \\ & - \frac{\nu}{\rho} \nabla^2 \tau_{ik} \end{aligned} \quad (1.2)$$

这里  $U_i$  为平均速度,  $\bar{P}$  为平均压力,  $w_i$  为速度脉动,  $\tau_{ik}$  为 Reynolds 应力,  $-\overline{\rho w_i w_k}$ ,  $\lambda$  为湍流微尺度,  $k$  是一常数。

注意到在二阶关联方程 (1.2) 中我们比文献 [2] 的 (5.2) 和 (8.2) 多给出了  $U_{,np}^m$  这一项。这是由于在 (5.1) 中我们取  $U_{,a}^m$  为  $\xi^a$  的级数展开所引起的。

均匀各向同性湍流的准相似性条件是用涡旋 Reynolds 数  $R_a$  和涡旋尺度  $a$  表达的<sup>[5]</sup>。它们和湍流速度脉动强度平方  $q^2 = \overline{W_j W^j}$  与微尺度  $\lambda$  有关。这个条件也可根据  $\lambda$  和  $R_\lambda$  写出为 (见附录 A) :

$$\frac{\lambda}{\nu} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{R_0} R_\lambda^2 + 2 \quad (1.3)$$

这里  $R_\lambda = \frac{q \cdot \lambda}{\nu}$  是湍流 Reynolds 数,  $R_0$  是一个常数。

现在我们把条件 (1.3) 式对于普通剪切湍流流动推广成下面形式:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\nu} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} + U^j \lambda_{,j} \right) &= \frac{1}{R_0} \left\{ R_\lambda^2 - \left[ R_e + \frac{k_1}{\nu} \lambda^2 (g^{ke} U_{,k}^j U_{,j,e})^{1/2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_2}{\nu} \lambda^3 (g^{ij} g^{ke} g^{mn} \Omega_{ikm} \Omega_{j,e,n})^{1/2} \right]^2 + 2R_0 \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

这里  $\Omega_{ik} = U_{i,k} - U_{k,i}$ ,  $k_1, k_2$  和  $R_e$  都是常数。

以前我们指出过湍流速度脉动的相似性解可以假设为如下形式<sup>[7]</sup>:

$$w_i = q \varphi_i \left( \frac{x}{\lambda}, t \right) \quad (1.5)$$

这里  $q^2 = q^2(x, t) = \overline{w_j w^j}$ ,  $\lambda = \lambda(x, t)$  函数  $q$  和  $\lambda$  在均匀各向同性湍流中已经给出了定义。现在我们把推广到普通剪切湍流流动, 它们不仅互相有关, 而且和平均速度的导数有关, 我们称 (1.4) 为普通剪切湍流流动的准相似性条件。在 (1.5) 中函数  $q$  和  $\varphi_i$  可以分别解释为  $w_i$  的“振幅”和“相位”,  $q$  是坐标  $x^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 和时间  $t$  的缓变函数, 而  $\varphi_i$  是随  $x^j$  迅速变化的。微尺度  $\lambda$  和流动的宏观尺度  $L$  相比是一个小尺度。

应用由 (1.5) 给出的湍流脉动的表示式, 我们可以重写  $a^n m_{ik}$ ,  $a^{np} m_{ik}$  和  $b_{ik}$  为:

$$\begin{aligned}
 a_{mih}^n &= q^2 a'^n_{mih} \\
 a^{np}_{mih} &= q^2 \lambda a'^{np}_{mih} \\
 b_{ih} &= \frac{q^3}{\lambda} b'_{ih}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

这里  $a'^n_{mih}$ ,  $a'^{np}_{mih}$  和  $b'_{ih}$  都是近似地无量纲常数。它们的近似程度可由以前曾指出的方法进行检验<sup>[2]</sup>。从这些证明中, 我们也可看出在某些湍流流动中, 它们也可视为坐标的缓变函数。

应用表达式 (1.6), 我们可以估计方程 (1.2) 各项的量级大小。平均速度  $U_i$  和宏观尺度  $L$  分别比起  $q$  和  $\lambda$  为大。从 (1.2) 和 (1.6) 我们注意到三阶关联的散度  $\overline{w^j w_i w_{h,j}}$  是比压力梯度和速度脉动的关联项  $b_{ih}$  为小, 两者之比是  $\lambda/L$ , 项  $\overline{w^j w_i w_{h,j}}$  一般说来比  $U^i_j \overline{w^j w_h}$  和  $U^j \overline{w_i w_{h,j}}$  也要小, 它们的比为  $q/U$ , 因此在一级近似下, (1.2) 中的  $\overline{w^j w_i w_{h,j}}$  是可以略去的。

必须注意的是, 尽管我们忽略三阶速度关联的散度作为一种近似, 事实上 (1.6) 式中的  $g^{ikh} b_{ih}$  项还被保留, 它是和这个散度项同量级的。保留它可以得到和实验符合得更好的结果。  $g^{ikh} a^n_{mih}$ ,  $g^{ikh} a^{np}_{mih}$  和  $g^{ikh} b_{ih}$  等三个守恒条件将在附录 B 中给出。

