

# 一种新型的平板弯曲单元

丁浩江 周卫宇 孙丽波  
(浙江大学)

**摘要** 本文依据二类变量的广义变分原理,构造了一种新型的考虑横向剪切影响的任意四边形四节点的板单元。这种板单元对板的厚度有相当宽的适用范围,且可得到显式的刚度矩阵,因此具有通用性好、精度高、计算时间省的特点。

## 一、引言

本文建立单元的方法是基于“杂交法”和“混合法”的思想,但又有所不同。应用具有三广义位移的平板弯曲理论的二类变量广义变分原理<sup>[1]</sup>,位移模式及内力模式可预先独立地假定,结果可使弯矩与位移具有同样的计算精度。与“杂交法”不同之处,在于内力不用事先满足平衡方程,这就要比“杂交法”更方便;而与“混合法”不同之处,不是直接用内力作为未知量,而是与杂交法一样采用一组无明显物理意义的内力参数作为未知量,通过一些变换,可得到显式的刚度矩阵,这样不仅减少了形成刚度矩阵的计算时间,而且提高了计算精度。

平面应力单元曾由 R. L. Taylor 和李明瑞研究过\*,这种单元比常用平面单元具有精度高,计算量少的优点。本文研究平板弯曲单元,它除了具有上述优点外,更具有同时适用于厚板计算与薄板计算的特点。在“薄板”问题中,横向剪切变形是被忽略的,其变形完全由位移 $w$ 描述,依据薄板理论,已经提出了许多平板弯曲单元,这些单元不适宜应用于要考虑横向剪切变形影响的场合。依据三广义位移平板理论来构造的单元<sup>[1,7]</sup>,能适用于较厚的板,但当板变薄时与经典理论相比有较大的误差。显然,设计一种板单元,而对剪切刚度有相当宽的适用范围,将是有意义的。特别希望当剪切刚度趋于无穷大时,能趋于薄板理论解。本文依据的变分原理中具有剪切余应变能密度 $V''$ 这一项,当剪切刚度趋于无穷大时,这一项便会自动趋近于零,三广义位移理论便回到经典薄板理论。因此基于此变分原理建立的板单元对于板的厚度具有相当宽的适用范围,本文曾计算了厚跨比为0.0001至0.4的若干情况,均得到满意的结果,说明这种单元对于板的厚度具有相当宽的适用范围。

## 二、有限元公式

### 1. 广义势能

三广义位移平板弯曲理论中的二类变量的广义势能<sup>[1]</sup>

本文于1984年11月1日收到,1985年8月11日收到修改稿。

\* R. L. Taylor & 李明瑞“建议一种新型的四边形四节点平面单元”待发表。

$$\Pi_2 = \iint_{\Omega} \left( \mathbf{M}^T \mathbf{X} - \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M} \right) d\Omega - \iint_{\Omega} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{W} d\Omega + \int_{S_0} \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{W} dS \quad (2.1)$$

式中  $S_0$  是外力已知的边界, 已知位移假定已满足, 各矩阵记号与文献 [1] 所用各量的关系是

$$\mathbf{M} = [M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^T$$

$$\mathbf{X} = \left[ -\frac{\partial \phi_x}{\partial x}, -\frac{\partial \phi_y}{\partial y}, -\frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right]^T \quad (2.2)$$

$$\mathbf{W} = [w, \phi_x, \phi_y]^T$$

$$\bar{\mathbf{P}} = [p, m_x, m_y]^T \quad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = [-\bar{Q}_n, \bar{M}_x, \bar{M}_y]^T$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D(1-\nu^2)} & \frac{-\nu}{D(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{D(1-\nu^2)} & \frac{1}{D(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{D(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2. 位移及内力模式

设取单元形状为四节点的任意四边形, 以对角线的分角线作为局部坐标系

$$(o''x''y''z''),$$

然后以单元形心  $o'$  为坐标原点, 将上述坐标系平移到  $o'$  建立单元局部坐标系  $(o'x'y'z')$ .

