

自由面重力流的积分方程迭代解法

温贤云 吴持恭
(成都科技大学)

摘要 本文利用 Н. И. Мусхелишвили 的奇异积分方程理论, 将自由面重力流化为解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题, 推出积分方程。提出以固壁边界和自由面流线长度为自变量, 边界势函数为未知函数的迭代求解思想, 避开了曲壁边界流速方向为未知函数的困难。提出了一种适用于直线和曲线边界自由面重力流的新的数值方法。在流量已知的条件下, 证明了该方法的收敛性、稳定性。并给出了一个误差估计式。

一、引言

在工程中常遇到具有下列特点的流体力学问题: (1) 流场具有自由面, (2) 重力的影响不容忽略, (3) 固壁的几何形状复杂。在利用势流理论研究这类问题时, 将面临求解 Laplace 方程的非线性边界条件问题。

应用解析函数理论研究自由面重力流国内外已作了大量工作^[1-4]。但对于固壁为曲线且计入重力影响的流动, 至今仍是一个尚未解决的难题。本文将自由面重力流化为 Riemann-Hilbert (以下称 R-H) 边值问题, 利用 Н. И. Мусхелишвили 学派的理论, 并推出边界积分方程。以反弧段的计算为例, 阐述了以固壁和自由面流线长度为自变量, 边界势函数为未知函数的迭代思想。从而避开了曲壁流速方向为未知函数的困难。文中证明了该方法的收敛性、稳定性, 并给出了误差估计式, 从而证明了该方法的普遍适用性。

二、 $h_2(a_1, b_1)$ 类边值问题的一般解及推论

如图 1, 设 $Q(z) = u(z) + iv(z)$ 是在上半平面解析, 在无穷远有界的函数。记实轴上的区间 $(-\infty, a_1) \cup (b_1, \infty)$ 为 D' , (a_1, b_1) 为 D'' , $D = D' \cup D''$ 。若 D' 上 $v^+(\eta)$ 已知, 在 D'' 上 $u^+(\eta)$ 已知, 则 $Q(z)$ 的求解为上半平面的混合边值问题, 即要求根据边界条件

$$u^+ = f(\eta), \text{ 在 } D'' \text{ 上}; v^+ = g(\eta), \text{ 在 } D' \text{ 上} \quad (1)$$

来找一个在上半平面内是全纯, 在无穷远处是有界的函数 $Q(z)$, 其中 $f(\eta)$ 、 $g(\eta)$ 分别是给定在 D'' 与 D' 上属于 M 类的函数, 并且 $Q(z)$ 可以连续拓展到 D 上除了点 a_1, b_1 以外的每一个

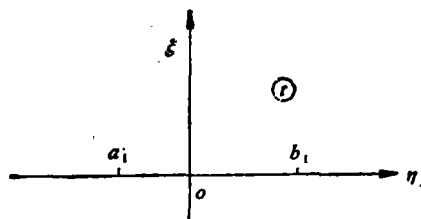


图 1

本文于 1985 年 3 月 14 日收到, 1985 年 12 月 9 日收到修改稿。

点上,而在这些点附近, $Q(t)$ 分别适合不等式

$$|Q(t)| < A_1 |t - a_1|^{-\alpha}, \quad |Q(t)| < A_2 |t - b_1|^{-\alpha} \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (2)$$

由文献 [9], 以上问题可化为具有间断系数的 R-H 边值问题, 即: 假定 S^+ 是一条简单光滑曲线 L 所围成的有界或无界域, 要求根据边界条件

$$a(\eta)u^+(\eta) - b(\eta)v^+(\eta) = c(\eta)$$

来找一个在 S^+ 内是全纯的函数 $Q(t)$, 而在点 a_1, b_1 附近满足不等式 (2), 且 $a(\eta), b(\eta)$ 及 $c(\eta)$ 在 L 上对 a_1, b_1 都是 H_0 类中的已知实函数, 且 $a^2(\eta) + b^2(\eta) \neq 0$.

只要在 R-H 问题中, 当 $\eta \in D'$ 时, 令 $a = 0, b = -1, c = g(\eta)$; 当 $\eta \in D''$ 时, 令 $a = 1, b = 0, c = f(\eta)$, 则得混合边值问题.

我们只讨论解 $Q(t)$ 在 a_1, b_1 均为有界的情况, 并记这类解为 $h_2(a_1, b_1)$ 类. 由文献 [9] 可知这类解的指标为

$$\kappa = -1$$

当 $\kappa = -1$ 时, R-M 问题是唯一单值可解的. 若已知 $c(\eta) = 0$ 时的典则解 $X(t)$, 那么当 $c(\eta) \neq 0$ 时, 解应由公式

$$Q(t) = \frac{X(t)}{\pi i} \int_D \frac{c(\eta)}{[a(\eta) + ib(\eta)]X^+(\eta)(\eta - t)} d\eta \quad (3)$$

确定. 由文献 [9][10], $h_2(a_1, b_1)$ 类的典则解应取为

$$X(t) = \sqrt{(t - a_1)(t - b_1)} \quad (4)$$

并且有

$$\begin{aligned} X(t) &= \sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)} & -\infty < \eta < a_1 \\ &= -i\sqrt{(\eta - a_1)(b_1 - \eta)} & a_1 < \eta < b_1 \\ &= -\sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)} & b_1 < \eta < \infty \end{aligned}$$

