

利用格林函数方法数值求解不可压 粘性流非线性问题的研究

张晓明 杨德全

(北京大学) (内蒙古民族师院)

韩庆书 吴江航

(北京大学) (北京大学)

1. 概述

本文对格林函数方法^[1]用以计算不可压粘性流非线性问题的能力进行了研究。该方法将定常运动的边值问题化为求解速度和边界应力的非线性积分方程, 由于积分方程系完全精确推得, 且在方程中可利用格林公式将速度、应力等物理量的微商转移为对基本解的微商, 因而在数值计算中处理比较容易, 且精度较高。

积分方程最后离散成为一非线性代数方程组, 在一定的雷诺数范围内可迭代解出。每次迭代只须求解边界点上的方程组, 得出未知的速度或应力。收敛后显式地计算流场中任意点上的速度和压力。

本方法的一个重要特点是积分方程被离散后, 仍满足不可压的约束条件, 计算压力的公式被单独分离出来, 免除了有限差分 and 有限元方法在计算不可压粘性流时所遇到的困难。

2. 基本方程

在[1]中将求解不可压粘性流的 Navier-Stokes 方程归结为求解下列非线性积分方程。

在文献[1]中将求解不可压粘性流的 Navier-Stokes 方程归结为求解下列非线性积分方程

$$\begin{aligned} c(X)v_k(X) = & \oint_{\partial\Omega} n_i(X_0)T_{ij}(W^k(X-X_0))_0v_j(X_0)d\Gamma_0 \\ & - \oint_{\partial\Omega} n_i(X_0)T_{ij}(V(X_0))_0w_i^k(X-X_0)d\Gamma_0 \\ & + \oint_{\partial\Omega} n_i(X_0)v_i(X_0)v_j(X_0)w_j^k(X-X_0)d\Gamma_0 \\ & - \oint_{\Omega} v_i(X_0)\frac{\partial w_i^k(X-X_0)}{\partial x_{i0}}v_j(X_0)d\Omega_0 \\ & k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

本文于 1985 年 6 月 15 日收到, 于 1986 年 3 月 6 日收到修改稿。

$$c(X) = \begin{cases} 1 & X \in \Omega \\ \frac{1}{2} & X \in \partial\Omega \\ 0 & X \notin \Omega \end{cases}$$

确定压力的显式公式为

$$\begin{aligned} p(X) = & \oint_{\partial\Omega} n_i(X_0) \left\{ q^i(X - X_0) [v_i(X_0)v_j(X_0) - T_{ij}(V(X_0))] \right. \\ & + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial q^i(X - X_0)}{\partial x_{j0}} v_i(X_0) \left. \right\} d\Gamma_0 \\ & - \int_{\Omega} v_i(X_0)v_j(X_0) \frac{\partial q^i(X - X_0)}{\partial x_{j0}} d\Omega_0, \quad X \in \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$T_{ij}(V) = -p\delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$T_{ij}(W^k) = -q^k\delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^k}{\partial x_i} \right)$$

$$w_i^k(X - X_0) = \begin{cases} -\frac{\text{Re}}{4\pi} \left[\delta_{ik} \ln \frac{1}{|X - X_0|} + \frac{(x_j - x_{j0})(x_k - x_{k0})}{|X - X_0|^2} \right], & n=2 \\ -\frac{\text{Re}}{8\pi} \left[\delta_{ik} \frac{1}{|X - X_0|} + \frac{(x_j - x_{j0})(x_k - x_{k0})}{|X - X_0|^3} \right], & n=3 \end{cases}$$

$$q^k(X - X_0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|X - X_0|} = -\frac{x_k - x_{k0}}{2\pi|X - X_0|^2}, & n=2 \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|X - X_0|} = \frac{x_k - x_{k0}}{4\pi|X - X_0|^3}, & n=3 \end{cases}$$