坐标变换关系式

$$\mathbf{X}' = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{W}' = \mathbf{T}\mathbf{W} \quad (2.6)$$

其中

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix};$$

$\mathbf{X} = [x, y]^T$ ;  $\phi = \langle (x, x') \rangle$ ;  $\mathbf{X}_0 = [x_0, y_0]^T$  为单元形心  $o'$  的坐标.

单元的广义位移场可用节点广义位移插值得

$$\mathbf{W}' = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \delta_i \quad (2.7)$$

其中  $\delta' = [w'_i, \phi'_{xi}, \phi'_{yi}]^T$  为节点广义位移;

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (2.8)$$

$\xi, \eta$  是自然坐标.

利用同一插值函数进行坐标变换, 则

$$X' = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i X_i, \quad \bar{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

在单元内独立地定义应力模式

$$M' = [I, V]a = Qa \quad (2.10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M' &= [M'_x, M'_y, M'_{xy}, Q'_x, Q'_y]^T \\ a &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}]^T \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

为一组参数;  $I$  为一五阶的单位矩阵; 而

$$V = \begin{bmatrix} y' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x' & y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x' \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### 3. 刚度矩阵的导出

在  $(\sigma', y', s')$  坐标系中, 单元曲率可表示为

$$X' = \sum_{i=1}^4 B_i \delta_i \quad (2.13)$$

其中

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x'} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y'} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x'} \\ N_{i,x'} & -N_i & 0 \\ N_{i,y'} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

各单元的势能可表示为

$$\Pi_{2e} = \sum_{i=1}^4 \alpha^T G_i \delta_i - \frac{1}{2} \alpha^T H \alpha - \sum_{i=1}^4 \delta_i^T R_i \quad (2.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G_i &= \iint_{\Omega_e} Q^T B_i^T d\Omega \\ H &= \iint_{\Omega_e} Q^T D Q d\Omega \\ R_i &= \iint_{\Omega} N_i \bar{P} d\Omega - \int_{S_e} N_i \bar{Q} dS \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

由  $\delta \Pi_{2e} = 0$ , 可得

$$G_i^T \alpha = R_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^4 G_i \delta_i = H \alpha \quad (2.18)$$

由式 (2.18) 解得

$$\alpha = H^{-1} \sum_{i=1}^4 G_i \delta_i \quad (2.19)$$

再回代到 (2.17) 式中, 可得

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij} \delta_j = R_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.20)$$

其中

$$K_{ij} = G_i^T H^{-1} G_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.21)$$

为坐标系 ( $o'x'y'z'$ ) 下的单元刚度矩阵.

最后将其化成为总体坐标系 ( $oxyz$ ) 下表示

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij} \delta_j = R_i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.22)$$

$$K_{ij} = T^T K_{ij}' T, \quad R_i = T^T R_i' \quad (2.23)$$

然后组装成总刚, 总载荷列阵, 即得方程组

$$K \delta = R \quad (2.24)$$

在解得  $\delta$  之后, 代入 (2.19) 式, 可求得各单元的  $\alpha$ , 由此可得出各单元应力的表达式为

$$M = T' Q H^{-1} \sum_{i=1}^4 G_i' T \delta_i \quad (2.25)$$

其中

$$T' = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & -\sin 2\phi & 0 & 0 \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & \sin 2\phi & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\phi & -\frac{1}{2} \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

#### 4. 等效节点力的计算

$$R_i = \bar{P}_i + \bar{Q}_i \quad (2.27)$$

其中

$$\bar{P}_i = \iint_{\Omega} N_i \bar{P} d\Omega$$

$$\bar{Q}_i = \int_{s_0} N_i \begin{Bmatrix} -\bar{Q}_n dS \\ \bar{M}_n dy + \bar{M}_n s dx \\ -\bar{M}_n dx + \bar{M}_n s dy \end{Bmatrix}$$

### 三、算 例

例 1 承受均布及集中载荷的四边简支及固支的方板

方板边长为  $L$ , 厚度为  $h$ , 根据对称性, 仅取四分之一板进行计算, 采用  $4 \times 4$  网格. 考虑外载为承受均布载荷  $q_0$  和板中心处受集中力  $p$ , 边界条件为四边简支和固支的

