

抗震结构的模糊可靠性分析

王光远 王文泉

(哈尔滨建筑工程学院)

提要 本文提出了考虑地震荷载和结构抗力的模糊性的情况下,结构可靠性的分析方法。为此,定义了模糊地震烈度、模糊反应谱、结构的模糊反应、模糊随机约束的满足度等概念及其计算方法。此外,还指出了基于结构模糊可靠性的结构优化设计的途径。

一、结构可靠性分析中的模糊因素

一个结构在规定的工作年限 T 内,在预期的应用中能正常工作的概率,称为该结构的“可靠度”,记为 R 。与其相反,不能正常工作的概率称为“失效概率”,记为 P_f 。显然有

$$R = 1 - P_f \quad (1)$$

所以,结构的可靠性分析也就是合理地估算失效概率 P_f 的问题。

为了研究可靠性分析中所包含的随机性和模糊性,首先讨论只有一种失效形式的结构(可称为简单结构)的情况。这时失效概率 P_f 和结构可靠度 R 分别为

$$P_f = P(R \leq S) \quad (2)$$

$$R = P(S < R) \quad (3)$$

式中 R 代表结构的抗力, S 代表 T 期限内的最大荷载效应, $P(A)$ 代表事件 A 的概率。

目前,大家都已认识到结构抗力 R 和最大荷载效应 S 所具有的随机性,实际上它们还具有强烈的模糊性,特别是对抗震结构。分述如下。

1. 荷载最大效应的模糊性 在文献[1—3]中我们已经指出了地震烈度具有强烈的模糊性,此外建筑场地的土质条件也严重影响地震荷载的效应,而场地土的分类标准也是模糊的。关于这个问题,后面将详细讨论。

2. 结构抗力的模糊性 结构或构件的抗力与结构允许破坏程度有关,而后者有强烈的模糊性。例如结构的破坏程度可区分为在允许应力范围内工作、基本正常、中等破坏、严重破坏和不能修复等,所有这些等级都是模糊的。即使对我们常用的允许应力 $[\sigma]$ 而言,目前规定一个确定性的范围也是很很不合理的。例如 $[\sigma] = 2000 \text{ kg/cm}^2$ 意味着 2000 是允许的,2001 就是不允许的,但二者并无实质性的差别。一般情况下,从绝对允许到绝对不允许应该有一个中间过渡阶段,也就是说应力的允许范围不是一个闭区间,而应是一个具有过渡性边界的模糊区间^[4-6]。

结构的允许破坏程度也就是结构正常工作的范围,可以理解为结构某种最大反应 S

本文于 1985 年 4 月 15 日收到,1986 年 2 月 4 日收到修改稿。

(主要是应力或位移)的模糊允许区间 R 。它的隶属函数具有图 1 所述的性质。这就是说反应 S 落入闭区间 $[S^L, S^U]$ 时, $\mu_R(S) = 1$, 结构绝对安全; S 落在区间 $[S^L - d^L, S^U + d^U]$ 之外时, $\mu_R(S) = 0$, 结构将不能正常工作; S 落入过渡区间时, $0 < \mu_R(S) < 1$, 在不同程度上是允许的。 $\mu_R(S)$ 的过渡部分, 可根据问题的性质选择某种曲线, 也可以近似地取为倾斜直线。

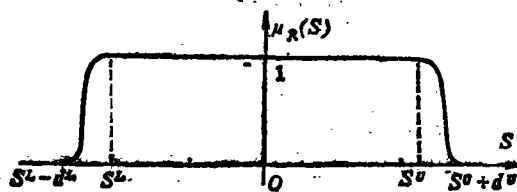


图 1

这样,具有单失效形式的简单结构(或构件)的模糊可靠度即可定义为

$$\mathcal{R} = P(\underline{M}) = P(\underline{S} \subseteq R) \quad (4)$$

式中 $\underline{S}$ 为荷载模糊最大效应, R 为结构模糊抗力范围(模糊允许区间), $\underline{M} = \underline{S} \subseteq R$ 代表“结构在 T 期限内正常工作”这一模糊随机事件。所谓正常工作实际上就是一个模糊约束条件。由于约束的模糊性,对此条件可以有不同的满足程度,称为“满足度”,记为 β 。 $\underline{M} = \underline{S} \subseteq R$ 就代表具有各种不同满足度 $\beta (0 < \beta \leq 1)$ 的意义下,模糊最大效应 $\underline{S}$ 落入模糊允许区间 R 这一事件。