因此混合边值问题的解为

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{\sqrt{(t - a_1)(t - b_1)}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{a_1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)(\eta - t)}} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(\eta)}{\sqrt{(\eta - a_1)(b_1 - \eta)(\eta - t)}} d\eta - \int_{b_1}^{\infty} \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)(\eta - t)}} d\eta \right] \quad (5) \end{aligned}$$

有时会遇到 b_1 点为无穷远点的情况(图 2). 由变换

$$t' = \frac{t - a_1 - 1}{t - a_1 + 1} \quad (6)$$

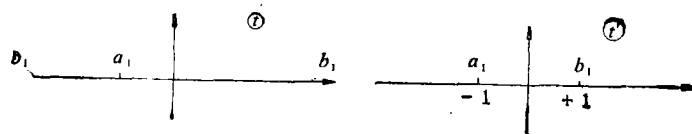


图 2

将 t 的上半平面变到 t' 的上半平面. 在 t' 平面上利用 (5) 式, 并回到 t 平面得

$$Q(t) = \frac{\sqrt{a_1 - t}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{a_1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{a_1 - \eta}(\eta - t)} d\eta + \int_{a_1}^{\infty} \frac{f(\eta)}{\sqrt{\eta - a_1}(\eta - t)} d\eta \right] \quad (7)$$

其中 $X(t) = \sqrt{a_1 - t}$ 起到了典则解的作用, 且

$$X^+(\eta) = \sqrt{a_1 - \eta} \quad \eta < a_1, \quad X^-(\eta) = -i\sqrt{\eta - a_1} \quad \eta > a_1$$

(5)(7) 便是求解自由面重力流的数学基础。

三、积分方程的推导

以反弧段下游水平连接为例, 我们来阐明求解曲线边界自由面重力流的一般解。

设在物理平面 Z 上有一平面势流流场(图 3a), 复势 W 与复速度有如下关系

$$\frac{dW}{dz} = V e^{-i\theta} \quad (8)$$

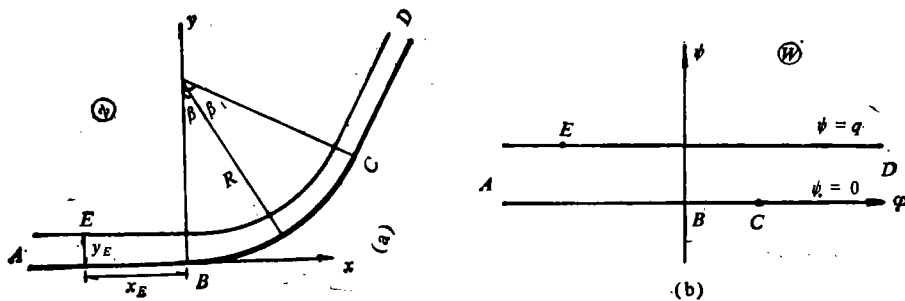


图 3

其中 $Z = x + iy$, $W = \varphi + i\psi$, φ 为势函数, ψ 为流函数, V 为流场中某点速度, θ 为该点的速度方向。若流量为 q , 则流场对应于 W 平面的带形区域(图 3b)。引入变换

$$Q = \ln \left(\frac{1}{U} \frac{dW}{dz} \right) = \ln \frac{V}{U} - i\theta \quad (9)$$

式中 U 为流场某一已知流速。由变换

$$W = \frac{q}{\pi} \left(\ln \frac{1}{t} + i\pi \right) \quad (10)$$

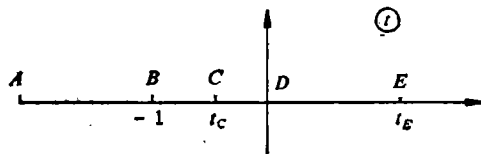


图 4

将复势平面的带形区域变换到辅助平面 z 的上半平面(图 4), 使实轴 η 对应于流场边界, 则 (9) 式为 z 的函数

$$Q(z) = \ln \frac{V(z)}{U} - i\theta(z) \quad (11)$$

由 Bernoulli 方程得来流断面水面 E 点与自由面 ED 上任一点速度之间的关系

$$\frac{U_f}{U} = \sqrt{1 + \frac{2[(x_f - x_E) \sin \beta_1 + (y_E - y_f) \cos \beta_1]}{y_E Fr^2}} \quad (12)$$

式中 x_E, y_E, U 为 E 点已知坐标及流速, x_f, y_f, u_f 为自由面 ED 上任一点的坐标及流速,

$Fr = \frac{U}{\sqrt{g y_E}}$ 为 E 断面的佛汝德数。

为求解方便设在上游陡坡段 E 点以上水面与陡坡平行。由此得到在 z 平面实轴上的如下边界条件

$$\begin{aligned} \eta < -1, \operatorname{Im} Q &= 0; \quad -1 < \eta < t_c, \operatorname{Im} Q = -\beta(\eta) \\ t_c < \eta < 0, \operatorname{Im} Q &= -\beta_1; \quad 0 < \eta < t_E, \operatorname{Re} Q = G_t(\eta) \\ t_E < \eta, \operatorname{Im} Q &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$G_t(\eta) = \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \frac{2[(x_t(\eta) - x_E) \sin \beta_1 + (y_E - y_t(\eta)) \cos \beta_1]}{y_E Fr^2} \right\}$$

