

层结流体平行剪切流的不稳定和重力内波

秦 曾 灏*
(山东海洋学院)

摘要 本文研究无粘的非 Boussinesq 层结流体平行剪切流的不稳定性质,其中充分考虑自由顶面以及底面呈二次曲线剖面的起伏效应,从而推广了 Miles 定理^[1]和 Howard 半圆定理^[2]。此外,还讨论了非静力学和非 Boussinesq 效应对重力内波的影响。

一、引 言

1961年 J. W. Miles^[1]研究了层结流体中平行剪切流的某些不稳定性质,得到了著名的 Miles 定理。其后, L. N. Howard^[2]给出了该定理的简洁证明,并获得了著名的半圆定理。这两个定理在海洋科学和大气科学中均有着广泛的应用。遗憾的是他们的理论只适用于二维流动,并且在证明和推理过程中还假设流体为无粘的 Boussinesq 流体以及顶、底边界为水平固壁的条件,因而有较大的局限性。本文旨在将这两个定理推广至三维的非 Boussinesq 流体情形,并充分考虑到波宽以及顶、底边界的起伏效应,从而获得若干有意义的结论。在本文的最后部分,还专题讨论了非静力、 δ 效应和准不可压缩性对重力内波的影响。

二、控制方程

考察含有基本流的铅直切变的无粘层结流体中的重力内波,其线性化的控制方程组的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + w \frac{dU}{dz} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \lambda \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \frac{N^2 w}{g} &= 0, \quad \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\rho_0 N^2}{g} w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 u, v, w 依次代表 $x-, y-, z$ -坐标方向的扰动速度、 p 为扰动压强、 ρ 为扰动密度。沿 x 方向的基本流速 U , 密度 ρ_0 和浮力频率 $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}$ 均为铅直坐标 z 的函

本文于 1985 年 3 月 16 日收到, 1986 年 2 月 17 日收到修改稿。

* 现调上海市气象局。

数; $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$; t 为时间坐标, λ, μ 和 δ 均为只能取 1 或零值的参量, 其定义为

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \begin{cases} 0, & \text{静力学近似} \\ 1, & \text{非静力学近似} \end{cases} \\ \mu &= \begin{cases} 0, & \text{不可压缩近似} \\ 1, & \text{准不可压缩近似或滞弹性近似 (Anelastic approximation)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

从方程组 (1) 经消元得

$$\mathcal{L}w = 0 \quad (3)$$

其中算子

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\lambda \frac{D^2}{Dt^2} + N^2 \right) \nabla_h^2 + \frac{D^2}{Dt^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - (\mu + \delta) \frac{N^2}{g} \frac{\partial}{\partial z} + \mu \left(\frac{\delta N^2}{g^2} - \frac{2NN_z}{g} \right) \right] \\ & + \left[(\delta - \mu) \frac{N^2}{g} \frac{dU}{dz} - \frac{d^2U}{dz^2} \right] \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (3')$$

$\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 下标量表示求导.

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{对应于方程组 (1) 前三个方程中的 } \rho_0 \text{ 取作常数的情形} \\ 1, & \text{对应于方程组 (1) 前三个方程中的 } \rho_0 = \rho_0(x) \text{ 的情形, 称 } \delta \text{ 近似} \end{cases} \quad (2')$$

三、不可压缩流体动力模式中的剪切不稳定

先考察非静力和 $\rho_0 = \rho_0(x)$ 的不可压缩流体中含基本流铅直切变的线性重力内波的不稳定. 此时在 (3), (3)' 式中令 $\lambda = \delta = 1, \mu = 0$, 则有控制方程

$$\mathcal{L}_1 w = 0 \quad (4)$$

其中算子

$$\mathcal{L}_1 = \frac{D^2}{Dt^2} \left(\nabla^2 - \frac{N^2 \partial}{g \partial z} \right) + N^2 \nabla_h^2 + \left(\frac{N^2}{g} \frac{dU}{dz} - \frac{d^2U}{dz^2} \right) \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial x} \quad (4')$$