和成批生产的机电产品不同,土建工程一般是单个生产,因此结构抗力的随机性并无频度概率的含义,主要表现为不清楚该结构的抗力究竟如何。所以有些文献称它为“主观概率”^[8]。从模糊数学的角度来看,我们认为,这就是说结构抗力 R 应以模糊性为主,其随机性可近似地合并在模糊性中考虑。从这个意义上来看,我们可以认为,在式(4)中,荷载最大效应 $\underline{S}$ 具有随机性和模糊性,而结构抗力 R 只有模糊性。这样,问题的复杂程度和难度就大为降低了。

二、模糊事件的概率

模糊概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 的概念和定义是由经典概率空间扩张而来的^[10,11], 其中基本空间 Ω 的元素 ω 代表基本事件, $\mathcal{A}$ 为 Ω 上全体模糊事件的集合, P 是 $\mathcal{A}$ 上的概率。模糊事件 A 的概率定义为如下的 Lebesgue 积分

$$P(A) = \int_{\Omega} \mu_A(\omega) dP \quad (5)$$

式中 $\mu_A(\omega)$ 为基本事件 ω 对模糊事件 A 的隶属度。

当 ω 可用实数表示时,模糊事件 A 的概率

$$P(A) = \int_{\Omega} \mu_A(\omega) p(\omega) d\omega \quad (6)$$

式中 $p(\omega)$ 为概率密度函数。

当基本空间为离散集时,模糊事件的概率

$$P(\underline{A}) = \sum_i \mu_A(\omega_i) P(\omega_i) \quad (7)$$

它也就是隶属函数 $\mu_A(\omega)$ 的期望值。

三、地震荷载的随机性和模糊性

当结构为已知时,地震荷载的效应 S 决定于建筑场地的地震烈度和场地土的类型,前者具有随机性和模糊性;而后者由于建筑场地是给定的,所以只具有模糊性而无随机性。 T 年限内建筑场地地震最大烈度的估算是“地震危险性分析”的任务。后者牵涉到震源机制,地震波向地面各点的传播以及反射,折射过程,它不仅与传播途径和介质有关,而且与地形有关。这是个极为复杂的问题。我们只能利用现有的研究成果,认为地震烈度的随机性已由地震危险性分析的方法解决。也就是认为建筑场地 T 年内可能发生的最大地震烈度的分布函数为已知,本文的任务是要进一步考虑地震烈度的模糊性。

地震烈度作为地面运动强烈程度的综合度量,它必然是逐渐变化的,从而应该具有连续论域。但是为了充分利用现有地震危险性分析的研究成果,可以仍然采用离散的 12 等级烈度。这时每个烈度 I 应当看作连续烈度论域 $[0, 12]$ 上的一个模糊子集 I 。我们建议,模糊烈度 I 的隶属函数可近似地取(图 2)

$$\mu_I(i) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(i - I + \frac{1}{2} \right) \pi + 1 \right] \quad (8)$$

$$i \in [I - 1, I + 1]$$

这就是说由于烈度评定的多因素性和模糊性,我们所预测的烈度 I , 例如 VII 度,实际上是在 $i = 6-8$ 度之间的模糊分布,在烈度分界点 $i = 6.5$ 及 $i = 7.5$ 处, $\mu_I = 0.5$ 。这是比较合理的。这样定义的烈度可称为模糊烈度(例如模糊 VII 度)。

我国现行抗震结构设计规范所规定的地震加速度反应谱 $A(T)$ 如图 3 所示(以重力加速度 g 为单位,规范中记为 $\alpha(T)$,称为地震影响系数),其中参数 A_m 与烈度有关,而 T_0 与场地类别有关(见表 1)。