以上边值问题的解属于 $h_2(a_1, b_1)$ 类, 且 $a_1 = t_D = 0$, $b_1 = t_E$, 故典则解为

$$X(z) = \sqrt{t(t - t_E)} \quad (14)$$

将 (13)(14) 代入 (5) 式得

$$\begin{aligned} Q(t) = \frac{\sqrt{t(t - t_E)}}{\pi} &\left[- \int_{-1}^{t_c} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta - t_E)}(\eta - t)} d\eta \right. \\ &\left. - \beta_1 \int_{t_c}^0 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta - t_E)}(\eta - t)} + \int_0^{t_E} \frac{G_t(\eta)}{\sqrt{\eta(t_E - \eta)}(\eta - t)} d\eta \right] \end{aligned} \quad (15)$$

在 BC 段上任一点 t_0 ($-1 < t_0 < t_c$), 由 Соходкий-Plemelj^[9] 公式并分离实部与虚部得反弧段壁面速度表达式

$$U_w(t_0) = U e^{G_w(t_0)} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} G_w(t_0) = \frac{\sqrt{t_0(t_0 - t_E)}}{\pi} &\left\{ - \int_{-1}^{t_c} \left[\frac{\beta(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta - t_E)}} - \frac{\beta(t_0)}{\sqrt{t_0(t_0 - t_E)}} \right] \frac{1}{\eta - t_0} d\eta \right. \\ &+ \int_0^{t_E} \frac{G_t(\eta)}{\sqrt{\eta(t_E - \eta)}(\eta - t_0)} d\eta \left. \right\} - \frac{\beta(t_0)}{\pi} \ln \frac{t_c - t_0}{t_0 + 1} \\ &- \frac{\beta_1}{\pi} \ln \left[\frac{2\sqrt{t_0 t_c(t_0 - t_E)}(t_c - t_E) + t_0(t_c - t_E) + t_c(t_0 - t_E)}{(t_c - t_0)t_E} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

同理可得自由面 ED 段上任一点 t_0 ($0 < t_0 < t_E$) 的速度方向

$$\begin{aligned} \theta_f(t_0) = \frac{\sqrt{t_0(t_E - t_0)}}{\pi} &\left\{ - \int_{-1}^{t_c} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta - t_E)}(\eta - t_0)} d\eta \right. \\ &+ \int_0^{t_E} \left[\frac{G_t(\eta)}{\sqrt{\eta(t_E - \eta)}} - \frac{G_t(t_0)}{\sqrt{t_0(t_E - t_0)}} \right] \frac{1}{\eta - t_0} d\eta \left. \right\} + \frac{G_t(t_0)}{\pi} \ln \frac{t_E - t_0}{t_0} \\ &+ \frac{\beta_1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[\frac{2t_0 - t_E}{t_E} + \frac{2t_0(t_0 - t_E)}{(t_c - t_0)t_E} \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

在上游直线固壁 ($t_0 < -1$) 及下游直线固壁上 ($t_c < t_0 < 0$) 有

$$\ln \frac{V}{U} = \frac{\sqrt{t_0(t_0 - t_E)}}{\pi} \left[- \int_{-1}^{t_c} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta - t_E)}(\eta - t_0)} d\eta + \int_0^{t_E} \frac{G_t(\eta)}{\sqrt{\eta(t_E - \eta)}(\eta - t_0)} d\eta \right]$$

$$-\frac{\beta_1}{\pi} \ln \left[\frac{2\sqrt{t_0 t_c (t_0 - t_E)(t_c - t_E)} + t_0(t_c - t_E) + t_c(t_0 - t_E)}{(t_0 - t_c)t_E} \right] \quad (19)$$

由(15)(17)(18)(19)可以看出,流场内及边界上的速度方向和速度由 $\beta(\eta)$ 、 $x_f(\eta)$ 、 $y_f(\eta)$ 决定。但 $\beta(\eta)$ 、 $x_f(\eta)$ 、 $y_f(\eta)$ 却是 η 的未知函数。在计入重力的情况下,直接寻找 β 与 η 之间的对应关系十分困难。为了克服 β 为未知函数的困难,我们不直接寻找 β 与 η 的函数关系,而是回到物理平面 Z 对问题作进一步研究。

