

非线性振动中的非高斯矩方法

刘 强 丁文镜
(北京工业学院) (清华大学)

摘要 本文在 Fokker-Planck 方程的基础上,把非高斯矩方法推广到更具有一般性的非线性系统,用来研究非线性系统对高斯白噪声激励的响应。此法是一种有实用价值的方法。它对系统的非线性没有限制,而且,适用于平稳和非平稳情况。对本质非线性问题,仍能达到较高的精度,数值计算也是方便的。

一、前 言

根据非线性的程度,一般把系统分为弱非线性及强非线性(本质非线性)两类。对于强非线性系统,其非线性特性占有主导地位,与线性系统相比较有本质性差别^[1]。用等效线性系统代替强非线性系统会有较大的误差^[2,3]。这意味着用统计线性化及高斯矩方法求解强非线性问题有时达不到较高的精度。因此,促进了非高斯矩方法的发展。

本文在文献[5]和[6]的基础上,从 Fokker-Planck 方程出发,把非高斯矩方法推广到非线性更具有一般性的情况,构造出 FP 方程在矩方程意义下的近似解。统计线性化方法、高斯矩方法和 S. H. Crandall 的结果^[6]都是本方法的特殊情况。

二、非高斯矩方法

对于非线性随机振动系统

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = h(t)w(t), \quad (2.1)$$

其中 g 为 x 和 $\dot{x}$ 的非线性函数; $h(t)$ 为调幅函数; $w(t)$ 为平稳零均值高斯白噪声,其相关函数为 $R_w(\tau) = 2\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ 为单位脉冲函数。

根据 Ito 型随机微分方程理论^[1],系统(2.1)的二维转移概率密度函数满足著名的 FP 方程

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial t} &= x_2 \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial(gP)}{\partial x_2} - h^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} \\ P(x_1, x_2, 0/a, b) &= \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - b) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$; a, b 为常量,是系统的初始状态; $P(x_1, x_2, t)$ 为转移概率密度。

求解方程(2.2)相当困难,至今只找到了几种特殊情况的精确解。尽管如此,由于(2.2)式给出系统响应最基本的概率描述,所以研究 FP 方程有很重要的意义。非高斯矩

本文于 1984 年 11 月 27 日收到,1986 年 4 月 2 日收到修改稿。

方法就是一种 FP 方程的高阶近似解法.

把系统 (2.1) 响应的转移概率密度函数展开成如 (2.3) 式所示的级数形式

$$P(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1(t)\sigma_2(t)} \exp\left[-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\right] \cdot \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(t) H_i^1 H_j^2 \quad (2.3)$$

其中 $y_k = [x_k - \mu_k(t)]/\sigma_k(t)$; $\mu_k(t) = E x_k$; $\sigma_k^2(t) = E(x_k - \mu_k)^2$; $k = 1, 2$; $H_i^1 = H_i(y_1)$; $H_j^2 = H_j(y_2)$; $c_{ij}(t) = E(H_i^1 H_j^2)/(i!j!)$; 且知 $c_{00} = 1$, $c_{01} = c_{10} = c_{20} = c_{02} = 0$. 这里 $H_i(\cdot)$ 和 $H_j(\cdot)$ 分别为 i 阶和 j 阶 Hermite 正交多项式.

利用 (2.3) 式把 FP 方程 (2.2) 改写成

$$\left. \begin{aligned} L(y) = & \frac{\partial P}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \\ & + \frac{1}{\sigma_1} (\sigma_2 y_2 + \mu_2) \frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial(gP)}{\partial y_2} - \frac{\hbar^2}{\sigma_1^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} = 0 \\ \mu_1(0) = & a, \quad \mu_2(0) = b, \quad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0 \\ c_{ij}(0) = & 0, \quad (i+j \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

对于任意权函数 $\phi(y_1, y_2)$ 下式成立

$$\iint_{-\infty}^{\infty} L(y) \phi(y_1, y_2) dx_1 dx_2 = 0, \quad (2.5)$$

根据 (2.3) 式及 Hermite 多项式的正交性, 把 ϕ 选为双重 Hermite 多项式, 即

$$\phi(y_1, y_2) = H_k^1(y_1) H_l^2(y_2) = H_k^1 H_l^2 \quad (2.6)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} H_k^1 H_l^2 L(y) dx_1 dx_2 &= 0 \\ \mu_1(0) = & a, \quad \mu_2(0) = b, \quad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0 \\ c_{ij}(0) = & 0, \quad (i+j \neq 0), \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

方程 (2.7) 是响应向量 $(x_1, x_2)^T$ 的一组特殊的矩方程, 可用它求得 (2.3) 式中的 c_{ij} 及 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$.