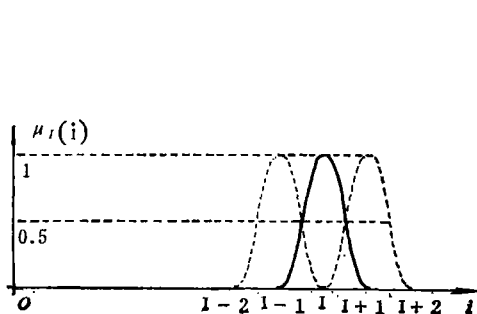


图 2

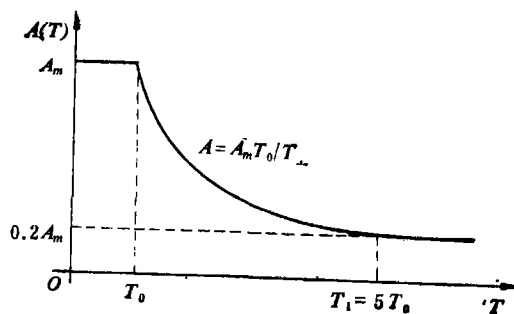


图 3

表 1

地震烈度	VII	VIII	IX
A_m	0.23	0.45	0.90
场地类别	I	II	III
T_0	0.2	0.3	0.7

当把离散烈度论域转变为连续烈度论域时, 参数 A_m 与地震烈度之间的关系为

$$A_m(i) = 0.9 \times 2^{i-9} \quad (9)$$

或

$$i(A_m) = 1.4427 \ln A_m + 9.152 \quad (10)$$

在模糊烈度情况下, 根据扩展原理, 把式 (8) 中的 i 换为式 (10) 中的 $i(A_m)$, 即可得出模糊参数 A_m 的隶属函数

$$\mu_{A_m}(A_m) = \frac{1}{2} [\sin(1.4427 \ln A_m + 9.652 - 1)\pi + 1]$$

$$A_m \in [A_{m1}, A_{m3}] \quad (11)$$

如图 4 所示, 其中 $A_{m1} = 0.9 \times 2^{i-10}$, $A_{m2} = 0.9 \times 2^{i-9}$, $A_{m3} = 0.9 \times 2^{i-8}$

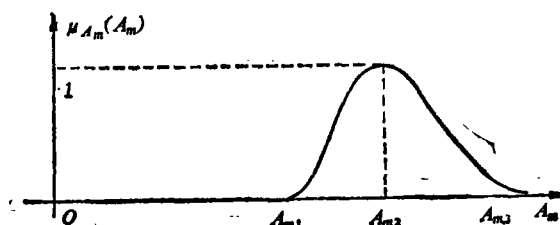


图 4

参数 T_0 决定于场地类别。由于场地已经选定, 所以场地类别并无随机性, 但有很大的模糊性。所以 T_0 是一个模糊参数。

评定场地类别需要考虑的因素很多, 例如土壤性质, 复盖层厚, 土层结构, 地下水情况, 平均剪切波速, 地基土容许承载力等。因而应该采用多因素综合评判^[7]的方法评定场地类别。若按规范, 共有 I、II、III 类场地, 评定所得模糊场地等级向量为

$$\underline{D} = d_1/\text{I} + d_2/\text{II} + d_3/\text{III}$$

其中 d_1, d_2, d_3 分别为该场地对各类别的隶属度。这时即可按下式^[7]决定出设计中所应采用的 T_0 。

$$T_0 = \sum_{i=1}^3 d_i^2 T_{0i} / \sum_{i=1}^3 d_i^2 \quad (12)$$

其中 T_{0i} 即场地等级为 i 时 T_0 应取值 (见表 1)。

具有模糊参数 A_m 和 T_0 的反应谱称为模糊反应谱。由于采用式 (12), 在计算中可取用综合评定所得非模糊量 T_0 来代替该模糊量。

四、随机模糊地震作用下结构的反应

设根据地震危险性分析, 已知建筑场地在工作年限 T 内发生烈度为 I 的地震的概率为 P_I 。如前所述我们应将该烈度理解为模糊烈度 I , 并可根据场地各因素模糊综合评定的场地类别按式 (12) 求出场地参数 T_0 。这时即可计算在该烈度地震作用下结构的模糊随机反应。结构产生此反应的概率自然也是 P_I , 而模糊反应的隶属函数可按本节的方法求出。