(1) 和 (2) 即为求解问题的基本方程。

3. 积分方程的数值解

将 $\partial\Omega$ 离散为 N 个边界单元 $\partial\Omega_\beta$, $\beta=1, 2, \dots, N$; 将 Ω 离散为 E 个单元 c_τ , $\tau=1, 2, \dots, E$ 。每个单元上的速度和应力用在其形心点的值来代表, 就有

$$\begin{aligned} c_\alpha v_{k\alpha} = & \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kij\alpha\beta} n_{i\beta} v_{j\beta} - \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n M_{kij\alpha\beta} t_{j\beta} \\ & + \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{kij\alpha\beta} n_{i\beta} v_{j\beta} v_{j\beta} \\ & - \sum_{\tau=1}^E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{kij\alpha\tau} v_{ic\tau} v_{jc\tau}, \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

其中

α 为 $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_N$, $c_1, c_2, \dots, c_E$

$v_{k\alpha} = v_k(X_\alpha)$, $n_{i\beta} = n_i(\partial\Omega_\beta)$, $v_{j\beta} = v_j(X_{\partial\Omega_\beta})$

$t_{j\beta} = n_j(\partial\Omega_\beta) T_{ij}(V(X_{\partial\Omega_\beta}))$, $v_{ic\tau} = v_i(X_{c\tau})$

$$c_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha \text{ 为 } \partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_N \\ 1, & \alpha \text{ 为 } c_1, c_2, \dots, c_E \end{cases}$$

系数

$$\begin{aligned} L_{kij\alpha\beta} &= \int_{\partial\Omega_\beta} T_{ij}(\mathbf{W}^k(\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{X}_0))_0 d\Gamma_0 \\ M_{kij\alpha\beta} &= \int_{\partial\Omega_\beta} w_i^k(\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{X}_0) d\Gamma_0 \\ N_{kij\alpha\gamma} &= \int_{c_\gamma} \frac{\partial w_i^k(\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{X}_0)}{\partial x_{j0}} d\Omega_0 \end{aligned}$$

对边界单元为直线段,区域单元为三角形及多边形的情况,诸几何系数全部解析地积分出简单的表达式。

利用迭代方法求解方程组(3)。在每次迭代中,可先解出边界 Γ_v 上的应力 $t_{i\beta}$, Γ_t 上的速度 $v_{j\beta}$ 。这只需要解一个阶数仅为 N (边界单元数) $\times n$ (问题的维数) 的线性代数方程组,即

$$\frac{1}{2} v_{ki}^{l+1} = \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kij\alpha\beta} n_{i\beta} v_{j\beta}^{l+1} - \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n M_{kij\alpha\beta} t_{i\beta}^{l+1}$$

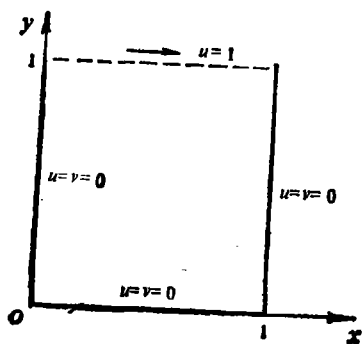


图1 空腔内不可压粘性流的边界条件

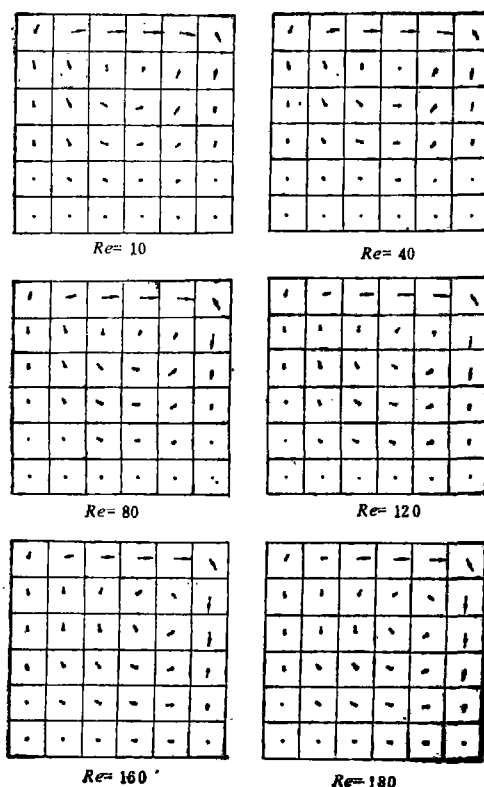


图2 空腔流动中不同 Re 下的速度场

$$+ \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{k\beta\alpha} n_{i\beta} v_{i\beta}^l v_{j\beta}^l - \sum_{\gamma=1}^E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{k\beta\alpha\gamma} v_{i\gamma}^l v_{j\gamma}^l. \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \alpha = \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$$