而 $\nabla^2 = \nabla_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. 设波动局限于 $-\infty < x < +\infty, -D \leq y \leq +D, -h \leq z \leq \zeta$ 的沟渠内, 其底形倾斜的廓线方程为

$$h(x) = h_0 + \alpha x + \beta x^2/2 \quad (h_0, \alpha, \beta \text{ 为常量}) \quad (5)$$

顶面动力学边界条件为

$$z = \zeta, \quad \frac{Dp}{Dt} = \rho_0 g w \quad (6)$$

从 (1) 式的第 1, 2, 3 三式消去 u 和 v 得

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{dU}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \nabla_h^2 p \quad (7)$$

从 (6), (7) 二式消去 p 有

$$z = \zeta, \quad \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{dU}{dz} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - g \nabla_h^2 w = 0 \quad (8)$$

底边界条件为

$$z = -h(x), \quad w = -U \frac{\partial h}{\partial x} = -(\alpha + \beta x)U \quad (9)$$

侧向边界条件为 $y = \pm D, v = 0$, 由 (1) 式的第 2 式知 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, 利用 (7) 式得与此相当的条件为

$$y = \pm D, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

因 $h(x)$ 仅是二次曲线, 故定解问题 (4), (8), (9), (10) 等价于下列问题

$$\mathcal{L}_1 w_1 = 0 \quad (11)$$

$$z = \zeta, \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right) - \frac{dU}{dz} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - g \nabla_H^2 w_1 = 0 \quad (12)$$

$$z = -h(x), w_1 = 0 \quad (13)$$

$$y = \pm D, \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

其中 $w_1 = w + (\alpha + \beta x)U$, 由 (14) 式知, 方程 (11) 具有下列波解

$$w_1 = \Phi(z) e^{\frac{1}{2} \zeta} \int^{N^2 dz} \cdot \sin ly \cdot e^{i k(x-ct)} \quad (15)$$

其中 $l = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{D}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$); c 为相速. 将 (15) 式代入 (11)–(13) 式得

振幅因子 $\Phi(z)$ 所满足的常微分方程和定解条件如下

$$E^2 \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \left[E^2 \left(\frac{NN_x}{g} - \frac{N^4}{4g^2} - K_H^2 \right) + E \left(\frac{N^2}{g} \frac{dE}{dz} - \frac{d^2 E}{dz^2} \right) + \frac{N^2 K_H^2}{k^2} \right] \Phi = 0 \quad (16)$$

$$z = \zeta, E^2 \frac{d\Phi}{dz} = \left(\frac{gK_H^2}{k^2} + E \frac{dE}{dz} - E' \frac{N^2}{2g} \right) \Phi \quad (17)$$

$$z = -h(x), \Phi = 0 \quad (18)$$

其中 $E = U - c$, $K_H^2 = k^2 + l^2$. (16)–(18) 构成 Sturm-Liouville 问题, 可在给定 $U(z)$, $N(z)$ 的函数形式情况下求解.

1. 不稳定的必要条件

置代换 $G(z) = E^{-\frac{1}{2}}(z) \cdot \Phi(z)$, 则式 (16)–(18) 转为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(E \frac{dG}{dz} \right) + \left\{ E \left(\frac{NN_x}{g} - \frac{N^4}{4g^2} - K_H^2 \right) + \frac{1}{E} \left[\frac{N^2 K_H^2}{k^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{N^2}{g} \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{dz^2} \right\} G = 0 \end{aligned} \quad (16)'$$

$$z = \zeta, E \frac{dG}{dz} = \left(\frac{1}{2} \frac{dE}{dz} - \frac{N^2 E}{2g} + \frac{gK_H^2}{k^2 E} \right) G \quad (17)'$$

$$z = -h(x), G = 0 \quad (18)'$$

现以 $G(z)$ 的复共轭函数 $G^*(z)$ 分别乘 (16)'–(18)' 式, 在深度区间 $[-h, \zeta]$ 对所

得方程进行积分, 并利用相应的边界条件, 得

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dE}{dz} \right)_0 + \frac{N_0^2 E_0}{2g} + \frac{gK_H^2 E_0^*}{k^2 |E_0|^2} \right] \cdot |G_0|^2 = \int_{-h}^{\zeta} \left\{ E \left| \frac{dG}{dz} \right|^2 - \left[\left(\frac{NN_x}{g} - \frac{N^4}{4g^2} - K_H^2 \right) E \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{N^2 K_H^2}{k^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{dE}{dz} \right)^2 \right] \frac{E^*}{|E|^2} + \frac{N^2}{g} \frac{dE}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{dz^2} \right] |G|^2 \right\} dz \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $E^*(x)$ 为 $E(x)$ 的复共轭函数, 下标 "0" 表示顶面值. 令上式中的实部和虚部分别相等, 得