## 二、在压力作用下的槽流运动

取  $ox$  轴为槽流的平均流动方向, 与两壁平行的在槽中心的平面为  $xy$  平面,  $oy$  轴和  $oz$  轴分别垂直和平行这个平面。平均速度和各级速度关联都是  $y$  的函数。令  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ , 忽略粘性作用, 由方程 (1.1) 得:

$$\frac{1}{\rho} \tau_{12} = -U_i^2 \frac{y}{h}
 \tag{2.1}$$

这里  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{U_i^2}{h}$

$2h$  代表槽的宽度,  $U_i$  是摩擦速度。

计算方程 (1.2) 的留下部分, 并且注意到方程 (1.6) 中关于符号的改变。当  $(i, k) = (1, 1), (2, 2)$  和  $(3, 3)$  时函数对  $y$  是偶的, 而当  $(i, k) = (1, 2)$  是奇的, 乃得表达式:

$$\begin{aligned}
 a'^{12}_{111} &= a'^{12}_{122} = a'^{12}_{133} = 0 \\
 a'^{22}_{122} &= 0 \quad b'_{12} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

在 (1.2) 中不等于零的张量分量在  $(i, k) = (1, 1), (1, 2), (2, 2)$  和  $(3, 3)$  时将分别为:

$$\begin{aligned}
 2\overline{w_1 w_2} \frac{dU}{dy} + \frac{d}{dy} \overline{w_1^2 w_2} &= -a_1 \lambda q^2 \frac{d^2 U}{dy^2} - b_1 \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\nu}{3\lambda^2} (k-5)q^2 - \frac{2\nu k}{\nu^2} \overline{w_1^2} \\
 \overline{w_1^2} \frac{dU}{dy} + \frac{d}{dy} \overline{w_1 w_1^2} &= -a_2 q^2 \frac{dU}{dy} - \frac{2\nu k}{\lambda^2} \overline{w_1 w_2} \\
 \frac{d}{dy} \overline{w_1^3} &= -a_2 \lambda q^2 \frac{d^2 U}{dy^2} - b_2 \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\nu}{3\lambda^2} (k-5)q^2 - \frac{2\nu k}{\lambda^2} \overline{w_1^2} \\
 \frac{d}{dy} \overline{w_2 w_1^2} &= -a_3 \lambda q^2 \frac{d^2 U}{dy^2} - b_3 \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\nu}{3\lambda^2} (k-5)q^2 - \frac{2\nu k}{\nu^2} \overline{w_1^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

在这里，我们忽略了 (1.2) 式中的一般比较小的  $\nabla^2 U_{ik}$  的这一项，并记：

$$\begin{aligned} a_1 &= a'^{22}_{111} & a_2 &= a'^{22}_{122} & a_3 &= a'^{22}_{33} \\ a_4 &= a'^{11}_{122} & b_1 &= b'_{11} & b_2 &= b'_{22} & b_3 &= b'_{33} \end{aligned} \quad (2.4)$$

上述常数满足附录 B 给出的守恒条件 (18)，(19) 和 (20)，我们有：

$$a_1 + a_2 + a_3 = a \neq 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{q^2}{\lambda} (b_1 + b_2 + b_3) = -\frac{dq^3}{dy} \alpha^2 + \frac{\gamma}{h} q^3 = -\frac{\gamma}{h} q_0^3$$

在方程 (2.5) 中  $\alpha^2$  取为零，这是由于  $\frac{dq^3}{dy}$  对  $y$  是奇的，而方程 (2.5) 中其它项对  $y$  是偶的。

准相似性条件 (1.4) 中的常数  $R_0$  由于在均匀各向同性湍流中是小量，可以被忽略，我们得：

$$R_\lambda = R_e - \frac{k_1}{\nu} \lambda^2 \frac{dU}{dy} - \frac{k_2}{\nu} \lambda^3 \frac{d^2U}{dy^2} \quad (2.6)$$

这里  $R_e = \frac{U_\tau l}{\nu}$ ， $l$  是一常数，代表一个长度。因为当  $y$  是正时， $\frac{dU}{dy}$  是负的，我们在 (2.6) 中取负号，(2.6) 也可写为：

$$\frac{q}{U_\tau} = \frac{l}{\lambda} - k_1 \frac{\nu}{U_\tau} \frac{dU}{dy} - k_2 \frac{\lambda^2}{U_\tau} \frac{d^2U}{dy^2} \quad (2.7)$$

如果我们在方程组 (2.3) 中忽略三阶速度关联项，则得五个微分方程，(2.3) 中有 4 个，(2.6) 中有 1 个，用来求解 5 个函数  $U$ ， $\overline{w_1^2}$ ， $\overline{w_2^2}$ ， $\overline{w_3^2}$  和  $\lambda$ ，函数  $\overline{w_1 w_2}$  在平均运动方程 (2.1) 中已经得出。因此在压力作用下的槽流问题是可以求解的。

由于在槽流中，粘性作用一般比较小，因此可以略去 (2.3) 中的粘性项。从 (2.3) 的第二个方程可以发现  $\overline{w_1^2}$  和  $q^2$  成正比。同时也可看出，在这个近似程度内， $\overline{w_1^2}$  与  $\overline{w_2^2}$  之和可以确定，但不能分别给出。

如忽略 (2.3) 中的粘性作用，(2.3) 中的第三个方程为：

$$q = -\frac{a^2}{b^2} \lambda^2 \frac{d^2U}{dy^2} \quad (2.8)$$

从 (2.7) 的第 4 个方程得：

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

把 (2.8) 的  $q$  代入准相似性条件 (2.7)，我们得到  $\lambda$  和  $U$  的导数的关系：

$$\left( \frac{a_2}{b_2} - k_2 \right) \frac{\lambda^2}{U_\tau^3} \frac{d^2U}{dy^2} - k_1 \frac{\lambda}{U_\tau} \frac{dU}{dy} + \frac{l}{h} = 0 \quad (2.9)$$