不失一般性, 设

$$g(x_1, x_2) = \beta x_1 + \eta x_2 + \varepsilon f(x_1, x_2) \quad (2.8)$$

且令

$$A_{kl} = k!l!c_{kl} = E(H_k^1 H_l^2),$$

计算 (2.7) 式中的各项 (有关 Hermite 正交多项式的性质见附录), 有

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} H_k^1 H_l^2 \frac{\partial P}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} H_k^1 H_l^2 \frac{1}{\sigma_1^2} [-\dot{\mu}_1 \sigma_1 - (x_1 - \mu_1) \dot{\sigma}_1] \frac{\partial P}{\partial y_1} \sigma_1 \sigma_2 dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1} H_l^2 [\dot{\sigma}_1 H_k^1 + (\dot{\mu}_1 + y_1 \dot{\sigma}_1) k H_{k-1}^1] P \sigma_1 \sigma_2 dy_1 dy_2 \\ &= \frac{\dot{\mu}_1}{\sigma_1} k A_{k-1,l} + \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} [(k+1) A_{kl} + k(k-1) A_{k-2,l}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

按照上式的推导方法, 还可得到

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} H_k H_l^2 \frac{\partial P}{\partial y_1} \frac{\partial y_2}{\partial t} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{\dot{\mu}_2}{\sigma_1} l A_{k,l-1} + \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} [(l+1)A_{k,l} + l(l-1)A_{k,l-2}] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} H_k H_l^2 \frac{\partial P}{\partial t} dx_1 dx_2 \\ &= A_{k,l} - \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} A_{k,l} - \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} A_{k,l} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} H_k H_l^2 \frac{1}{\sigma_1} (\sigma_2 y_2 + \mu_2) \frac{\partial P}{\partial y_1} dx_1 dx_2 \\ &= -\frac{\mu_2}{\sigma_1} k A_{k-1,l} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (k A_{k-1,l+1} + l A_{k-1,l-1}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sigma_2} \iint_{-\infty}^{\infty} H_k H_l^2 \frac{\partial(gP)}{\partial y_1} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\sigma_2} \iint_{-\infty}^{\infty} l H_k H_{l-1}^2 [\beta x_1 + \eta x_2 + g f(x_1, x_2)] P \sigma_1 \sigma_2 dy_1 dy_2 \\ &= \frac{l}{\sigma_2} (\eta \mu_2 + \beta \mu_1) A_{k,l-1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \beta l (A_{k+1,l-1} + k A_{k-1,l-1}) \\ & \quad + \eta l [A_{k,l} + (l-1)A_{k,l-2}] + \frac{gl}{\sigma_2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) H_k H_{l-1}^2 P \sigma_1 \sigma_2 dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$- \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_2^2} H_k H_l^2 h^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} dx_1 dx_2 = -\frac{l(l-1)}{\sigma_2^2} h^2 A_{k,l-2} \quad (2.14)$$

根据 (2.9)–(2.14) 式, (2.7) 式被整理成

$$\begin{aligned} & A_{k,l} + \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} k [A_{k,l} + (k-1)A_{k-2,l}] + \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} l [A_{k,l} + (l-1)A_{k,l-2}] \\ & - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} k [A_{k-1,l+1} + l A_{k-1,l-1}] + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \beta l [A_{k+1,l-1} + k A_{k-1,l-1}] \\ & + \eta l [A_{k,l} + (l-1)A_{k,l-2}] - \frac{l(l-1)}{\sigma_2^2} h^2 A_{k,l-2} \\ & + \frac{gl}{\sigma_2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) H_k H_{l-1}^2 P \sigma_1 \sigma_2 dy_1 dy_2 \\ & + \frac{\dot{\mu}_2}{\sigma_1} k A_{k-1,l} + \frac{\dot{\mu}_2}{\sigma_2} l A_{k,l-1} - \frac{\mu_2}{\sigma_1} k A_{k-1,l} \\ & + \frac{l}{\sigma_2} (\eta \mu_2 + \beta \mu_1) A_{k,l-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\mu_1(0) = a, \mu_2(0) = b, \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$$

$$A_{k,l} = 0, k+l \neq 0$$

截断 (2.3) 式中的级数, 构造 N 阶近似转移概率密度函数, 如 (2.16) 式所示.