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{gK_H^2}{k^2|U_0-c|^2} - \frac{N_0^2}{2g} \right) (U_0 - c_r) + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dz} \right)_0 \right] |G_0|^2 \\ & = \int_{-h}^z \left\{ \left| \frac{dG}{dz} \right|^2 + \left\{ (U - c_r) \left[\left(K_H^2 + \frac{N^4}{4g^2} - \frac{NN_s}{g} \right) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - \frac{N^2 K_H^2}{k^2} \right) \frac{1}{|U - c|^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{N^2}{g} \frac{dU}{dz} \right\} |G|^2 \right\} dz \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & c_i \left\{ \left(\frac{N_0^2}{2g} + \frac{gK_H^2}{k^2|U_0-c|^2} \right) |G_0|^2 + \int_{-h}^z \left\{ \left| \frac{dG}{dz} \right|^2 + \left[K_H^2 + \frac{N^4}{4g^2} - \frac{NN_s}{g} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{|U - c|^2} \left(\frac{N^2 K_H^2}{k^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right) \right] |G|^2 \right\} dz \right\} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中 c_r 和 c_i 分别代表相速 c 的实部和虚部. 对于稳定层结流体中的不稳定波, $c_i \approx 0$, 则必要求 (22) 式中的大括弧内的量等于零. 由于其中不含积分号的首项恒为正, 则要求积分值为负, 这相当于在各个深度或在多数深度上满足条件

$$K_H^2 + \frac{N^4}{4g^2} - \frac{NN_s}{g} + \frac{(dU/dz)^2 K_H^2}{|U - c|^2 k^2} \left(Ri - \frac{1}{4} \frac{k^2}{K_H^2} \right) < 0 \quad (22)$$

其中 $Ri = N^2 / \left(\frac{dU}{dz} \right)^2$ 为 Richardson 数. 取海洋的典型值^[3], $N \sim 4 \times 10^{-2}$ 秒⁻¹, $N_s \sim 10^{-3}$ 米⁻¹ · 秒⁻¹, $NN_s/g \sim 4 \times 10^{-8}$ 米⁻², 则对于波长为几米到百米的海洋内波, $K_H^2 \sim 1 - 10^{-4}$ 米⁻², 故一般地 NN_s/g 项相对于 K_H^2 项可被忽略不计. 可见, 不论 $\frac{dU}{dz} \geq 0$, 内波不稳定的必要条件为

$$Ri < \frac{1}{4} \frac{k^2}{K_H^2} \quad \text{或} \quad Ri < \frac{1}{4[1 + (L_x/D)^2]} \quad (23)$$

其中 L_x 为 x 方向的波长. 上式表明, 如果 Ri 数在各个深度或在多数深度上小于 $\frac{k^2}{4K_H^2}$, 则可能产生不稳定波. 这个 Ri 数的临界值 Ri_c 比 Miles^[4] 求到的 $\frac{1}{4}$ 更小. 仅当波宽 D 趋于无限大时, 两者数值相等. 这里求列的临界值是 x -波长与波宽之比值的函数, 它随这个比值的增大而减小. 从图 1 看到, 和 Miles 的结果相比, 波的可能不稳定区域 (阴影区) 缩小了. 因为 $\frac{k^2}{K_H^2} \leq 1$, 故不稳定判据 (24) 也可写成更强的条件

$$Ri < \frac{1}{4} \quad (23)'$$

从 (22), (23) 两式看到, 非 Boussinesq 效应对内波的剪切不稳定的附加修正并不重要.

必须指出, 上述不稳定判据虽不受背景流场的铅直结构形式的限制, 但基流铅直分布的不均匀却也是内波不稳定的一个必要条件. 它的存在正是扰动通过雷诺应力将基本流向扰动动能转换以获取能量的主要源泉之一.