将 (2.3) 的第一，第三和第四个方程相加，考虑到 (2.1)，并利用 (2.5) 式，可得湍能方程：

$$2U_\tau^2 \frac{\gamma}{h} \frac{dU}{dy} = -a\lambda q^2 \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{\gamma}{h} q^3 \quad (2.10)$$

这里我们三个方程 (2.8)，(2.9) 和 (2.10) 用来决定三个函数  $\frac{dU}{dy}$ ， $q$  和  $\lambda$ 。从这三

个方程可看出,如果忽略(2·9)和(2·10)中的两个常数  $l$  和  $\gamma$ , 则我们即有熟知的 Kármán 相似性解, 这个解给出了和实验符合得很好的平均速度分布, 但  $q$  和  $\lambda$  在槽的中心与实验有较大的偏差, 在远离中心区, 理论解在定性上是和实验符合的。

为了便于求解方程(2·10), (2·9)和(2·8), 我们引进如下记号:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{y}{h} & P &= -\frac{1}{U_\tau} \frac{dU}{d\sigma} \\ k &= k_1 / \left( \frac{a_2}{b_2} - k_2 \right) & \varepsilon &= l/h \left( \frac{a_2}{b_2} - k_2 \right) \end{aligned} \quad (2\cdot11)$$

则(2·10), (2·9)和(2·8)分别成为:

$$\begin{aligned} -2\sigma P &= a \left( \frac{a_2}{b_2} \right)^2 \left( \frac{\lambda}{h} \right)^5 \left( 1 - \frac{\gamma}{a} \frac{a_2}{b_2} \frac{\lambda}{h} \right) \left( \frac{dP}{d\sigma} \right)^3 \\ \frac{dP}{d\sigma} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^3 &= k_1 P \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2 - \varepsilon \\ \frac{q}{U_\tau} &= \frac{a_2}{b_2} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^2 \frac{dP}{d\sigma} \end{aligned} \quad (2\cdot12)$$

在上述三个方程中有五个待定常数  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $a_2/b_2$ ,  $a$  和  $\gamma$ , 我们进一步引进尺度变换:

$$\frac{\lambda}{h} = C_1 \lambda' \quad P = C_2 P' \quad \sigma = C_3 \sigma' \quad (2\cdot13)$$

这里  $C_1$ ,  $C_2$  和  $C_3$  为常数, 同时选取:

$$C_1 = \frac{a}{\gamma} \frac{b_2}{a_2} \quad C_2 = \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{a_2}{b_2} \right)^2 \left( \frac{\gamma}{a} \right)^2 \quad C_3 = \frac{1}{k} \frac{a}{\gamma} \frac{b_2}{a_2} \quad (2\cdot14)$$

那么(2·12)中的三个方程成为:

$$\begin{aligned} \sigma' P' \lambda'^4 &= m(1 - \lambda')(P' \lambda'^2 - 1)^3 \\ \frac{dP'}{d\sigma'} \lambda'^3 &= P' \lambda'^2 + 1 & \frac{q}{U_\tau} &= \alpha_1 \lambda'^2 \frac{dP'}{d\sigma'} \end{aligned} \quad (2\cdot15)$$

平均速度分布为:

$$(U_\tau - U)/U_\tau = \alpha_2 \int_0^{\sigma'} P' d\sigma' \quad (2\cdot16)$$

在(2·15)和(2·16)中的常数  $m$ ,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  由下式决定,

$$\begin{aligned} m &= -\frac{a}{2} \left( \frac{a_2}{b_2} \right)^2 \frac{C_1^5 C_2^2}{C_3^4} \\ \alpha_1 &= \frac{a_2}{b_2} \frac{C_1^2 C_2}{C_3} & \alpha_2 &= C_2 \cdot C_3 \end{aligned} \quad (2\cdot17)$$

在(2·15)的三个方程中, 我们先用数值法求解  $P'$  和  $\lambda'$ , 然后再代入第三个方程求解  $q/U_\tau$ 。在(2·13), (2·14)和(2·17)中的三个常数必须由  $P$ ,  $q$  和  $\lambda$  的实验测量来决定。由于没有槽流  $\lambda$  的测量, 我们采用一个简单的方法决定之, 即取

$$m=0.04, C_3=3.33 \quad (2.18)$$

用来求解 (2.15) 中的  $P'$  和  $\lambda'$ ，并利用初始条件当  $\sigma'=0$ ， $\lambda'=1$  和  $P'=0$ 。与 Nikuradse 管的测量<sup>[9]</sup>比较得：

$$C_1=0.1400 \quad (2.19)$$

利用比较  $q/U_r$  在  $\sigma=0.7$  的理论值和 Comte-Belot<sup>[10]</sup> 的实验值，可发现：

$$\alpha_1=1.475 \quad (2.20)$$

同样把  $(U_r-U)/U_r$  和 Dönch<sup>[11]</sup> 和 Nikuradse<sup>[12]</sup> 的实验结果在  $\sigma=0.7$  进行比较，得：

$$\alpha_2=100.5 \quad (2.21)$$

从上述五个常数  $m$ ， $C_1$ ， $C_3$ ， $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ ，我们有：

$$\begin{aligned} k=0.0402 \quad C_2=30.2 \quad \frac{a_2}{b_2}=8.30 \\ \varepsilon=0.0249 \quad a=-2.91 \quad \gamma=-2.50 \end{aligned} \quad (2.22)$$

在图 1, 2, 3 中我们分别给出了理论和实验的比较，平均速度分布的理论值是和 Dönch 及 Nikuradse 的实验进行比较的。我们看到  $q/U_r$  和  $(U_r-U)/U_r$  在  $0 \leq \sigma \leq 1$  的绝大部分