如图5所示,沿固壁距 B 点距离为 s 的 M 点的势函数为 s 的未知函数,记为 $\varphi_w(s)$ 。尤其值得注意的是,对于给定的曲壁面, β 却是 s 的已知函数。在自由面,距 E 点距离为 s 的 N 点的势函数也是 s 的未知函数,记为 $\varphi_f(s)$ 。同理有 $x_f(s)$ 、 $y_f(s)$ 。因此若以 s 为自变量,我们的问题则转化为求未知函数 $\varphi_w(s)$ 、 $\varphi_f(s)$ 、 $x_f(s)$ 、 $y_f(s)$ 的问题。而且诸未知函数与 s 之间有如下关系

$$\frac{d\varphi_w(s)}{ds} = u_w(s) \quad (20)$$

$$\frac{d\varphi_f(s)}{ds} = u_f(s) \quad (21)$$

$$\frac{dx_f(s)}{ds} = \cos \theta_f(s) \quad (22)$$

$$\frac{dy_f(s)}{ds} = \sin \theta_f(s) \quad (23)$$

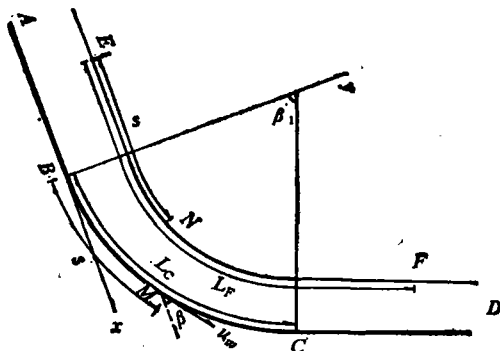


图5

由(20)(21),当 $s=l$ 时自由面势函数与固壁势函数分别为

$$\varphi_w(l) = \int_0^l u_w(s) ds \quad (24)$$

$$\varphi_f(l) = \varphi_E + \int_0^l u_f(s) ds \quad (25)$$

由(10)式有

$$d\eta = \frac{d\eta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} ds = -\eta(s)u(s)ds \quad (26)$$

其中在自由面上有 $\eta(s) = \eta_f(s) = e^{-\frac{\pi}{2}\varphi_f(s)}$, $u(s) = u_f(s)$,在固壁上有

$$\eta(s) = \eta_w(s) = -e^{-\frac{\pi}{2}\varphi_w(s)}, u(s) = u_w(s).$$

在求解时,由于下游水面距反弧段足够远的水面 FD 段的积分对反弧段流场影响很小,可按需要精度选取适当大有限长度的积分代替。将(20)(21)(26)代入(17)(18)得

$$\begin{aligned} G_w[\varphi_w(s_0), \varphi_f(s)] &= \frac{\sqrt{t_w(t_E - t_w)}}{q} \left\{ \int_0^{t_c} \left[\frac{\beta(l)}{\sqrt{\eta_w(\eta_w - t_E)}} - \frac{\beta(s_0)}{\sqrt{t_w(t_w - t_E)}} \right] \frac{\eta_w u_w(l)}{\eta_w - t_w} dl \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{L_F} \frac{G_f(l) \eta_f u_f(l)}{\sqrt{\eta_f(t_E - \eta_f)}(\eta_f - t_w)} dl \right\} - \frac{\beta(s_0)}{\pi} \ln \frac{t_c - t_w}{t_w + 1} \\ &\quad - \frac{\beta_1}{\pi} \ln \left[\frac{2\sqrt{t_w t_c (t_w - t_E)(t_c - t_E)} + 2t_w t_c}{(t_c - t_w)t_E} - \frac{t_w + t_c}{t_c - t_w} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \theta_f[\varphi_w(s), \varphi_f(s_0)] = & \frac{\sqrt{t_f(t_E - t_f)}}{q} \left\{ \int_0^{L_c} \frac{\beta(l)\eta_w u_w(l)}{\sqrt{\eta_w(\eta_w - t_E)(\eta_w - t_f)}} dl \right. \\ & + \int_0^{L_F} \left[\frac{G_f(l)}{\sqrt{\eta_f(t_E - \eta_f)}} - \frac{G_f(s_0)}{\sqrt{t_f(t_E - t_f)}} \right] \frac{\eta_f u_f(l)}{\eta_f - t_f} dl \left. \right\} \\ & + \frac{G_f(s_0)}{\pi} \ln \frac{t_E - t_f}{t_f - t_F} + \frac{\beta_1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[\frac{2t_f(t_f - t_E)}{(t_c - t_f)t_E} \right] \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

式中 $t_w = -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_w(s_0)}$, $t_c = -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_w(L_c)}$, $t_f = e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_f(s_0)}$, $t_E = e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_f(0)}$, $t_F = e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_f(L_F)}$,

$$G_f(l) = \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \frac{2[(x_f(l) - x_E) \sin \beta_1 + (y_E - y_f(l)) \cos \beta_1]}{y_E F r^2} \right\}$$

s_0 表示沿流线 M 点距 E 点和 N 点距 E 点的距离, $G_w(\varphi_w(s_0), \varphi_f(s))$, $\theta_f(\varphi_w(s), \varphi_f(s_0))$ 表示 G_w 、 θ_f 在 s_0 的值与自由面及固壁的势函数有关。