2. 不稳定波的增长率

对于不稳定波, $c_i \approx 0$, 由 (21) 式知, 这等价于下式成立

$$\begin{aligned}
 k^2 \int_{-h}^{\zeta} |G|^2 dz = & - \left\{ \left[\frac{N_0^2}{2g} + \frac{gK_H^2}{k^2|U_0 - c|^2} \right] |G_0|^2 + \int_{-h}^{\zeta} \left[\left| \frac{dG}{dz} \right|^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(K_H^2 + \frac{N^4}{4g^2} - \frac{NN_z}{g} \right) |G|^2 \right] dz \right\} \\
 & + \int_{-h}^{\zeta} \frac{(dU/dz)^2}{|U - c|^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{K_H^2}{k^2} Ri \right) |G|^2 dz > 0 \quad (24)
 \end{aligned}$$

如 $\left| \frac{NN_z}{g} \right| < K_H^2 + \frac{N^4}{4g^2}$ 或 $N_z < 0$ (前一条件在海洋和大气中恒得满足), 则因

$$\frac{1}{|U - c|^2} \leq \frac{1}{c_i^2}$$

有

$$\left. \begin{aligned}
 0 < k^2 \int_{-h}^{\zeta} |G|^2 dz < \frac{1}{c_i^2} \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \frac{K_H^2}{k^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{K_H^2}{k^2} Ri \right) |G|^2 dz \\
 \text{或 } kc_i < \max \left(\frac{dU}{dz} \right) \frac{K_H}{k} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{K_H^2}{k^2} Ri}
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

上式给出了不稳定波的最大增长率。因 $kc_i > 0$, 故上式再次给出不稳定判据

$$Ri < \frac{k^2}{4K_H^2} \leq \frac{1}{4}$$

3. 不稳定条件的进一步讨论

置代换 $F(x) = E^{-1}(x)\Phi(x)$, 则方程 (16) 和边界条件 (17), (18) 变换成

$$\frac{d}{dz} \left(E^2 \frac{dF}{dz} \right) + \left[E^2 \left(\frac{NN_z}{g} - \frac{N^4}{4g^2} - K_H^2 \right) + \frac{N^2}{2g} \frac{dE^2}{dz} + \frac{N^2 K_H^2}{k^2} \right] F = 0 \quad (16)''$$

$$z = \zeta, E^2 \frac{dF}{dz} = \left(\frac{gK_H^2}{k^2} - \frac{N^2 E^2}{2g} \right) F \quad (17)''$$

$$z = -h(x), F = 0 \quad (18)''$$

以 $F(x)$ 的复共轭函数 $F^*(x)$ 遍乘上列各式, 再对方程求积分, 利用相应的边界条件, 将所得结果分离实、虚两部得

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\zeta} [(U - c_r)^2 - c_i^2] S_1 dz - \int_{-h}^{\zeta} \left[\frac{N^2}{g} (U - c_r) + \frac{N^2 K_H^2}{k^2} \right] |F| dz \\
 + \left\{ \frac{N_0^2}{2g} [(U_0 - c_r)^2 - c_i^2] - \frac{gK_H^2}{k^2} \right\} |F_0|^2 = 0 \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$c_i \left[\int_{-h}^{\zeta} (U - c_r) S_1 dz - \int_{-h}^{\zeta} S_2 dz + (U_0 - c_r) S_3 \right] = 0 \quad (27)$$

其中 $S_1 = \left(\left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + K_H^2 + \frac{N^4}{4g^2} - \frac{NN_z}{g} \right) |F|^2 > 0$, $S_2 = \frac{N^2}{2g} \frac{dU}{dz} |F|^2$, $S_3 = \frac{N_0^2}{2g} |F_0|^2 > 0$.