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_1(t)\sigma_2(t)} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) \right] \cdot \sum_{i,j=0}^{i+j=N} c_{ij}(t) H_i^1 H_j^1 \quad (2.16)$$

从方程组 (2.15) 中取出相应的方程, 解 (2.16) 式中的待定参数 c_{ij} 、 σ_1 、 σ_2 、 μ_1 和 μ_2 , 即可得到 FP 方程的 N 阶近似解。这就是非高斯矩方法的一般形式。

方程组 (2.15) 关于 σ_1 和 σ_2 是非线性的, 关于 $A_{k,l}$ 是线性的。对于非平稳情况, 该方程组是常微分方程组, 在平稳情况退化为代数方程组。显然, 当 N 较大时只能用数值法求解。求得转移概率密度函数, 即可得到系统随机响应统计特性的基本描述。如果 N 足够大, 可指望达到较高的精度。

如果对系统响应特性有足够的了解, (2.3) 式的级数可作相应简化。例如, 系统仅为刚度非线性, 取下列形式的级数对于减少计算量和提高精度都是有利的。

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) \right] \cdot \sum_{i=0}^N c_{i0} H_i^1, \quad (2.17)$$

这乃是文献 [6] 所研究的情况。

令 N 等于 2, 则 (2.16) 式定义的概率密度函数退化为高斯的。按照 (2.15) 式可导出以下结论: 在平稳零均值情况下, 统计线性化方法和高斯矩方法乃是 N 等于 2 的非高斯矩方法。当 N 大于 2 时, 非高斯矩方法通常比统计线性化方法和高斯矩方法取得更好的结果。

顺便指出, 令 $k=1, l=0$, 在平稳情况, 按 (2.15) 式可得到 $\mu_2=0$ 。这意味着无论非线性取何种形式, 在平稳状态的速度均值恒为零。

三、非高斯矩方法的两种特殊情况

1. 线性平稳情况

此时, $\varepsilon=0$, 由 (2.15) 式能导出熟知的结果

$$\sigma_2^2 = h^2/\eta; \quad \sigma_1^2 = h^2/\eta\beta; \quad c_{ij} = 0, \quad i+j \neq 0 \quad (3.1)$$

2. 刚度非线性的平稳情况

此时, $g(x_1, x_2) = f_1(x_1) + \eta x_2$, FP 方程相应的精确解

$$P_{\text{exa}} = C \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \eta x_2^2 - \int_0^{x_1} f_1(\xi) d\xi \right) / h^2 \right] \quad (3.2)$$

其中 C 为标准化系数。如果取 $h = \sqrt{\eta}$, 便是文献 [6] 所研究的情况。利用 (2.15) 和 (2.17) 式, 得到方程组

$$\left. \begin{aligned} l=1, & -\frac{k}{\sigma_1} k A_{k-1,0} + \frac{1}{\sigma_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) H_k P d x_1 d x_2 = 0 \right\} \\ k=0, & l=2, \quad -2h^2 + 2\eta\sigma_2^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由此得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= 1 \\ E \left[\frac{k}{\sigma_1} H_{k-1} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \right] &= E \left[f_1(x_1) H_k \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

以上结果与文献[6]完全一致。可见本文的方法比文献[6]更具有—般性, 是对后者的推广。

四、应用非高斯矩方法的实例

例1 研究具有精确解的系统

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)\dot{x} + x = h\omega \\ p_{\text{c.i.s.}} = C \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) / h^2 \right] \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 C 为标准化系数, h 为常数。由于系统具有对称性,因而 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 。这时,在平稳情况的(2.15)式为

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} k(A_{k-1,l+1} + lA_{k-1,l-1}) - \frac{l(l-1)}{\sigma_2^2} h^2 A_{k,l-2} \\ & + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} l(A_{k+1,l-1} + kA_{k-1,l-1}) + \frac{1}{2} l\sigma_2^2 [A_{k,l+2} + 3lA_{k,l} \\ & + 3(l-1)^2 A_{k,l-2} + (l-1)(l-2)(l-3)A_{k,l-4}] \\ & + \frac{1}{2} l\sigma_1^2 [A_{k+2,l} + (2k+1)A_{k,l} + k(k-1)A_{k-2,l} \\ & + (l-1)A_{k+2,l-2} + (l-1)(2k+1)A_{k,l-2} \\ & + (l-1)k(k-1)A_{k-2,l-2}] = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