自由面坐标由下式决定

$$x_f(l) = x_E + \int_0^l \cos \theta_f(s) ds \quad (29)$$

$$y_f(l) = y_E + \int_0^l \sin \theta_f(s) ds \quad (30)$$

由 (27)(28)(24)(25)(29)(30), 我们把问题转化为沿固壁和自由面流线求解各未知函数的积分方程组。在固壁几何形状给定的情况下, β 为 s 的已知函数, 因而我们避开了 β 为未知函数的困难, 故对任意给定的固壁边界也可求解。由于积分沿 s 进行, 数值积分时可不等距划分流线 s , 这就带来了很大的灵活性, 可计算出壁面上任一给定点的流速, 与有限元或边界元法相同, 可以根据固壁和自由面的弯曲程度, 在固壁和自由面上合理地布置疏密不同的节点。因此本文方法可毫无困难地用于复杂固壁的自由面重力流的计算。

四、迭代求解积分方程和流场的计算

上游直线段的流速表达式 (19) 可写成

$$\begin{aligned} \ln \frac{V(s_0)}{U} = & \frac{\sqrt{t_0(t_0 - t_E)}}{q} \left[\int_0^{L_c} \frac{\beta(l)\eta_w u_w(l)}{\sqrt{\eta_w(\eta_w - t_E)(\eta_w - t_0)}} dl + \int_0^{L_F} \frac{G_f(l)\eta_f u_f(l)}{\sqrt{\eta_f(t_E - \eta_f)(\eta_f - t_0)}} dl \right] \\ & - \frac{\beta_1}{\pi} \ln \left[\frac{2\sqrt{t_0 t_c(t_0 - t_E)(t_c - t_E)} + t_0(t_c - t_E) + t_c(t_0 - t_E)}{(t_c - t_0)t_E} \right] \quad (31) \end{aligned}$$

式中 $V(s_0)$ 表示距 B 点距离为 s_0 的上游直线固壁的流速, $t_0 = -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_w(s_0)}$, $\varphi_w(s_0)$ 为 s_0 点处的势函数值。我们以 (24)(25) 的积分方程为核心, 沿流线以 s 为自变量, 固壁和自由面势函数为未知函数进行迭代求解。其迭代过程为

1. 固壁流线和自由面流线的划分及初始势函数的计算

给定来流断面 E 的位置, 设 E 断面上势函数相等。初设自由面位置, 取定自由面流线长度 L_F 。在 $E'B$ 、 BC 、 EF 线上布置节点。初设固壁 $E'B$ 、 BC 上的速度 $u_w^0(s)$, 计算 $E'B$ 、 BC 的势函数 $\varphi_w^0(s)$ 。由 Bernoulli 方程计算初设自由面上各节点的流速 $u_f^0(s)$, 并计算相应的势函数 $\varphi_f^0(s)$ 。(上标 n 表示第 n 次迭代的结果)

2. 固壁流速及势函数的计算

把 $u_w^0(s)$, $\varphi_w^0(s)$, $u_f^0(s)$, $\varphi_f^0(s)$ 代入 (27)(31) 式得固壁上各节点的速度 $u_w^1(s)$. 由 (24) 计算固壁势函数 $\varphi_w^1(s)$.

3. 自由面速度方向、位置及势函数的计算

将 $u_w^1(s)$, $\varphi_w^1(s)$, $u_f^0(s)$, $\varphi_f^0(s)$ 代入 (28) 得自由面各节点的速度方向, 由 (29)(30) 得新的自由面位置, 再由 Bernoulli 方程计算自由面各节点的速度 $u_f^1(s)$, 由 (25) 计算相应势函数 $\varphi_f^1(s)$.

由此完成了第一次迭代过程

用 $u_w^1(s)$, $\varphi_w^1(s)$, $u_f^1(s)$, $\varphi_f^1(s)$ 代替 $u_w^0(s)$, $\varphi_w^0(s)$, $u_f^0(s)$, $\varphi_f^0(s)$ 并重复 2、3 的步骤可得 $\varphi_w^2(s)$, $\varphi_f^2(s)$, $\varphi_w^3(s)$, $\varphi_f^3(s)$, $\dots$, $\varphi_w^n(s)$, $\varphi_f^n(s)$. 直至满足所需精度

$$\left| \frac{\varphi_w^n(L_c) - \varphi_w^{n-1}(L_c)}{\varphi_w^n(L_c)} \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{\varphi_f^n(L_F) - \varphi_f^{n-1}(L_F)}{\varphi_f^n(L_F)} \right| < \varepsilon_2$$

式中 $\varphi_w^n(L_c)$, $\varphi_f^n(L_F)$ 为第 n 次迭代后 C 、 F 点的势函数值.

设流场内某条流线的流函数为 $\varphi = kq$ ($0 < k < 1$), 且该流线上某点的势函数为

$$\varphi(\varphi_E \leq \varphi \leq \varphi_F),$$

将 $t = -e^{-\frac{\pi}{q}(\varphi + ikq)}$ 代入 (15) 式并分离实部和虚部得该点的速度和速度方向

$$\ln \frac{V(\varphi)}{U} = \frac{Z_1}{q} [I_1 + I_3 + e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} (I_2 + I_4) \cos k\pi] - \frac{Z_2}{q} e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} (I_2 + I_4) \sin k\pi + Z_3, \quad (32)$$

$$\theta(\varphi) = -\frac{Z_1}{q} e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} (I_2 + I_4) \sin k\pi - \frac{Z_2}{q} [I_1 + I_3 + e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} (I_2 + I_4) \cos k\pi]$$