其中

$$v_{k\alpha}^l = \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{k\beta\alpha} n_{i\beta} v_{i\beta}^l - \sum_{\beta=1}^N \sum_{j=1}^n M_{k\beta\alpha} v_{j\beta}^l$$

$$+ \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{k\beta\alpha} v_{i\beta}^l v_{j\beta}^l n_{i\beta} - \sum_{\gamma=1}^E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{k\beta\alpha\gamma} v_{i\gamma}^{l-1} v_{j\gamma}^{l-1}.$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \alpha = e_1, e_2, \dots, e_E$$

此式中的边界应力, 边界速度由边界条件给定或由 (4) 的前一次迭代计算得到。

为了加速收敛, 可作一松弛运算

$$v_{k\alpha}^{l+1} = v_{k\alpha}^l + \omega(v_{k\alpha}^{l+1} - v_{k\alpha}^l) = \omega v_{k\alpha}^{l+1} + (1 - \omega)v_{k\alpha}^l$$

$0 \leq \omega \leq 1$, ω 一般可取 0.6—0.7 左右。

4. 算例与结论

我们计算了平面空腔内不可压的粘性流动, 其边界条件如图 1 所示。

表 1 在不同雷诺数和不同网格下迭代收敛情况

8×8			7×7			6×6		
Re	k	Eps×10 ⁻⁴	Re	k	Eps×10 ⁻⁴	Re	k	Eps×10 ⁻⁴
10	8	7.85	10	8	7.49	10	8	7.06
20	4	9.84	20	4	9.36	20	4	9.52
30	5	4.77	30	5	5.23	30	5	4.98
40	5	5.22	40	5	5.82	40	5	4.97
50	5	6.57	50	5	6.17	50	5	5.74
60	5	6.49	60	5	6.46	60	5	8.47
70	5	7.90	70	5	9.72	70	5	9.88
80	6	6.21	80	6	5.82	80	6	6.73
90	6	6.44	90	6	7.20	90	6	9.69
100	7	9.23	100	7	8.00	100	7	7.33
110	9	9.15	110	9	8.80	110	8	9.12
120	12	9.84	120	11	9.53	120	10	7.96
130	22	8.99	130	14	9.46	130	11	9.01
140	6	22.99	140	29	9.22	140	20	9.12
			150	5	49.81			

CPU: 8min10s			CPU: 8min5s					
						↓		
150	23	7.99	150	1	99.20			
160	29	15.59	160	9	97.95			
170	8	66.36	170	3	82.68			
			180	3	85.09			