根据现行抗震结构设计规范, 在非模糊地震荷载(确定性反应谱)作用下, 结构的最大反应 S 与 A_m 具有线性关系

$$S = K A_m \quad (13)$$

式中常数 K 是 $A_m = 1$ 时结构的最大反应, 在 T_0 已知情况下可按规范规定的方法求出。

在 A_m 为模糊数的情况下, 根据扩展原理, 将式 (13) 中的 $A_m = S/K$ 代入模糊参数 A_m 的隶属函数 (11) 即得模糊最大反应 S 的隶属函数

$$\mu_S(S) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(1.4427 \ln \frac{S}{K} + 9.652 - I \right) \pi + 1 \right] \quad (14)$$

$$S \in [K A_{m1}, K A_{m2}]$$

模糊反应 S 的隶属函数 $\mu_S(S)$ 与模糊参数 A_m 的隶属函数 $\mu_{A_m}(A_m)$ 的图形相似, 因为二者的基础变量之间存在正比关系。

五、对“正常工作”的满足度

在具有模糊烈度 I 的地震作用下结构正常工作这一模糊事件 M , 实质上就是一个模糊的约束。

$$M = S \subseteq R \quad (15)$$

对此模糊条件的满足度 β 也就是对模糊事件 M 的隶属度 $\mu_M(I)$ 。满足度 β 自然与结构的模糊抗力 R 有密切关系。设 R 的隶属函数具有图 1 所示的性质。

模糊反应 S 的隶属函数 $\mu_S(S)$ 图形与其模糊允许范围 R 的隶属函数 $\mu_R(S)$ 图形的相对位置(图 5) 刻划了 S 对模糊约束 M 的满足度, 也就是隶属度 $\mu_M(I)$ 。因而可定义在模糊烈度 I 情况下

$$\mu_M(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_R(S) \mu_S(S) dS / \int_{-\infty}^{\infty} \mu_S(S) dS \quad (16)$$

当 $\mu_S(S)$ 完全被 $\mu_R(S) = 1$ 的区间覆盖时(图 5a), $\mu_M = 1$; 当 $\mu_S(S)$ 完全位于 $\mu_R(S)$ 范围之外时(图 5c), $\mu_M = 0$; 当 $\mu_S(S)$ 和 $\mu_R(S)$ 相互搭接时(图 5b), $\mu_M \in [0, 1]$ 。这样, 式 (15) 中的模糊约束就是具有各种不同满足度意义下 S 属于 R 。

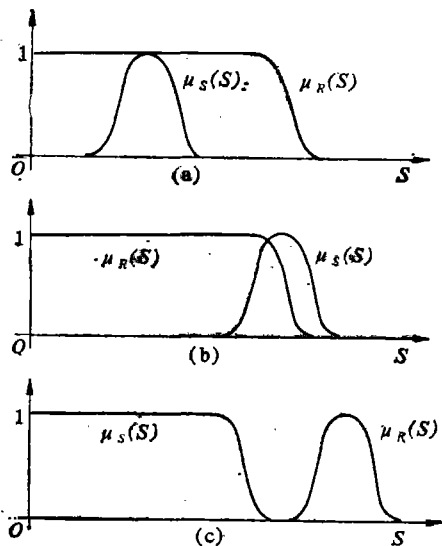


图 5

在计算式 (16) 时, 可引入变量代换 (9) 和 (13), 即

$$S = 0.9K \times 2^{i-9}; \quad i = 1.4427 \ln \frac{S}{K} + 9.152$$

当 $\mu_R(S)$ 的过渡段取直线时, 在分子和分母中均将出现如下形式的积分

$$\begin{aligned} & \int a^i \left[\sin \left(i - l + \frac{1}{2} \right) \pi + 1 \right] di \\ &= \frac{a^i}{\ln a} \left[1 + \frac{\sin \left(i - l + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{\ln a} \cos \left(i - l + \frac{1}{2} \right) \pi}{1 + \pi^2 / \ln^2 a} \right] + c \end{aligned} \quad (17)$$

式中 a 为常数, c 为积分常数。这时, 式 (16) 的分母为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_S(S) dS = 0.6437 \times 2^{l-9} K \quad (18)$$