$$+ \beta_1 - Z_4. \quad (33)$$

式中

$$I_1 = \int_0^{L_c} \frac{\beta(l) \eta_w^2 u_w(l)}{\sqrt{\eta_w(\eta_w - t_E)} (\eta_w^2 + 2e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} \eta_w \cos k\pi + e^{-\frac{2\pi}{q}\varphi})} dl$$

$$I_2 = \int_0^{L_c} \frac{\beta(l) \eta_w u_w(l)}{\sqrt{\eta_w(\eta_w - t_E)} (\eta_w^2 + 2e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} \eta_w \cos k\pi + e^{-\frac{2\pi}{q}\varphi})} dl$$

$$I_3 = \int_0^{L_F} \frac{G_f(l) \eta_f^2 u_f(l)}{\sqrt{\eta_f(t_E - \eta_f)} (\eta_f^2 + 2e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} \eta_f \cos k\pi + e^{-\frac{2\pi}{q}\varphi})} dl$$

$$I_4 = \int_0^{L_F} \frac{G_f(l) \eta_f u_f(l)}{\sqrt{\eta_f(t_E - \eta_f)} (\eta_f^2 + 2e^{-\frac{\pi}{q}\varphi} \eta_f \cos k\pi + e^{-\frac{2\pi}{q}\varphi})} dl$$

$$Z_1 = \operatorname{Re} X(t), \quad Z_2 = \operatorname{Im} X(t), \quad Z_3 = \operatorname{Re} H(t), \quad Z_4 = \operatorname{Im} H(t)$$

$$H(t) = \frac{\beta_1}{\pi} \ln \left(\sqrt{\frac{t_c}{t_c - t_E}} + \sqrt{\frac{t}{t - t_E}} / \sqrt{\frac{t_c}{t_c - t_E}} - \sqrt{\frac{t}{t - t_E}} \right)$$

流线的坐标由

$$x = x_E + \int_{\varphi_E}^{\varphi} \frac{\cos \theta(\varphi)}{V(\varphi)} d\varphi \quad (34)$$

$$y = ky_E + \int_{\varphi_E}^{\varphi} \frac{\sin \theta(\varphi)}{V(\varphi)} d\varphi \quad (35)$$

确定。同理可确定下游固壁 CD 上的速度。当下游 CD 段为非水平连接时, 由于 F 点以后的 FD 段的流场对反弧段的影响甚微, 故可假定 F 点以后速度不再发生变化, 则在 D 点 $Q(s)$ 仍为有界, 仍可用上面的方程和迭代过程求解。

五、收敛性、稳定性及误差估计

以下在流量已知的条件下证明本文方法的收敛性、稳定性, 并推出一个误差估计式。从而证明了该方法的普遍适用性。

1. 收敛性

由 (24)(25)(27)(28)(29)(30)(31) 可知, 固壁流速和自由面流速是势函数的函数, 势函数又是流线长度 s 的函数。故固壁和自由面流速可表为

$$u_w = u_w(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) \quad (36)$$

$$u_f = u_f(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) \quad (37)$$

(24)(25) 可写成

$$\varphi_w(l) = \int_0^l u_w(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) ds \quad 0 \leq l \leq L_c \quad (38)$$

$$\varphi_f(l) = \varphi_E + \int_0^l u_f(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) ds \quad 0 \leq l \leq L_F \quad (39)$$

把 (38) 的定义域适当扩大, 定义函数

$$u_w(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) = \begin{cases} u_w(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) & 0 \leq s \leq L_c \\ u_w(L_c) & L_c < s \leq L_F \end{cases}$$

(38)(39) 可写成

$$\varphi_w(l) = \int_0^l u_w(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) ds \quad 0 \leq l \leq L_F \quad (40)$$

$$\varphi_f(l) = \varphi_E + \int_0^l u_f(\varphi_w(s), \varphi_f(s)) ds \quad 0 \leq l \leq L_F \quad (41)$$

设 $\varphi_w, \varphi_f, u_w, u_f$ 为联合连续函数, 且在联合连续函数空间上定义向量函数。

$$\varphi(s) = \{\varphi_w(s), \varphi_f(s)\}, \quad u_b(\varphi(s)) = \{u_w(\varphi_w(s), \varphi_f(s)), u_f(\varphi_w(s), \varphi_f(s))\},$$

由此得一个二维向量空间, 记为 R^2 。在 R^2 上方程 (40)(41) 可写成

$$\varphi(l) = \varphi' + \int_0^l u_b(\varphi(s)) ds \quad (42)$$

其中 $\varphi' = \{0, \varphi_E\}$ 。并设 u_b 满足 Lipschitz 条件

$$|u_b(\bar{\varphi}) - u_b(\bar{\varphi}')| < M |\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'| \quad \bar{\varphi}, \bar{\varphi}' \in R^2 \quad (43)$$