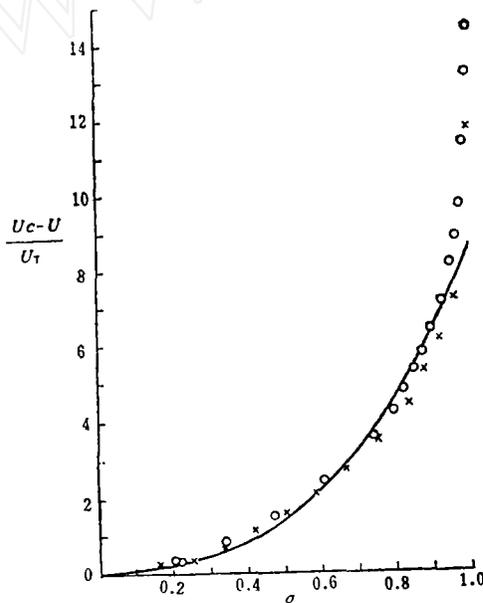


图 1

○ Dönch  
实验 × Nikuradse  
理论 —

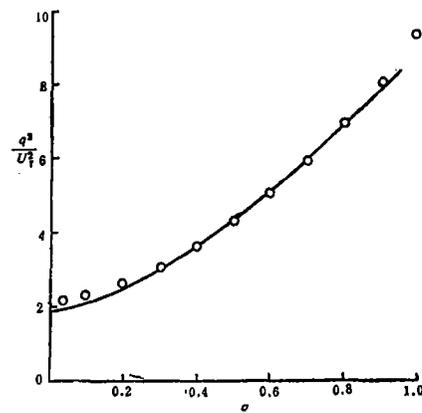


图 2

○ 理论  
— Comte-Belot 的实验

区域内和实验符合得比较好，只在紧靠槽流壁面的区域里，理论值比实验值为小。这是由于忽略三阶关联所造成的。如果考虑三阶关联，则结果会好些<sup>[6]</sup>。在图 2 中，我们把 Comte-Belot 的  $\overline{w_1^2}$ ， $\overline{w_2^2}$  和  $\overline{w_3^2}$  的实验相加给出了  $q^2$ 。因为没有槽流  $\lambda$  的实验值，我们在图 3 中给出了 Nikuradse 关于  $\lambda$  的圆管实验值作定性比较。

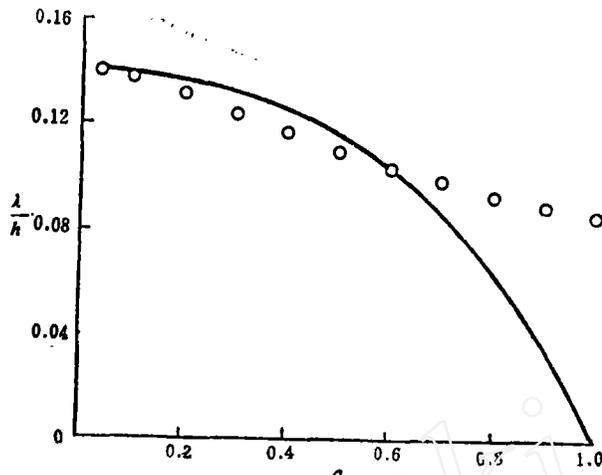


图 3

○ 理论  
 ——— Nikuradse 的圆管数据

### 三、平面湍尾流

现在我们把普通运动方程 (1.1), (1.2) 和准相似性条件 (1.4) 用于求解无穷圆柱后的平面湍尾流。选取  $ox$  轴为流体抵达圆柱前无扰动时的速度  $U_0$  的方向。为了便于应用一般相似性条件,我们考虑远离圆柱的下游运动,这时要求  $(x_0+x)/d \gg 1$ 。现在我们的条件为  $(x_0+x)/d > 400$ ,这里  $d$  是圆柱直径。重写平均速度  $U_x$ ,关联张量  $\overline{w_i w_j}$  和微尺度  $\lambda$  如下:

$$U_x = U_0 \left[ 1 - \sqrt{\frac{d}{x+x_0}} f(\eta) \right]$$

$$\overline{w_i w_j} = U_0^2 \frac{d}{x+x_0} f_{ij}(\eta) \quad (2.1)$$

$$q^2 = U_0^2 \frac{d}{x+x_0} I^2(\eta)$$

$$\lambda = \sqrt{d(x+x_0)} J(\eta)$$

这里  $\eta = \frac{y}{\sqrt{(x+x_0)d}}$ ,  $I^2 = f_{11} + f_{22} + f_{33}$ 。从 (3.1), 湍流 Reynolds 数  $R_\lambda$  为:

$$R_\lambda = \frac{q\lambda}{\nu} = R_d I J \quad R_d = \frac{U_0 \cdot d}{\nu} \quad (3.2)$$