对 $N=2, 4, 6, 8$ 四种情况求解,数值计算结果列表于后。

$$N=2, \quad \sigma_{N=2}^2 = 0.70711h \quad (4.3)$$

$$N=4, \quad \sigma_{N=4}^2 = 0.76376h \quad (4.4)$$

$$N=6, \quad \sigma_{N=6}^2 = 0.78898h \quad (4.5)$$

$$N=8, \quad \sigma_{N=8}^2 = 0.79756h \quad (4.6)$$

且有, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$; $A_{i,i} = A_{j,j}$, $A_{i,j} = 0$ (当 i 或 j 为奇数时)。

(4.3)~(4.6)分别为二至八阶近似解,根据(4.1)式,得到均方值的精确解

$$\sigma_{\text{c.s.}}^2 = 0.797885h \quad (4.7)$$

将其与各阶近似解对比, $N=2$ 的结果最差。后者是统计线性化法和高斯矩方法的结果。当 N 增大时,按本文方法给出的结果连续改善:当 $N=8$ 时,结果已相当好。

图1给出了高斯矩方法($N=2$)和非高斯矩方法($N=8$)的一维概率密度的图形。

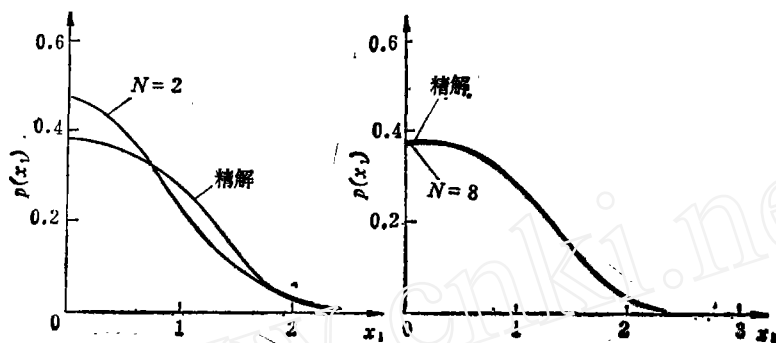


图 1

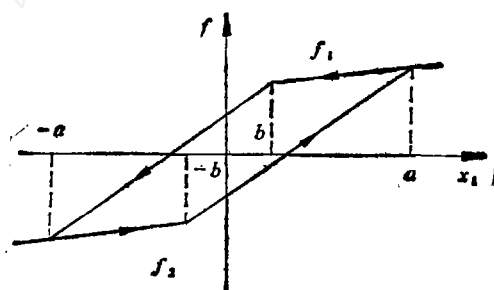


图 2

并与精确结果作对比。

例 2 具有滞环特性的非线性系统对平稳白噪声的稳态响应。

非线性系统的运动方程为

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + f(x_1, x_2) = h\omega \quad (4.8)$$

其中 $f(x_1, x_2)$ 表示滞环特性, 取图 2 所示的形式。当 $\dot{x} > 0$ 时, 恢复力对应于上枝 f_1 。当 $\dot{x} < 0$ 时, 对应于下枝 f_2 。且有关系式

$$f_1(x) = -f_2(-x) \quad (4.9)$$

为应用 (2.15) 式, 首先计算积分

$$\begin{aligned} G_{kl}^{(N)} &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) H_k H_l^* P dx_1 dx_2 \\ &= \sum_{i+j=N}^{i+j=N} [1 - (-1)^{l+j+k+i}] c_{ii} J_{iikl} \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中

$$J_{iikl} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H_i^2 H_l^* e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_1(x_1) H_k H_l^* e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 \quad (4.11)$$

根据附录中 (A.4) 式, 计算出积分

$$\begin{aligned} J_{iikl} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_1(x_1) H_k H_l^* e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^a (A_1 x_1 + B_1) H_k H_l^* e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 + \int_a^b (A_2 x_1 + B_2) H_k H_l^* e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_b^{\infty} (A_1 x_1 - B_1) H_k^1 H_l^1 e^{-\frac{1}{2} y_1^2} dy_1, \\
& = A_1 \sigma_1 [S_{k+1,i}(-\infty, a1) + S_{k+1,i}(b1, \infty)] + B_1 [S_{k,i}(-\infty, a1) \\
& \quad - S_{k,i}(b1, \infty)] + A_1 \sigma_1 k [S_{k-1,i}(-\infty, a1) + S_{k-1,i}(b1, \infty)] \\
& \quad + A_2 \sigma_1 S_{k+1,i}(a1, b1) + B_2 S_{k,i}(a1, b1) + A_2 \sigma_1 k S_{k-1,i}(a1, b1), \quad (4.12)
\end{aligned}$$