对于不稳定波, $c_i \neq 0$, 故 (27) 式中括号内的量等于零即为内波不稳定的条件。在层结稳定的流体中, 下列情形可能出现波动不稳定: (1) 西向*流随深度的增大而减小; (2) 如顶面为固壁或顶面的贡献 (含 $|F_0|^2$ 项) 很小, 东向流随深度的增大而减小, 且各层流

* 规定 x 轴指向东。

速以大于相速占优势; (3) 如顶面为固壁或顶面的贡献很小, 东向流随深度的增大而增强, 且各层流速以小于相速占优势; (4) 如为 Boussinesq 流体, 流速在深度区间 $[-h, \zeta]$ 内至少变号一次, 即有流速等于相速的临界层存在。

4. Howard 半圆定理的推广

将 (26), (27) 两式改写为

$$\int_{-h}^{\zeta} U^2 S_1 dz + U_0^2 S_3 + (c_r^2 - c_i^2) \left[\int_{-h}^{\zeta} S_1 dz + S_3 \right] - 2 \int_{-h}^{\zeta} (U - c_r) S_2 dz - 2c_r \left[\int_{-h}^{\zeta} US_1 dz + U_0 S_3 \right] - \int_{-h}^{\zeta} \frac{N^2 K_H^2}{k^2} |F|^2 dz - \frac{g K_H^2}{k^2} |F_0|^2 = 0 \quad (26')$$

$$c_r = \frac{\left[\int_{-h}^{\zeta} US_1 dz - \int_{-h}^{\zeta} S_2 dz - U_0 S_3 \right]}{\left[\int_{-h}^{\zeta} S_1 dz + S_3 \right]} \quad (27')$$

令 U_m 和 U_M 为流速 U 在整个深度内的最小值和最大值, 注意 S_1 和 S_3 恒为正值, 有下列等式

$$0 \geq \int_{-h}^{\zeta} (U - U_m)(U - U_M) S_1 dz + (U_0 - U_m)(U_0 - U_M) S_3 = \left[\int_{-h}^{\zeta} U^2 S_1 dz + U_0^2 S_3 \right] - (U_m + U_M) \left[\int_{-h}^{\zeta} US_1 dz + U_0 S_3 \right] + U_m U_M \left[\int_{-h}^{\zeta} S_1 dz + S_3 \right] \quad (28)$$

利用 (26)', (27)' 两式和恒等式

$$c_r^2 + c_i^2 - (U_m + U_M)c_r + U_m U_M = (c_r - \bar{U})^2 + c_i^2 - \Delta U,$$

可将 (28) 式改写成

$$(c_r - \bar{U})^2 + c_i^2 \leq (\Delta U)^2 + \left[2\bar{U} \left(\int_{-h}^{\zeta} S_2 dz - \frac{1}{\bar{U}} \int_{-h}^{\zeta} US_2 dz \right) - \frac{K_H^2}{k^2} \left(\int_{-h}^{\zeta} N^2 |F|^2 dz + g |F_0|^2 \right) \right] / \left[\int_{-h}^{\zeta} S_1 dz + S_3 \right] \quad (29)$$

其中 $\bar{U} = \frac{U_m + U_M}{2}$, $\Delta U = \frac{U_M - U_m}{2}$, 注意 $\int_{-h}^{\zeta} S_2 dz \approx \frac{1}{\bar{U}} \int_{-h}^{\zeta} US_2 dz$, 故近似地有

$$(c_r - \bar{U})^2 + c_i^2 \leq c_r^2 \quad (30)$$

其中

$$c_r^2 = (\Delta U)^2 - \frac{K_H^2}{k^2} \left[\int_{-h}^{\zeta} N^2 |F|^2 dz - g |F_0|^2 \right] / \left[\int_{-h}^{\zeta} S_1 dz + S_3 \right] < (\Delta U)^2 \quad (30')$$

可见, 不稳定波的 c_r 和 c_i 都落在相速复数平面上圆心为 $(\bar{U}, 0)$ 、半径为 c_r 的上半圆内, 此半圆比 Howard 求到的 ΔU 为小 (图 2)。在均质流体且顶面为固壁时, 上述结果便退化成为 Howard 的结果。

5. 扰动的能量分析

不难求到相应于系统 (1) 的扰动能量方程为

$$\frac{D}{Dt} \left[\rho_0 \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\rho}{\rho_0} \phi - \frac{N^2}{2g^2} \phi^2 \right) \right] = -\nabla \cdot p\mathbf{V} + \mu \frac{N^2}{g} \rho w - \rho_0 w u \frac{dU}{dz} \quad (31)$$