根据现在的近似,平均运动方程 (1.1) 给出:

$$f + \eta f' = -2f'_{12} \quad (3.3)$$

$$f' = \frac{df}{d\eta} \quad f'_{12} = \frac{df_{12}}{d\eta}$$

积分 (3.3) 得:

$$\eta f = -2f_{12} \quad (3.4)$$

在二阶关联方程 (1.2) 中, 忽略三阶关联作用后, 我们有:

$$2f'f_{12} + f_{11} + \frac{\eta}{2}f_{11}' = -a_1 f''Jl^2 + b_1 \frac{l^3}{J} + \frac{2k}{R_d} \frac{f_{11}}{J^2} - \frac{2(k-5)}{3R_d} \frac{l^2}{J^2}$$

$$f'f_{22} + f_{12} + \frac{1}{2}\eta f_{12}' = -a_4 f''l^2 + \frac{2k}{R_d} \frac{f_{12}}{J^2} \quad (3.5)$$

$$f_{22} + \frac{\eta}{2}f_{22}' = -a_2 f''Jl^2 + b_2 \frac{l^3}{J} + \frac{2k}{R_d} \frac{f_{22}}{J^2} - \frac{2(k-5)}{3R_d} \frac{l^2}{J^2}$$

$$f_{33} + \frac{\eta}{2}f_{33}' = -a_3 f''Jl^2 + b_3 \frac{l^3}{J} + \frac{2k}{R_d} \frac{f_{33}}{J^2} - \frac{2(k-5)}{3R_d} \frac{l^2}{J^2}$$

常数  $a_1, a_2, a_3$  与  $b_1, b_2, b_3$  和在 (2.4) 中的定义具有相同意义。在自由湍流中 (3.5) 式的粘性项必须保留。

把 (3.5) 中的第一, 第三和第四个方程相加, 则得湍能方程:

$$2f'f_{12} + l^2 + \frac{\eta}{2}(l^2)' = -af''Jl^2 + \gamma \frac{l^3}{L_1} + \frac{10}{R_d} \frac{l^2}{J^2} \quad (3.6)$$

这里我们利用了附录 B 推得的守恒条件 (21);  $\gamma$  和  $L$  是常数。

在准相似条件 (1.4) 中, 由于均匀各向同性湍流中的  $R_0$  约为 25, 而湍尾流的  $R_d$  约为 1360, 因此  $R_0/R_d \ll 1$ , 在此条件下, 准相似性条件可以近似地写为:

$$l = \frac{R_e}{R_d} \frac{1}{J} + k_1 J |f'| + k_2 J^2 |f''| \quad (3.7)$$

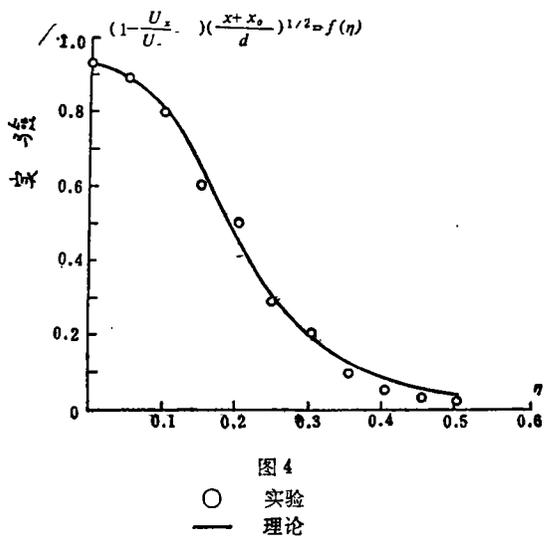
从 (3.3) 和 (3.4), (3.5) 的第二个方程为:

$$\frac{f'}{f} = \left(3/4 - \frac{k}{R_d} \cdot \frac{1}{J^2}\right) \eta / \left(f_{22} - \frac{1}{4}\eta^2 + a_4\right) \quad (3.8)$$

在求解这个问题中, 作者<sup>[15]</sup>注意到对  $\eta$  较小的条件下:

$$f = f^{(0)} = f_0 e^{-\sigma \eta^2} \quad (3.9)$$

是 (3.8) 式的一个近似解, 其中  $f_0$  和  $\sigma$  都是常数。同时注意到当  $\eta$  较大时 (3.9) 式仍为一个近似表示。在这个  $\eta$  较大的范围内,  $R_d$  近似为常数, 得到了以前所得到的结果<sup>[7]</sup>。他利用 (3.9) 作为一种近似值代入 (3.4), (3.6) 和 (3.7) 式去求解  $f_{12}$ ,  $l$  和  $J$ , 然后再从 (3.5) 式求  $f_{11}$ ,  $f_{22}$  和  $f_{33}$ , 把这些已求得的结果重新代入 (3.8) 式的右端, 再求进一步近似  $f^{(1)}$ , 这个迭代过程的重复可以得到第二个近似  $l, J, f_{11}, f_{22}, f_{33}$ , 它们和第一次近似相差不大。在图 4, 5, 6, 7 和 8 中, 我们给出了  $f, f_{12}$ ,



$q^2$ ,  $\overline{w_1^2}$  和  $\overline{w_2^2}$  理论和实验的比较, 结果是令人满意的。图 9 和图 10 给出了  $0 \leq \eta \leq 0.5$  时  $\lambda$  和  $R_\lambda$  的性态。