则有

$$J_{iikl} = S_{ii}(0, \infty) J J_{kli}, \quad (4.13)$$

式中 $a1 = a/\sigma_1$, $b1 = b/\sigma_1$; A_1, A_2, B_1, B_2 分别为分段线性函数 (图 2) 的斜率及截距; $S_{ii}(\alpha_1, \alpha_2)$ 如附录中 (A.4) 式所示。

由于系统的对称性, 有 $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $c_{ij} = 0$ (当 $i + j = 0$ 奇数时), 综合 (4.10)–(4.13) 式和 (2.15) 式, 得到

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} k (A_{k-1,l+1} + l A_{k-1,l-1}) - \frac{l(l-1)}{\sigma_1^2} h^2 A_{k,l-2} \\
& + \eta l [A_{k,l} + (l-1) A_{k,l-2}] + \frac{l}{\sigma_2} G_{k,l-1}^{(N)} = 0 \quad (4.14)
\end{aligned}$$

附表中给出 $N = 4$ 的两个数值结果, 并将其与高斯矩方法的结果比较, 最大的误差 (σ_1) 达到百分之十四。特别, 当 $N = 2$ 时, (4.14) 式退化为

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_1^2 + \sigma_1 G_{10}^{(2)} &= 0 \\ -2h^2 + 2\eta\sigma_1^2 + 2\sigma_2 G_{01}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

对应于足够大的 $|a1|$, $b1$ 和 $B_2 = 0$, 可算出

$$G_{10}^{(2)} \approx A_2 \sigma_1, \quad G_{01}^{(2)} \approx 2B_2 \sqrt{2\pi} = 0 \quad (4.16)$$

则有

$$\sigma_2^2 = h^2/\eta, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2/A_2 \quad (4.17)$$

能与线性情况的结果一致。

附表 滞环非线性系统的随机响应

$A_1 = 0, B_1 = -1.5, A_2 = 1.0, B_2 = 0.5$ $h = 2.0, \eta = 1.0$	$A_1 = 0, B_1 = -1.5, A_2 = 1.0, B_2 = 0.5$ $h = 5.0, \eta = 1.0$
$N = 2$ $\sigma_1 = 3.25891, \sigma_2 = 1.93067$	$N = 2$ $\sigma_1 = 20.8252, \sigma_2 = 4.98857$
$N = 4$ $\sigma_1 = 3.68426, \sigma_2 = 1.92048$ $c_{04} = 0.00384, c_{13} = -0.00137$ $c_{22} = 0.01882, c_{40} = 0.11729$	$N = 4$ $\sigma_1 = 23.4372, \sigma_2 = 4.98660$ $c_{04} = 0.00023, c_{13} = -0.000043$ $c_{22} = 0.00135, c_{40} = 0.11230$

由以上二例可看出, 非高斯矩方法处理本质非线性系统的随机振动问题有明显优点, 比统计线性化法和高斯矩法准确。数值计算也方便。象具有滞环的较复杂的非线性系统, 此法也能得到令人满意的结果。因此, 对于计算精度较高的非线性随机振动问题可用此法求解。

五、多自由度非线性系统的非高斯矩法

前面介绍的单自由度非线性系统的非高斯矩方法能推广到多自由度情况。为简单起见, 此处仅介绍平稳情况。为此, 将系统的运动方程写成状态方程形式

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{h}\omega \quad (5.1)$$

其中 $\bar{x}$, $\bar{f}$ 为 n 维向量; $\bar{h}$ 为 n 维常向量; ω 是平稳零均值高斯白噪声, 其相关函数

$$R_\omega(\tau) = 2\delta(\tau).$$

与系统 (5.1) 相应的 FP 方程为

$$L(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (j_i \ell^j) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [(\bar{h}\bar{h}^T)_{ij} P] = 0 \quad (5.2)$$