其中 $\mathbf{V}(u, v, w)$ 为流速矢量, $\phi = gz$, $V^2 = u^2 + v^2 + (\lambda w)^2$ 。上式对 x 取平均运算 $(\bar{\quad})$ 并对 y, z 求积分, 利用边界条件 $y = \pm D, \bar{v} = 0$ 得

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{E}}{Dt} = & - \int_{-D}^D [(\overline{pw})_{z=\zeta} - (\overline{pw})_{z=-h}] dy + \frac{\mu N^2}{g} \int_{-D}^D dy \int_{-h}^{\zeta} \overline{pw} dz \\ & - \int_{-D}^D dy \int_{-h}^{\zeta} \left(\rho_0 \overline{wu} \frac{dU}{dz} \right) dz \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\tilde{E} = \int_{-D}^D dy \int_{-h}^{\zeta} \rho_0 \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\rho\phi}{\rho_0} - \frac{N^2\phi^2}{2g^2} \right) dz$ 为系统的扰动总能量(扰动动能、扰动位能和扰动有效位能之和)。正如(32)式等式右方三个积分项所表明的,系统扰动能源有三:(1)顶面压力和底面压力对流体微团的合功率。当顶面和底面平坦时,此能源即行消失。(2)由流体的准不可压缩性引起的系统内压力功率,它总与流体层结联系在一起。对于均质或不可压缩流体,此能源即被排除。(3)基本流的动能通过雷诺应力 $-\rho_0 \overline{wu}$ 向扰动动能的转换项。当雷诺应力和基本流的铅直切变同号或呈正相关时,便有扰动动能的增长。在均匀基本流时,此能源即行消失。

在本问题中,流体被认为是不可压缩的,所以扰动通过雷诺应力将基本流动动能转换成扰动动能是扰动赖以发展的主要能源,而顶面和底面的压力对流体做功也是为扰动产生不稳定提供能量的另一源泉。

四、准不可压缩流体动力模式中的剪切不稳定

上节以不可压缩流体动力学模式研讨剪切流不稳定的一些性质,现就非静力、

$$\rho_0 = \rho_0(z)$$

和准不可压缩流体动力学模式对同一问题作一讨论。设底形剖面仍为 x 的二次曲线(5),令(3)和(3)'两式中的 $\lambda = \mu = \delta = 1$, 则问题归结为求如下的定解问题

$$\mathcal{L}_2 w_1 = 0 \quad (33)$$

$$z = \zeta, \quad \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{N^2 w_1}{g} \right) - \frac{dU}{dz} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - g \nabla_H^2 w_1 = 0 \quad (34)$$

$$z = -h(x), \quad w_1 = 0 \quad (35)$$

$$y = \pm D, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

其中算子

$$\mathcal{L}_2 = \frac{D^2}{Dt^2} \left[\nabla^2 - \frac{\partial N^2}{g} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{N^4}{g^2} - \frac{2NN_z}{g} \right) \right] + N^2 \nabla_H^2 - \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial x} \quad (33)'$$

设解具有下列形式

$$w_1 = \phi(z) e^{\frac{1}{2} \int N^2 dz} \cdot \sin ly \cdot e^{ik(x-ct)} \quad (37)$$

其中 $l = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{D}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), 于是定解问题(33)–(36)式转成下列问题

$$E^2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \left[K_H^2 \left(\frac{N^2}{k^2} - E^2 \right) - E \frac{d^2 E}{dz^2} - \frac{2NN_z}{g} E^2 \right] \phi = 0 \quad (38)$$

$$z = \zeta, \quad E^2 \frac{d\phi}{dz} = \left(\frac{gK_H^2}{k^2} + \frac{1}{2} \frac{dE^2}{dz} \right) \phi \quad (39)$$

$$z = -h(x), \quad \phi = 0 \quad (40)$$

令 $H(x) = E^{-\frac{1}{2}}(x)\phi(x)$, 则可获得 (20) 和 (21) 式中舍弃下划波纹项并以 $\frac{2NN_s}{g}$ 代替 $-\frac{NN_s}{g}$ 项, G 和 G_0 分别代以 H 和 H_0 的相应得式。由此得到波的不稳定必要条件与半圆定理与上节的结论并无本质差异, 只是半圆定理中的半圆半径表达式中的 S_2 和 S_3 取为零, S_1 中的 $\frac{N^4}{4g^2} - \frac{NN_s}{g}$ 项代之以 $\frac{2NN_s}{g}$ 即可, 从而使半圆的半径更小。具体讨论不再赘述。