几种情况。分别计算了在  $h/L = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  等七种不同厚跨比情况下板的中点挠度、中点弯矩及边中点弯矩,结果列于表 1。表中所列的八节点等参元<sup>[2]</sup>;及文献[6, 7]均考虑了横向剪切影响,文献[6]是四节点 20 自由度板元;文献[3]是基于 Reissner 理论,简化得到的考虑横向剪切影响的矩形板弯曲解;文献[4]则是依据三维弹性理论所得的解;文献[5]采用了 Love 的中等厚度的平板理论,七阶多项式位移函数和十个广义节点位移。板的挠度及弯矩可以分别用以下形式表示

$$w = \alpha \frac{q_0 L^4}{Eh^3}, \quad w = \alpha_1 \frac{PL^2}{D}, \quad M = \beta q_0 L^2, \quad M = \beta_1 P$$

表 1-1 受均布载荷作用的简支方板

h/L	方法	中心挠度系数 $\alpha$						中心弯矩系数 $\beta$			
		本文	八节点等参元	文献[7]	文献[6]	文献[3]	文献[5]	薄板解	本文	八节点等参元	薄板解
0.0001		0.04416				0.04437		0.04437	0.04740		0.04790
0.001		0.04416				0.04437		0.04437	0.04740		0.04790
0.01		0.04418	0.04438	0.04435	0.04423	0.04439	0.04437	0.04437	0.04740	0.04818	0.04790
0.1		0.04610	0.04628	0.04638	0.04612	0.04632	0.04592	0.04437	0.04739	0.04818	0.04790
0.2		0.05192	0.05202	0.05212	0.05186	0.05217		0.04437	0.04739	0.04818	0.04790
0.3		0.06161	0.06160			0.06192		0.04437	0.04738	0.04818	0.04790
0.4		0.07519	0.07500			0.07557		0.04437	0.04738	0.04818	0.04790

表 1-2 受均布载荷作用的固支方板

h/L	方板	中心挠度系数 $\alpha$					边中点弯矩系数 $\beta$				
		本文	八节点等参元	文献[7]	文献[4]	文献[5]	薄板解	本文	八节点等参元	文献[4]	薄板解
0.0001		0.0137					0.0138	-0.05114			-0.0513
0.001		0.0137					0.0138	-0.05114			-0.0513
0.01		0.0137	0.0137	0.0139		0.0138	0.0138	-0.05112	-0.04873		-0.0513
0.1		0.0158	0.0160	0.0162	0.0163	0.0150	0.0138	-0.04875	-0.04813	-0.04929	-0.0513
0.2		0.0220	0.0221	0.0223	0.0233		0.0138	-0.04118	-0.04557	-0.04536	-0.0513
0.3		0.0319	0.0320				0.0138	-0.04527	-0.04367		-0.0513
0.4		0.0455	0.0455				0.0138	-0.04411	-0.04244		-0.0513

此例表明,厚跨比从万分之一至五分之二,本文单元均能得到较精确的解。从表中可以看出,其它类型的单元对于薄板仅能算到厚跨比为 0.01 的场合,欲计算再薄的板就需采取措施,例如增加内自由度等<sup>[2]</sup>。此外,所列各单元均采用  $4 \times 4$  网格,本文单元无论在单元节点数或节点自由度上均属少者,从计算结果来看,仍能得到相近的精度,说明此单元精度较高,且计算时间较省。

表 1-3 受中心集中力作用的方板的中心挠度系数  $\alpha$ 

$h/L$	方法	简支方板					固支方板			
		本文	文献[7]	文献[6]	文献[5]	薄板解	本文	八节点等参元	文献[7]	薄板解
0.0001		0.01155				0.01160	0.00541			0.00560
0.001		0.01155				0.01160	0.00541			0.00560
0.01		0.01156	0.01160	0.01170	0.01158	0.01160	0.00543	0.00556	0.00561	0.00560
0.1		0.01294	0.01354	0.01353	0.01200	0.01160	0.00686	0.00730	0.00873	0.00560
0.2		0.01708	0.01943	0.01801		0.01160	0.01107	0.01232	0.01363	0.00560
0.3		0.02400				0.01160	0.01800	0.02058		0.00560
0.4		0.03360				0.01160	0.02767	0.03290		0.00560