M 为一正常数。定义算子 A

$$A\varphi(l) = \varphi' + \int_0^l u_b(\varphi(s)) ds \quad (44)$$

在 R^2 上定义范数

$$\|\varphi\| = \max_{0 \leq l \leq L_F} e^{-L_1 l} |\varphi(l)| \quad (45)$$

L_1 是某一正常数。由范数 $\|\cdot\|$ 我们在 R^2 上定义了一赋范空间, 记为 C_L 。由 (43) 和 (45) 有

$$\begin{aligned} \|A\bar{\varphi} - A\bar{\varphi}'\| &= \max_{0 \leq l \leq L_F} e^{-L_1 l} \left| \int_0^l \{u_b(\bar{\varphi}) - u_b(\bar{\varphi}')\} ds \right| \leq M \max_{0 \leq l \leq L_F} \int_0^l e^{L_1(s-l)} e^{-L_1 s} |\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'| ds \\ &\leq M \|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'\| \max_{0 \leq l \leq L_F} \int_0^l e^{L_1(s-l)} ds = \frac{M}{L_1} (1 - e^{-L_1 L_F}) \|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'\| \end{aligned}$$

令 $L_1 = M$, $\rho = 1 - e^{-L_1 L_F}$, 则有

$$\|A\bar{\varphi} - A\bar{\varphi}'\| \leq \rho \|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'\| \quad (46)$$

其中显然有: $0 < \rho < 1$.

以下证明迭代过程的收敛性. 上节的迭代过程可写成

$$\varphi^n(l) = A\varphi^{n-1}(l) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (47)$$

设 $\varphi(l)$ 是积分方程的解, 则 $\varphi(l)$ 满足

$$\varphi(l) = A\varphi(l) \quad (48)$$

由 (46) 得

$$\|\varphi^n - \varphi\| = \|A\varphi^{n-1} - A\varphi\| \leq \rho \|\varphi^{n-1} - \varphi\| \quad (49)$$

连续利用 (49) 式得 $\|\varphi^n - \varphi\| \leq \rho^n \|\varphi^0 - \varphi\|$, 因 $\rho < 1$, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n - \varphi\| = 0 \quad (50)$$

由此证明了收敛性. 可以看出, 初设壁面速度和自由面位置对收敛性无影响, 即使初设自由面偏离很远也会收敛到问题的解. 故本文方法对初始值的要求不高.

2. 稳定性

记 $\varphi^n(l)$ 为迭代的真解, $\tilde{\varphi}^n(l)$ 为数值解, $\varepsilon_n(l) = \varphi^n(l) - \tilde{\varphi}^n(l)$ 为第 n 次迭代后的误差. 并假设数值解只在第一次迭代有误差 $\varepsilon_1(l)$ 存在, 则

$$\varphi^1(l) = A\varphi^0(l) + \varepsilon_1(l) = \tilde{\varphi}^1(l) + \varepsilon_1(l),$$

所以

$$\varepsilon_1(l) = \varphi^1(l) - \tilde{\varphi}^1(l) \quad (51)$$

令 A 相继作用式 (51) 两端得

$$\varepsilon_2(l) = A\varepsilon_1(l), \dots, \varepsilon_n(l) = A^{n-1}\varepsilon_1(l) \quad (52)$$

式 (52) 即为误差传播方程. 两边取范数得

$$\|\varepsilon_n(l)\| \leq \rho^{n-1} \|\varepsilon_1(l)\| \quad (53)$$

由于 $\rho < 1$, 故可推知迭代过程是稳定的.

3. 误差估计

设第 n 次迭代产生的误差为 $h_n(l)$. 由于每一次迭代产生的误差总是一个小量, 即存在 $\delta > 0$, 使

$$\|h_n(l)\| < \delta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (54)$$

显然 δ 只与计算机舍入误差和数值积分的误差有关. 由此可写出

$$\tilde{\varphi}^{n+1}(l) = A\tilde{\varphi}^n(l) + h_n(l) \quad (55)$$

设 φ 为积分方程的解, 则有

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}^{n+1} - \varphi\| &= \|A\tilde{\varphi}^n + h_n(l) - A\varphi\| \leq \|A\tilde{\varphi}^n - A\varphi\| + \|h_n(l)\| \\ &\leq \rho \|\tilde{\varphi}^n - \varphi\| + \delta \end{aligned} \quad (56)$$

连续利用 (56) 式得

$$\begin{aligned} \|\bar{\varphi}^{n+1} - \varphi\| &\leq \rho^{n+1} \|\varphi^0 - \varphi\| + \rho^n \delta + \rho^{n-1} \delta + \cdots + \delta \\ &= \rho^{n+1} \|\varphi^0 - \varphi\| + \frac{\delta(1 - \rho^n)}{1 - \rho} \end{aligned} \quad (57)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 则得误差估计

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\varphi}^{n+1} - \varphi\| \leq \frac{\delta}{1 - \rho} \quad (58)$$

从式 (58) 可看出, 数值解与理论解之间的差异不超过 $\frac{\delta}{1 - \rho}$. 所以, 只要每一次迭代产生的误差充分小, 则数值解与理论解之间的差异也会足够小, 其精度便于控制和提高。