利用这些公式可使计算得到简化。

六、简单结构的可靠性分析

根据前面所述研究结果, 即可按如下程序计算简单结构抗震的模糊可靠度

1. 识别影响建筑场地的潜在震源, 并利用现代的地震危险性分析的方法, 求得工作年限 T 期限内场地可能发生的最大地震烈度的某种概率分布。然后换算最大烈度为模糊烈度 $I_6 = \underline{\text{VI}}$, $I_7 = \underline{\text{VII}}$, $I_8 = \underline{\text{VIII}}$, $I_9 = \underline{\text{IX}}$ 和 $I_{10} = \underline{\text{X}}$ 的概率 $P(I_j) (j = 6-10)$ 。由于 VI 度以下对结构没有影响, X 度以上无法考虑, 可只考虑 $I_j = 6-10$ 五种烈度。

2. 对场地类别进行综合评定, 按公式 (12) 计算参数 T_0 。

3. 按抗震结构设计规范计算 $A_m = 1$ 时简单结构的最大反应 K , 它是一个常量。

4. 根据问题的要求 (结构正常工作的定义) 给出结构最大反应 S 的模糊允许范围 R 的隶属函数 $\mu_R(S)$ (参看图 1)。

5. 将隶属函数 $\mu_R(S)$ 和式 (14) 给出的 $\mu_S(S)$ 代入式 (16), 分别求出各种烈度 $I_j (j = 6-10)$ 情况下的满足度 $\mu_M(I_j)$ 。积分时可利用公式 (17) 和 (18)。

6. 此简单结构的抗震可靠度即为

$$P(\underline{M}) = \sum_{j=6}^{10} P(I_j) \mu_M(I_j) \quad (19)$$

例题 1 求图 6 所示水塔在地震作用下的抗倾覆可靠度。把塔身质量的 $1/4$ 折算到水箱水平, 将水塔简化成单自由度体系。设其自振周期为 $T = 0.7$ 秒, 顶部集中重量为 $W = 180,000$ 公斤, 塔高 $H = 2000$ 厘米。结构影响系数取为 $c = 0.5$ 。

基底弯矩的模糊允许范围如图 7 所示。该建筑场地在未来 50 年设计基准期内, 可能发生的地震的最大模糊烈度 I 及相应的发生概率 $P(I)$ 如表 2 所示。模糊场地等级向量为 $\underline{D} = [0.1, 0.5, 0.8]$ 。

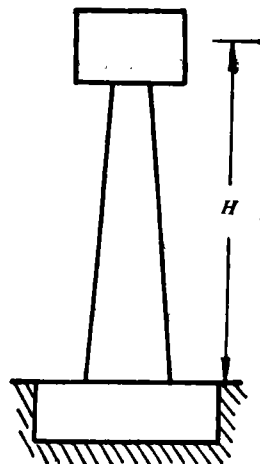


图 6

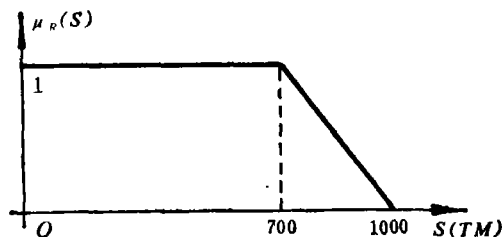


图 7

表 2

I	6°	7°	8°	9°	10°
$P(I)$	0.46	0.40	0.10	0.03	0.01

解 将 $D = [0.1, 0.5, 0.8]$ 及表 1 第四行代入式 (12) 得

$$T_0 = \frac{0.1^2 \times 0.2 + 0.5^2 \times 0.3 + 0.8^2 \times 0.7}{0.1^2 + 0.5^2 + 0.8^2} = 0.583 \text{ 秒}$$

由于 $T_0 < T$, 故从表 3 和表 1 可得地震影响系数

$$A(T) = A_m T_0 / T = \frac{0.583}{0.7} A_m = 0.833 A_m$$

按规范规定的方法,求得基底弯矩为

$$M = Q_0 H = c A(T) W H = 0.5 \times 0.833 A_m \times 180,000 \times 2000 \\ = 149.94 \times 10^6 A_m$$