## 例 2 悬臂板

边长为  $L$ , 厚度为  $h$  的正方形悬臂板, 承受均布载荷  $q_0$ , 如图 1 所示。

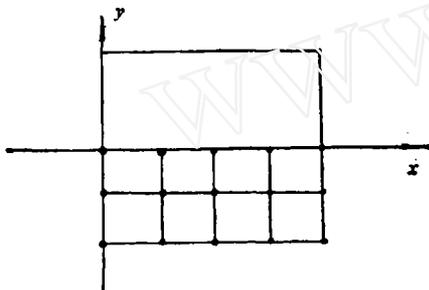


图 1 悬臂板

悬臂板问题, 张福范<sup>[8]</sup>曾经给出过级数解, 吴良芝<sup>[9]</sup>的有限元修正解与其相符。本文的单元在不修正的情况下对于这类具有边界效应的问题亦较有效。此外还给出了厚板的结果, 一并列于表 2, 网格划分见图 1。板的挠度可以用下式表示

$$w = \alpha \frac{q_0 L^4}{D}$$

## 例 3 角点支承的正方形板

考虑一个四角点支承的厚度为  $h$ , 边长为  $L$  的正方形板, 其上作用着均布载荷  $q_0$ 。此例不仅可以考察此元对解角点处具有应力集中一类问题的有效性, 还可以考察所假设的内力模式的合理性。

表 2 受均布载荷的正方形悬臂板自由边  $x=L$  处的挠度系数  $\alpha$ 

方法		$y$	0	0.25L	0.5L
级数解 <sup>[8]</sup>			0.13102	0.13056	0.12933
有限元修正解 <sup>[9]</sup>			0.12905	0.12851	0.12708
本 文	$h = 0.0001L$		0.1288	0.1282	0.1266
	$h = 0.001L$		0.1288	0.1282	0.1266
	$h = 0.01L$		0.1288	0.1282	0.1266
	$h = 0.1L$		0.1306	0.1299	0.1282
	$h = 0.2L$		0.1349	0.1342	0.1325
	$h = 0.4L$		0.1503	0.1495	0.1477

表 3 角点支承方板的挠度系数  $\alpha$  和弯矩系数  $\beta$ 

方 法	边 界 中 点		方 板 中 点		
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	
矩形单元 (R-12)	0.0165	0.149	0.0232	0.108	
Marcus 解	0.0180	0.154	0.0281	0.110	
Lecand Ballesteros 解	0.0170	0.140	0.0265	0.109	
本 文	$h = 0.0001L$	0.0172	0.1463	0.0245	0.1061
	$h = 0.001L$	0.0172	0.1463	0.0246	0.1061
	$h = 0.01L$	0.0172	0.1465	0.0246	0.1061
	$h = 0.1L$	0.0188	0.1556	0.0260	0.1053
	$h = 0.2L$	0.0229	0.1600	0.0301	0.1038
	$h = 0.3L$	0.0292	0.1570	0.0365	0.1024
	$h = 0.4L$	0.0377	0.1551	0.0453	0.1014

由于板的对称性,计算时仅考虑四分之一板,网格划分为  $4 \times 4$ 。计算结果列于表 3。挠度和弯矩分别写成如下形式

$$w = \alpha \frac{q_0 L^4}{D}, M = \beta q_0 L^2$$

## 四、讨 论

### 1. 数值收敛性

本文观察四角点支承的板在不同网格划分下的数值收敛情况,板的厚跨比为 0.01,网格划分为  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$  四种情况,结果列于表 4。从表中可以观察到解是收敛的,且比 R-12 单元更接近于其它解。

表 4 不同网格划分下的挠度系数  $\alpha$ 

	$1 \times 1$	$2 \times 2$	$3 \times 3$	$4 \times 4$	R-12 单元 ( $4 \times 4$ )	Marcus 解	Lee & Ball- esteros 解
边中点	0.00962	0.0158	0.0168	0.0172	0.0165	0.0180	0.0170
方板中点	0.0121	0.0219	0.0239	0.0246	0.0232	0.0281	0.0265