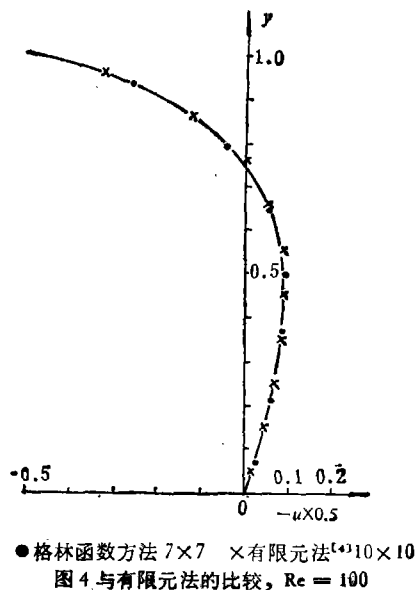
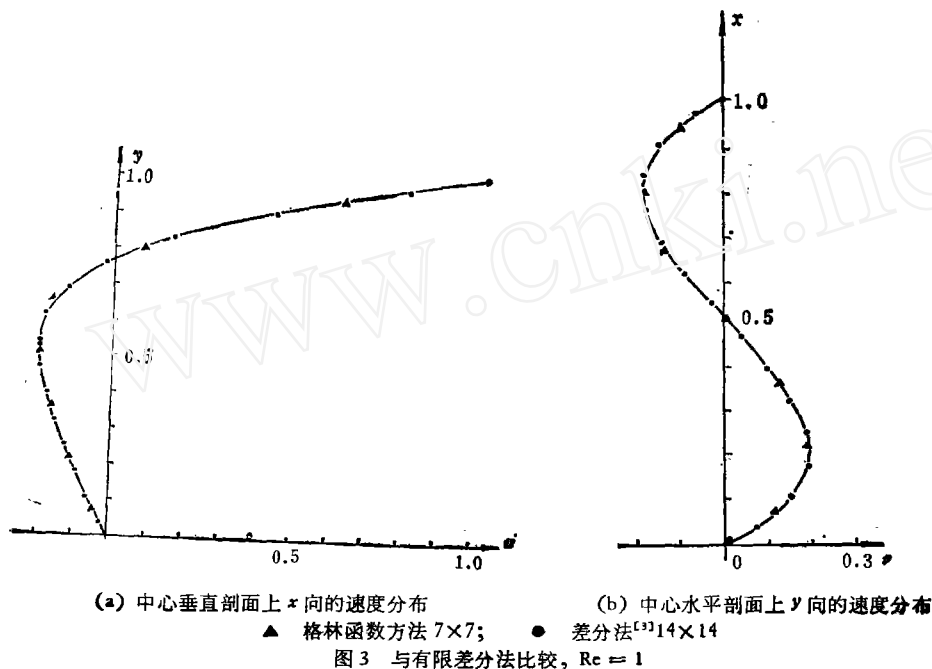
CPU: 6min26s			CPU: 4min34s		
--------------	--	--	--------------	--	--

本文采用 6×6, 7×7, 8×8 的正方形网格计算了从 $Re = 1$ 到 $Re = 180$ 的各种流动。表 1 表示迭代收敛情况及占用的机时, 如取初值速度为零对于 $Re = 100$ 的流动也只

需迭代 16 次就收敛,而在同样情况下,如 Michio Kumagai 所指出^[2],采用差分方法在网格为 21×21 时迭代次数为 135 次,网格为 41×41 时迭代次数为 210 次。这些都表明本方法用来求解非线性问题收敛的速度较快。

图 2 显示了在各个不同 Re 下的流动情况,随 Re 增大,涡心逐渐向右移,表明流场的非线性特点逐渐显示出来。

图 3 和图 4 分别为与有限差分^[3]和有限元^[4]的比较。表明本文方法能以较少的网格就得到这两种方法必须用较多的网格才能得到的结果。



参 考 文 献

- [1] 吴江航, 数值求解不可压粘性流体定常运动的格林函数方法, 力学学报, 16, 5(1984), 425—433.
- [2] Michio Kumagai, A Numerical Study of Wind-Driven Circulation in Rectangular Cavities, *Journal of Computational Physics*, 47(1982), 130—145.
- [3] Al-Sanea, S. A., Pun, W. M. and Spalding, D. B., Computation of Two-Dimensional Elliptic Flows, Including Heat Transfer, *Computer Methods in Fluids*, Edited by Morgan, K., Taylor, C., Brebbia, C. A., Pentech Press, London Plymouth (1980), 217—256.
- [4] Schneider, G. E. and Raithby, G. D., Finite Element Analysis of Incompressible Fluid Flow Incorporating Equal Order Pressure and Velocity Interpolation, *Computer Methods in Fluids*, Edited by Morgan, K., Taylor, C., Brebbia, C. A., Pentech Press, London Plymouth (1980), 49—84.

STUDIES ON NUMERICALLY SOLVING NONLINEAR PROBLEMS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW USING GREEN'S FUNCTION METHOD

Zhang Xiaoming
(Peking University)

Yang Dequan
(Inner Mongolia National Teacher's College)

Han Qingshu Wu Jianghang
(Peking University)

Abstract

Studies on numerically solving nonlinear problems of viscous incompressible flow using Green's function method are presented in this paper. Computing results for cavity flows at $Re=1$ to 180 are given and compared with finite difference and finite element methods, indicating the less number of iterations and the same accuracy obtained by using the less number of grids in this method.