取近似的概率密度函数为

$$P(\bar{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n} \exp \left[-\frac{1}{2} \bar{y}^T \bar{y} \right] \Sigma_{c_{l_1 l_2 \cdots l_n}} H_{l_1}^1 H_{l_2}^2 \cdots H_{l_n}^n \quad (5.3)$$

其中 $y_i = (x_i - \mu_i)/\sigma_i$; $\mu_i = E x_i$, $\sigma_i^2 = E(x_i - \mu_i)^2$; $i = 1, 2, \cdots$; $H_{l_i}^i = H_{l_i}(y_i)$; $H_{l_i}(\cdot)$ 为 l_i 阶 Hermite 正交多项式。令

$$\iint \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_{M_1}^1 H_{M_2}^2 \cdots H_{M_n}^n L(\bar{x}) d\bar{x} = 0 \quad (5.4)$$

将 (5.3) 式代入上式, 经过分部积分 (5.4) 式可化成

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \iint \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_j}{\sigma_j} H_{M_1}^1 H_{M_2}^2 \cdots H_{M_{j-1}}^{M_{j-1}} \cdots H_{M_n}^n l_j P d\bar{x} \\ & + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n h_i h_j \frac{M_i M_j}{\sigma_i \sigma_j} A_{M_1 \cdots (M_{i-1}) \cdots (M_{j-1}) \cdots M_n} \\ & + \sum_{i=1}^n h_i^2 \frac{M_i(M_i-1)}{\sigma_i^2} A_{M_1 \cdots (M_{i-2}) \cdots M_n} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中

$$A_{l_1 l_2 \cdots l_n} = E \left(\prod_{i=1}^n H_{l_i}^i \right) = \left(\prod_{i=1}^n l_i! \right) c_{l_1 l_2 \cdots l_n} \quad (5.6)$$

(5.5) 式表明, 求多自由度非线性振动系统的随机响应可以用非高斯矩方法, 但计算量较大。

附录 关于 Hermite 正交多项式

定义式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}) \quad (A.1)$$

性质

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} H_n(x) &= n H_{n-1}(x), & H_{n+1}(x) &= x H_n(x) - n H_{n-1}(x) \\ H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x), & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= n! \delta_{mn} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d}{dx} [e^{-1/2x^2} H_{i-1}(x)] = -e^{-1/2x^2} H_i(x) \quad (\text{A.2})$$

关于积分

$$S_{mn}(a, b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2} H_m(x) H_n(x) dx \quad (\text{A.3})$$

当 $n > 1$ 时, 对上式分部积分, 则有

$$S_{mn}(a, b) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} H_m H_{n-1} e^{-1/2x^2} \Big|_a^b + n S_{m, n-1}$$

重复运用上式, 得到

$$\begin{aligned} S_{mn}(a, b) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^n \frac{m!}{(m-j)!} H_{m-j} H_{n-j-1} e^{-1/2x^2} \Big|_a^b, \quad n > m \\ S_{mn}(a, b) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!}{(m-j)!} H_{m-j} H_{n-j-1} e^{-1/2x^2} \Big|_a^b \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b n! e^{-1/2x^2} dx, \quad n = m \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

参 考 文 献

- [1] Soog, T. T., Random differential equations in science and engineering, New York, Academic Press (1973).
- [2] Hundal, M. S., *J. Sound and Vibration*, 64, 3(1979), 371.
- [3] Apetaur, M., *J. Sound and Vibration*, 62, 1(1979), 141.
- [4] Fuuer, A. T., *Int. J. Control*, 31, 5(1971), 841.
- [5] Assaf, S. A., *Int. J. Control*, 23, 4(1967), 477.
- [6] Crandall, S. H., *Int. J. Nonlinear Mech.*, 15, 415(1980), 303.
- [7] Beaman, J. J., *J. Dyn. Meas. & Control, ASME*, 103, 1(1981), 14.

NON- GAUSSIAN MOMENT METHOD FOR RANDOM VIBRATION OF NONLINEAR SYSTEMS

Liu Qiang Ding Wenjing
(Tsinghua University)

Abstract

This paper is about the extension of non-gaussian moment method to more general nonlinear systems in terms of the Fokker-Planck equation. this extended method is applied to study the random responses of nonlinear systems subject to Gaussian white noise excitation. Non-Gaussian moment method is of pratical value. It has no restriction on the nonlinearities of systems and can be used in stationary and non-stationary cases. Even for the problem of nature non-linearity, the more accurate approximation can be obtained. In addition, the numerical calculations are convenient.