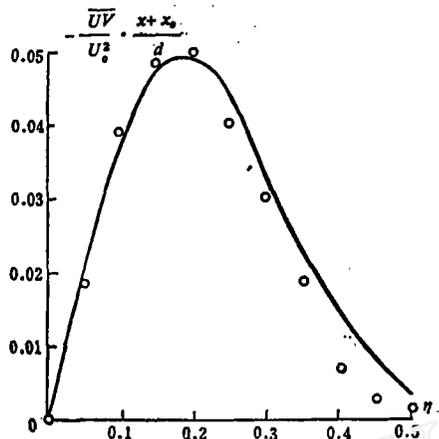


图 5

○ 实验  
— 理论

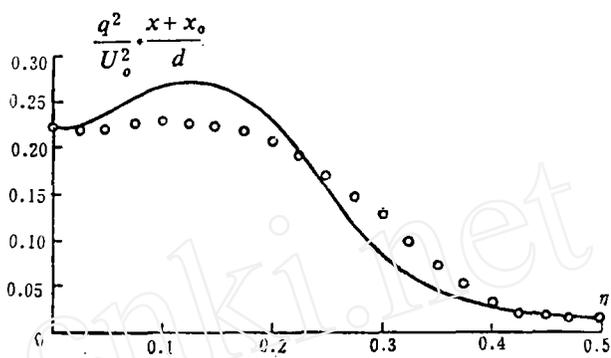


图 6

○ 实验  
— 理论

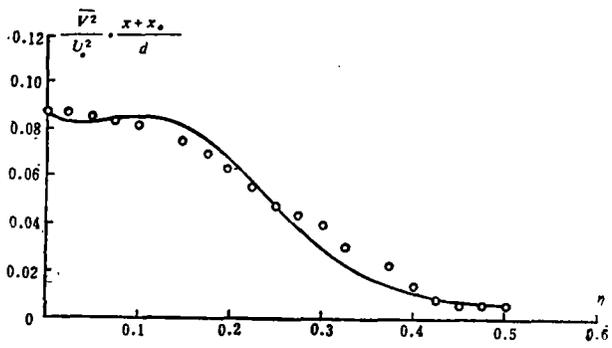


图 7

○ 实验  
— 理论

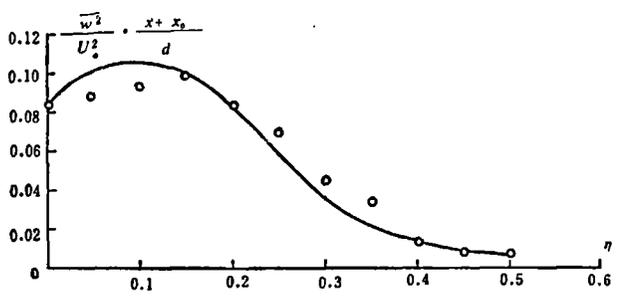


图 8

○ 实验  
— 理论

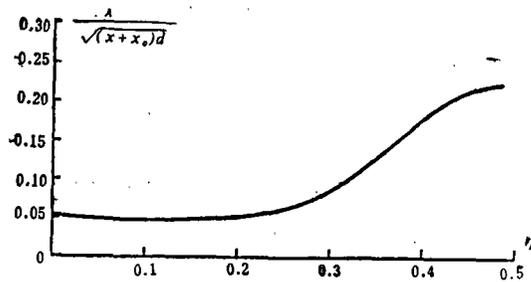


图 9

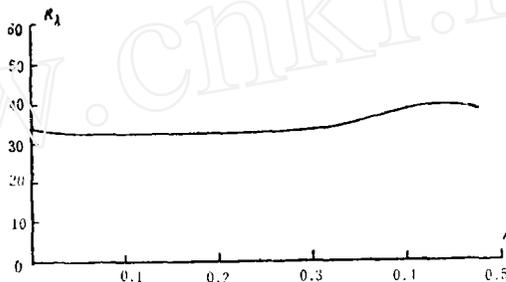


图 10

#### 四、讨论和结论

从和实验比较中我们可以看出，平面湍尾流的解比起湍槽流解更好一些，其原因是由于我们仅用了平均运动和二阶速度关联的方程式。事实上在 40 年代，我们就曾用这种方法处理过自由湍流（见文献〔2〕所引的参考），并得到和实验定性符合的结论。但现在的求解过程同样也可应用于求解壁流，如槽流问题等。

根据二阶速度关联的运动方程中三阶项和其它各项的比较，我们认为它们一般要小一些。但是，进一步的详细分析表明，在槽流和尾流的某些区域内，它们和方程中的其它项比较可具有相当大的值。为了改进理论的精确性，这也正是我们在附录 B 中的守恒关系 (21)  $g^{ik}b_{ik}$  中保留  $\alpha^i$  和  $\gamma$  这两项的原因。

从现在壁流和自由流两种不同类型的湍流的求解中，我们认识到在处理湍流问题时准相似性条件起到很大的作用，并可大大地简化求解手段。现在所用的求解方程中的截断方法是一种近似过程。显然，这个过程的进一步推广不仅可以得到和实验符合得更好的结果，而且可以去求解更高阶的速度关联。

最后，我要感谢谢象春、陈十一和黄永念同志。在进行这一项研究工作中，他们曾和我就基本概念和计算方法等方面开展了许多讨论。关于平面尾流的解是陈十一同志的硕士论文的概要。此外，我尤其要感谢谢象春同志在求解槽流问题时曾给予的协作。

## 附 录 A

均匀各向同性湍流的相似性条件由下式给出:

$$\frac{a}{\nu} \frac{da}{dt} = R_a + 1 \quad R_a = \frac{Ua}{\nu} \quad (1)$$

这里  $a$  和  $U$  分别作为湍流元的涡旋的特征尺度和特征速度<sup>[5,6]</sup>,  $R_a$  是涡旋雷诺数。在涡旋角动量守恒条件下, 函数  $U$  与  $a$  之间有关系式:

$$Ua^4 = U_0 a_0^4 \quad (2)$$

其中  $U_0, a_0$  是常数。

速度脉动的均方值假设为:

$$q^2 = \frac{C}{\nu} U^2 a^3 = \frac{C}{\nu} U_0^2 \frac{a_0^3}{a^2} \quad (3)$$