即 $A_m = 1$ 时的基底弯矩为

$$K = 149.94 \times 10^6 \text{ 公斤} \cdot \text{厘米} \approx 1500 \text{ 吨米}$$

代入式 (14) 得模糊倾覆力矩 S 的隶属函数

$$\mu_S(S) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(1.4427 \ln \frac{S}{K} + 9.652 - I \right) \pi + 1 \right]$$

$$S \in [K A_{m1}, K A_{m3}] = [1350 \times 2^{I-10}, 1350 \times 2^{I-8}]$$

$$(I = 6, 7, 8, 9, 10)$$

利用公式 (16)~(18) 可得地震作用下水塔对“正常工作”的满足度 $\mu_M(I)$ 如表 3 所示。

表 3

I	6	7	8	9	10
$\mu_M(I)$	1.00	1.00	0.73	0.03	0.00

于是,由式 (19) 即求得水塔在未来地震作用下抗倾覆的可靠度为

$$P(M) = 0.46 \times 1.00 + 0.40 \times 1.00 + 0.10 \times 0.73 \\ + 0.03 \times 0.03 + 0.01 \times 0.00 = 0.93$$

七、结 语

1. 本文重点提出简单结构在地震荷载作用下的模糊可靠性分析的概念和方法。
2. 更合理的结构优化设计,应该建立在结构模糊可靠性分析的基础上,其数学模型可写成: 求结构设计向量 $\bar{x}$, 使目标函数

$$W(\bar{x}) = C(\bar{x}) + (1 - \mathcal{R})D \rightarrow \min$$

并满足 $\mathcal{R} \subseteq R^L$ 。式中 $C(\bar{x})$ 为结构造价、 D 为结构失效带来的损失, $(1 - \mathcal{R})D$ 为损失期望, R^L 为结构可靠度的模糊下限。失效损失 D 值可根据调查研究的结果进行估计, 在优化过程中视为已知常量。

这样的优化设计, 可以全面地考虑结构整体的功能, 而一般优化设计的强度约束是从各个构件局部进行考虑的, 特别对并联的结构或子结构, 某些个别构件的破坏并不影响整个结构总的功能。关于这个问题, 我们也将另文讨论。

参 考 文 献

- [1] 王光远, 地震烈度的模糊综合评定及其在抗震结构设计中的应用, 地震工程与工程振动, 4(1982).
- [2] Wang Guang-yuan, The fuzzy comprehensive evaluation of earthquake intensity and its application to Structural aseismic design, Proc. of 8th world Conference of Earthquake Engineering, San Francisco (1984).
- [3] Wang Guang-yuan, Two-stage comprehensive evaluation of earthquake intensity and application, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13, 1(1985). 地震烈度的二级模糊综合评定, 地震工程与工程振动, 1(1984).
- [4] Wang Guang-yuan and Wang Wen-quan, *Fuzzy Optimum Design of Structures*, Engineering Mechanics in Civil Engineering (Edited by A. P. Boresi and K. P. Chong), published by ASCE (1984).
- [5] Wang Guang-yuan and Wang Wen-quan, Fuzzy Optimum Design of Structures, *Engineering Optimization*, 8, pp. 291~300, (1985), 结构模糊优化设计, 计算结构力学及其应用, 2(1984).
- [6] Wang Guang-yuan And Wang Wen-quan, fuzzy optimum design of aseismic structures, Proc. of PRC-US-Japan Trilateral Symposium/workshop on Engineering for Multiple Natural Hazard Mitigation, Jan., 6~12(1985), Beijing, China. 抗震结构的模糊优化设计, 土木工程学报, 2(1985).
- [7] 王光远, 论综合评判几种数学模型的实质及其应用, 模糊数学, 4(1984).
- [8] P. Thoft-Christensen and Baker M. J. *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer-Verlag (1982).
- [9] Amstadter, B. L., 可靠性数学(彭兴文译), 科学出版社(1978).
- [10] 浅居喜代治等, 模糊系统理论入门(赵汝怀译), 北京师范大学出版社(1982).
- [11] 汪培庄, 模糊集合论及其应用, 上海科学技术出版社(1983).

FUZZY RELIABILITY ANALYSIS OF ASEISMIC STRUCTURES

Wang Guangyuan Wang Wenquan

(Harbin Architectural and Civil Engineering Institute)

Abstract

The structural reliability analysis taking account of fuzziness in both earthquake loads and structural resistances is advanced in this paper. For this purpose, the concepts such as fuzzy earthquake intensity, fuzzy response spectrum, fuzzy structural response and satisfaction degree of fuzzy-random constraint are defined. Besides, the way for optimal design based on fuzzy reliability of the structures is put forward.