### 2. 内力模式的选取

本文选择的内力模式有 11 个参数,单元自由度为 12,刚体位移为 3,显然满足必要条件  $11 \geq 12 - 3 = 9$ 。当单元为矩形时,位移为双线性表示,曲率

$$-\frac{\partial \phi_x}{\partial x}, -\frac{\partial \phi_y}{\partial y}, -\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y}$$

与 (2.10) 中  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  的表达式相当,然后由齐次平衡方程计算剪力  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,显然为常数。我们曾研究  $M' = [I, V]\alpha$  的内力模式,式中  $\alpha$  如 (2.11) 所示,而

$$V = \begin{bmatrix} x' & y' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x' & y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

发现对于前两个算例可以得到很好的结果,但对于算例 3 却不适用,因假设这种模式的剪力为常数,不符合例 3 的实际,出现与文献 [10] 提到过的不稳定现象的类似情况,即中心点位移与精确解在数量级上相同,而边的中点位移与中心点位移却具有完全不同的数量级.当剪力表示式中增加不完全线性项<sup>[11,12]</sup>之后,这种现象即去除.因此,本文提供的内力模式是力求简单的一种可用型式,对于由 (2.16) 式所示的矩阵  $H$  的求逆十分便利,从而能极为容易地以简洁的形式写出显式的单元刚度矩阵,避免了数值积分过程.

## 五、结 论

从算例的结果来看,本文的这种单元对于板的厚度具有很宽的适用范围,当剪切刚度趋于无穷大时,可自动回到经典解.且由于采用四节点的等参位移模式可以采用四边形单元,以及能得到显式的刚度矩阵,于是可节省计算时间.曾与通用程序 SAP-5 的计算结果进行过比较,在同样网格下约省一半时间,且精度比其高,SAP 5 使用的是 Q-19 单元<sup>[2]</sup>.

## 参 考 文 献

- [1] 胡海昌,弹性力学的变分原理及其应用,科学出版社 (1982).
- [2] Cook, R. D. 著,何穷,程耿东译,有限元分析的概念和应用,科学出版社 (1981).
- [3] Salerno V. L. & Goldberg, M. A., Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates, *J. A. M.*, **27**, 1(1960), 54-58.
- [4] Rivas, S. & Rao, A. K. Flexure of Thick Rectangular Plates, *J. A. M.*, **40**, 1 (1973), 298-299.
- [5] Smith, Ian. M., A Finite Element Analysis for Moderately Thick Rectangular plates in Bending, *Int. J. Mech. Sci.*, **10** (1968), 563-570.
- [6] 浙江大学,平板分析中的有限元法译文集 (1973), 87-109.
- [7] 王家林, 8 点超参板壳单元的改进,吉林工业大学学报, **1**(1982), 1-11.
- [8] 张福范,均布载荷下悬臂矩形板的弯曲,应用数学与力学, **1**, 3(1980), 349-362.
- [9] 吴良芝,结构有限元的修正解,固体力学学报, **4**(1981), 457-467.
- [10] 卞学锁,有限元法论文选,国防工业出版社 (1980).
- [11] Pian, T. H. H., Da-Peng Chen and David Kang, A New Formulation of Hybrid/Mixed Finite Element, *Computers & Structures*, **16**, 1-4 (1983), 81-87.
- [12] Robert L. Spilker and Nasir I. Munir, The Hybrid-Stress Model for Thin Plates, *Int. J. Num. Eng.*, **15** (1980), 1239-1260.

## A NEW TYPE BENDING PLATE ELEMENT

Ding Haojiang    Zhou Weiyu    Sun Libo

(Zhejiang University)

### Abstract

In this paper, a kind of arbitrary quadrilateral and four nodes plate element including the effect of transverse shear deformation is presented. It is based on the variational principle of two variables. This element has a very wide applicable range to the thickness of plates. An explicit form of stiffness matrix is obtained. Therefore, it possesses the special features of good general applicability, high precision and less computing-time.

www.cnki.net