这里  $C$  是无量纲常数,  $V$  是具有体测量纲的常数。

湍流微尺度  $\lambda$  的定义为:

$$\frac{dq^2}{dt} = -10\nu \frac{q^2}{\lambda^2} \quad (4)$$

从 (1), (3) 和 (4) 我们得到:

$$\lambda^2 = \frac{2a^2}{R_a + 1} \quad (5)$$

考虑到 (2), (3) 和 (5), 准相似性条件 (1) 乃成为:

$$\frac{\lambda}{\nu} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3R_a}{R_a + 1} + 2 = \frac{1}{R_0} R_a^2 + 2 \quad (6)$$

这里  $R_0$  是常数并由下式给出:

$$R_0 = \frac{2CU_0 a_0^4}{3V\nu} = \frac{2q_0^2 a_0}{3U_0 \nu} \quad (7)$$

## 附 录 B

在计算守恒条件  $g^{ik} a_{m,ik}^n$ ,  $g^{ik} a_{m,ik}^{np}$  和  $g^{ik} b_{i,k}$  前, 我们先考虑积分,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{\omega_{,k} \omega_t} &= \frac{1}{2\pi} \iiint [U'_{,n} \overline{(w'^n w_t)'}_{,m}]_{,k} \frac{1}{r} dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint (\overline{W'^m W'^n W_t})'_{,m n k} \frac{1}{r} dV' \end{aligned} \quad (8)$$

(参考文献 [2] 中的 (4.7) 式) 中的被积函数,

$$[U'_{,n} \overline{(w'^n w_t)'}_{,m}]_{,k} \quad (9)$$

其中  $U'_{,n}$  (文 [2] 中的 (5.1)) 对  $\xi^p$  的级数展开:

$$U'_{,n} = U^m_{,n} + \xi^p U^m_{,n p} \quad (10)$$

于是 (9) 成为:

$$\begin{aligned} &U^m_{,n k} \overline{(w'^n w_t)'}_{,m} + U^m_{,n} \overline{(w'^n w_t)'}_{,m k} \\ &= U^m_{,n} \overline{(w'^n w_t)'}_{,m k} + U^m_{,n p} [\overline{(w'^n w_t)'}_{,m} \delta_k^p + \xi^p \overline{(w'^n w_t)'}_{,m k}] \end{aligned} \quad (11)$$

因此

$$\frac{1}{\rho}(\overline{\omega_{,k}w_l} + \overline{\omega_{,l}w_k}) = a^n{}_{mik}U_{,n} + a^{np}{}_{mik}U_{,np} + b_{ik} \quad (12)$$

其中

$$a^n{}_{mik} = \frac{1}{2\pi} \iiint [(\overline{w'^n w_i})'_{,mk} + (\overline{w'^n w_k})'_{,mi}] \frac{dV'}{r}$$

$$a^{np}{}_{mik} = \frac{1}{2\pi} \iiint \{ (\overline{w'^n w_i})'_{,m} \delta_k^p + (\overline{w'^n w_k})'_{,m} \delta_i^p$$

$$+ \xi^p [(\overline{w'^n w_k})'_{,mi} + (\overline{w'^n w_i})'_{,mk}] \} \frac{1}{r} dV' \quad (13)$$

$$b_{ik} = \frac{1}{4\pi} \iiint [(\overline{w'^m w'^n w_i})'_{,mnk} + (\overline{w'^m w'^n w_k})'_{,mni}] \frac{dV'}{r} \quad (1\cdot5)$$

从 (1.5) 我们有

$$\overline{w'^n w^i} = \overline{w'^n w_i} + q^2 \Phi_i^n(\eta, x, t) \quad (14)$$

$$\overline{w'^m w'^n w^i} = \overline{w'^m w'^n w_i} + p^3 \Phi_{,i}^{mn}(\eta, x, t)$$

其中  $\xi^i = x'^i - x^i$ ,  $\eta^i = -\frac{\xi^i}{\lambda}$ .

因此:

$$(\overline{w'^n w_i})'_{,m} = q^2 \frac{\partial \Phi_i^n}{\partial \xi^m} = q^2 \Phi_{,m}^n \quad (15)$$

$$(\overline{w'^m w'^n w_i})'_{,mn} = q^3 \frac{\partial^2 \Phi_{,i}^{mn}}{\partial \xi^m \partial \xi^n} = q^3 \Phi_{,i, mn}^{mn}$$

另外, 从 (14) 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\overline{w'^n w_i})'_{,m} = \frac{\partial q^3}{\partial x^k} \Phi_{,m}^n + q^2 \frac{\partial}{\partial x^k} (\Phi_{,m}^n)_{,\xi} - q^2 \Phi_{,m, k}^n \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\overline{w'^m w'^n w_i})'_{,mn} = \frac{\partial q^3}{\partial x^k} \Phi_{,i, mn}^{mn} + q^2 \frac{\partial}{\partial x^k} (\Phi_{,i, mn}^{mn})_{,\xi} - q^3 \Phi_{,i, mnk}^{mn}$$

由于守恒关系  $w^i{}_{,i} = 0$ , 我们得

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i} (\overline{w'^n w^i})'_{,m} = \frac{\partial q^2}{\partial x^i} \Phi^{ni}{}_{,m} + q^2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\Phi^{ni}{}_{,m})_{,\xi} - q^2 \Phi^{ni}{}_{,mi} \quad (17)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i} (\overline{w'^m w'^n w^i})'_{,mn} = \frac{\partial q^3}{\partial x^i} \Phi^{mni}{}_{,mn} + q^3 \frac{\partial}{\partial x^i} (\Phi^{mni}{}_{,mn})_{,\xi} - q^3 \Phi^{mni}{}_{,i}$$