六、本文方法的应用和实验验证

作者对反弧段下游直线连接的情况进行了计算和验证。典型的计算结果如图 6。

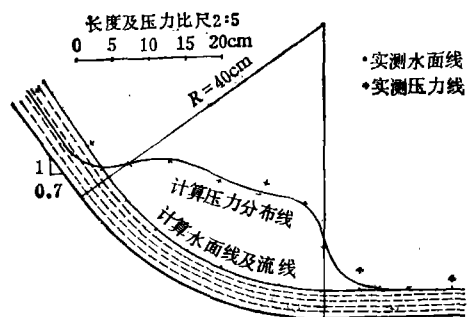


图 6

计算内容包括速度分布、壁面及流场压力分布、水面线及流线。计算时将反弧段按弧长 40 等分, 上游直线段 20 等分, 水面线沿长度 120 等分, 下游直线段按势函数 20 等分, 流场内按流量为 $q/5$, $2q/5$, $3q/5$, $4q/5$ 计算 4 条流线, 每条流线按等分势函数计算 120 个点。整个流场相当于计算了 680 个节点的流速、方向、压力及坐标。迭代三次 φ_F , φ_c 及反弧壁面流速的精度可小于 0.1%。在 M/V6000 超级小型计算机上计算一次占用 CPU 约 3 分 10 秒。

平底明渠弧形闸孔出流是上下游水面线和流量均未知的问题。用本文方法, 并采用水面线及流量的同步迭代法, 获得了很快的收敛速度和较好的相容性。反弧段挑射水流是水体流经曲线段后在重力作用下自由跌落的问题。

七、结 论

1. 本文利用 Н. И. Мусхелишвили 学派的理论, 得到了利用解析函数理论研究自由面重力流的数学基础 (5)(7)。

2. 利用解析函数理论将问题转化为求解积分方程。在物理平面上划分边界节点, 以固壁和自由面流线条数为自变量, 边界势函数为未知函数迭代求解, 可以避开曲线边界流速方向为未知函数的困难, 可计算固壁边界上任一给定点的流速, 固壁及自由面上节点的布置不受限制。适用于复杂曲线边界自由面重力流的数值计算。

3. 在流量已知的条件下证明了迭代过程的收敛性, 收敛的迭代过程同时也是稳定的。只要数值积分有足够精度, 就可得到满足所需精度的数值解, 结果的精度便于控制和提高。

4. 数值计算表明,本文方法具有求解未知量少,输入初始数据少,收敛速度快,精度高,机时短的优点。

参 考 文 献

- [1] Tio-Chun Chen, Yun-Sheng You, Pressure Distribution on Spillway Flip Buckets, *Journal of The Hydraulics Division*, ASCE, 91, HY2, March (1965), 51—63.
- [2] Л. М. 考脱略尔, В. И. 斯基巴诺娃, 用水动力学方法研究弧形闸门的出流, *Гидротехническое Строительство*, (1981).
- [3] Fangmeier, D. D., Stralkoff, T. S., Solution for Gravity Flow under A Sluice Gate, *Journal of The Engineering Mechanics Division*, ASCE, 94, EM1, Feb. (1968), 153—176.
- [4] Stralkoff, T. S., Moayeri, M. S., Pattern of Potential Flow in A Free Overfall, *Journal of The Hydraulics Division*, ASCE, 96, HY4, Apr. (1970), 879—901.
- [5] 陈耀松, 彭岳林“闸下自由出流的数值计算”《全国第一届计算流体力学会议论文集》1983年。
- [6] Watters, G. Z., Street, R. L., Two-Dimensional Flow over Sills in Open Channels, *Journal of The Hydraulics Division*, ASCE, 90, HY4, July (1964), 107—140.
- [7] Larock, B. E., A Theory for the Outflow Beneath Radial Gates, *Journal of Fluid Mechanics*, 41, Part4, (1970), 851—864.
- [8] Moayeri, M. S., Flow Open Channels with Smooth Curved Boundaries, *Journal of The Hydraulics Division*, ASCE, 99, HY12, Dec. (1973), 2217—2231.
- [9] Н. И. 穆斯海里什维里著《奇异积分方程》, 朱季纳译, 上海科学技术出版社, (1966).
- [10] Н. И. 穆斯海里什维里著《数学弹性力学的几个基本问题》, 赵惠元译, 科学出版社, (1958).

AN ITERATION METHOD FOR INTEGRAL EQUATIONS ARISING FROM GRAVITY-INFLUENCED FREE SURFACE FLOWS

Wen Xianyun Wu Chigong

(Department of Water Resources Engineering, Chengdu University of Science and Technology)

Abstract

In this paper, using Muskhelishvili's singular integral equation theory, the authors turn gravity-influenced free surface flows into Riemann-Hilbert problem. Taking the length of the streamline of the boundary as a variable and the velocity potential of the boundary as a function to be determined, the authors avoided the difficulty that the angle of the curved fixed part is unknown. Following the application of the difference method and the finite element method, the authors developed a new numerical method that is suited for complex solid boundaries and which overcomes the difficulties encountered when applying analytic function theory. Under known discharge, the convergence and stability of the method have been proved and an estimation of error has been obtained. The method has been successfully applied to the calculation of the flow past spillway buckets. The calculated values agree extremely well with the measured results.