从 (13) 的三个方程和 (17) 的两个方程, 我们有如下三个守恒关系:

$$g^{ik} a^n{}_{mik} = \frac{q^2}{\pi} \iiint \Phi^{ni}{}_{,mi} \frac{1}{r} dV' = \frac{1}{\pi} \iiint \left[ \frac{\partial q^2}{\partial x^i} \Phi^{ni}{}_{,m} + q^2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\Phi^{ni}{}_{,m})_{,\xi} \right] \frac{dV'}{r} \quad (18)$$

上式具有量级  $\lambda q^2/L$ ;

$$g^{ik} a^{np}{}_{mik} = \frac{1}{\pi} \iiint \left\{ q^2 \Phi^{np}{}_{,m} + \xi^p \left[ \frac{\partial q^2}{\partial x^i} \Phi^{ni}{}_{,m} + q^2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\Phi^{ni}{}_{,n})_{,\xi} \right] \right\} \frac{dV'}{r} \quad (19)$$

其中第一部分具有量级  $\lambda q^2$ ，而第二部分的量级为  $\lambda^2 q^2/L$ ，

$$g^{ikh} b_{ik} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial q^3}{\partial x^i} \iiint \Phi^{mni}{}_{,mn} \frac{dV'}{r} + \iiint \frac{\partial}{\partial x^i} (\Phi^{mni}{}_{,mn})_i \frac{dV'}{r} \right] \quad (20)$$

上式可用另一形式表达：

$$g^{ikh} b_{ik} = \frac{\partial q^3}{\partial x^i} \alpha^i + \frac{r}{L} q^3 \quad (21)$$

这里  $\alpha^i$  和  $\gamma$  是近似常数， $L$  是一个尺度， $\alpha^i$  和  $\gamma$  分别为：

$$\alpha^i = \frac{1}{2\pi} \iiint \Phi^{mni}{}_{,mn} \frac{dV'}{\gamma} \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{L}{2\pi} \iiint \frac{\partial}{\partial x^i} (\Phi^{mni}{}_{,mn})_i \frac{1}{\gamma} dV'$$

由于湍流速度脉动的相似性关系 (1.5) 和由它推得的结果 (16) 和 (17)，因此当我们忽略  $\sigma/L$  量级时，则如今严格的守恒关系 (18) 和 (20) 变成文献 [2] 中的 (5.4) 的近似式。

#### 考 文 献

- [1] Chou, P. Y., *Chin. Journ. of Phys.*, **4** (1940), 1—33.
- [2] Chou, P. Y., *Quart. of App. Math.*, **3** (1945), 38—54.
- [3] Rotta, J. C., *Zeit. für Phy.*, **129** (1951), 547—572.
- [4] Cf. Launder, B. E., *Stress Transport Closure—Into the Third Generation, Turbulent Shear Flows* (1979), Springer-verlag (Berlin) for the references therein.
- [5] 周培源、黄永念, *中国科学*, **18** (1975), 180—198.
- [6] 黄永念、周培源, *中国科学*, **29** (1981), 826—835; 953—964.
- 又曾发表在: *Proc. Ind. Acad. Sci. (Eng. Sci.)*, **4** (1981), 177—197.
- [7] 周培源, *中国科学*, **3** (1959), 281—297.
- [8] Chou, P. Y., *Quart of App. Math.*, **3** (1945), 198—209.
- [9] Nikuradse, J., *Forschung sarbeiten des Ver. Deutsch. Ing.*, 356 (1932).
- 由于在槽流中元  $\lambda$  的观测数据发表, 我们用管流中的实验数据作定性的比较。
- [10] Comte—Bellot, G., *Publ. Sci. Tech. Ministere de L'Air* 419 (1965).
- [11] Dönch, F., *Forschung sarbeiten des Ver. Deutsch. Ing.* 282 (1926).
- [12] Nikuradse, J., *Forschung sarbeiten des Ver. Deutsch. Ing.* 289 (1929).
- [13] 陈十一, 硕士论文, 北京大学力学系 (1984).
- [14] Hinze, J. O., *Turbulence, Second, Edition* (1975). McGraw—Hill (New York).

# On the Condition of Pseudo-Similarity and the Theory of Turbulence

*Zhou (Chon) Peiyuan*

(Academia Sinica and Peking University)

## Abstract

In this paper we consider the process of building velocity correlations of successive orders and the dynamical equations satisfied by them from the differential equations of turbulent velocity fluctuation as a method of successive approximation. For correlation functions of a given order required we can truncate the process and ignore the correlation of higher orders and their equations. The condition of pseudo-similarity which was introduced into the theory of homogeneous isotropic turbulence before is now generalized to the general turbulent shear flow. The theory is applied to the solutions of the pressure flow within a channel and the plane turbulent wake. Only the equations of mean motion and the equations of double velocity correlations are used. The terms of the triple correlation in the equations are ignored according to the present program. The agreement between theory and experiment, especially for the wake, is satisfactory. Further developments of the theory are also discussed.

---

(上接第 62 页)

The blast wave impulse is found to be one of the main factors affecting the response of the engine, consequently not only the magnitude of the overpressure, but also the duration of the blast loading should be taken into consideration.

Analysis of the blast wave-engine interaction has been made for turbojet engine at altitude, with different flight Mach numbers and engine rotational speeds. It is found that at higher r. p. m, the blast wave affects the engine less than at lower r. p. m, especially when the blast wave comes from the back of the engine pools.