顺便指出, 此时扰动能源共三个, 如 (32) 式所示。

五、不同模式中内波相速的比较

现在进而讨论不同的流体动力学模式中内波的相速, 借以揭示和确定非静力, 非 Boussinesq 近似对内波的影响。

从普遍的内波控制方程 (3) 和 (3)' 出发, 在 N 为常量和不存在基流铅直切变的情况下取波解 (15), 得下列振幅因子 Φ 所满足的常微分方程和相应的定解条件

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + m^2\Phi = 0 \quad (41)$$

$$z \approx 0, \quad \frac{d\Phi}{dz} = \left[\frac{gK_H^2}{k^2(U-c)^2} + \frac{(\mu-\delta)N^2}{2g} \right] \Phi \quad (42)$$

$$z = -h(x), \quad \Phi = 0 \quad (43)$$

其中

$$m^2 = K_H^2 \left(\frac{N^2}{k^2(U-c)^2} - \lambda \right) - \frac{(\mu-\delta)^2 N^4}{4g^2} \quad (44)$$

由此可得频率关系

$$\frac{\tan mh}{mh} = \frac{2gk^2(U-c)^2}{[2g^2K_H^2 + (\mu-\delta)N^2k^2(U-c)^2]h} \quad (45)$$

和铅直扰动速度的铅直结构表达式

$$\Phi e^{N^2 z/g} = C e^{N^2 z/g} (\tan mh \cos mx + \sin mx), \quad (46)$$

其中 C 为常量。方程 (45) 可用图解法求解^[3]。值得指出的是当 mh 很小, 即铅直波长很长时, 有近似式 $\tan mh/mh \approx 1$, 则由 (45) 式得相速度

$$c = U \pm \frac{gK_H}{k} \sqrt{\frac{h}{g + (\delta - \mu)N^2 h/2}} \quad (47)$$

这时层结因子只和 δ 效应或准不可压缩性相联系。在其他条件相同的情况下, 上述不可压缩流体动力模式中求到的相对基本流的相速比 Boussinesq 流体动力模式 ($\lambda = 1$, $\mu = \delta = 0$) 中的对应值为小, 而从准不可压缩以及从 Boussinesq 流体动力模式求到的相速则相等。

为讨论简便起见, 设顶界为固壁, 则条件 (42) 易为 $z \approx 0, \Phi = 0$, 而频率关系 (45) 则退化为

$$\tan mh = 0, \quad \text{即 } m = n\pi/h, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (48)$$

上式结合 (44) 式得到相速度

$$c = U \pm \frac{K_H N h}{k \sqrt{n^2 \pi^2 + \lambda K_H^2 h^2 + (\mu - \delta)^2 N^4 h^2 / 4g^2}} \quad (49)$$

或

$$c = U \pm \frac{N L_x (h/L)}{\pi \sqrt{n^2 + 4\lambda (h/L)^2 + (\mu - \delta)^2 (h/L_N)^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (49)'$$

其中 $L = 2\pi/K_H$ 和 $L_N = 2\pi/(N^2/g)$ 分别代表水平波长和表征流体层结的特征长度。(49)' 式指出, 静力学近似成立的条件为 $(h/L)^2 \ll 1$ 或等价地 $h < L$, 即要求流体深度小于水平波长。正如所知, 这一判据具有普遍意义, 它不仅适用于内波, 也适用于包括海洋和大气在内的任何流体运动。

从 (49)' 式还可看到, Boussinesq 近似成立的条件为 $(h/L_N)^2 \ll 1$ 或等价地 $h < L_N$, 即要求流体深度小于表征流体层结的特征长度。表 1 和表 2 列出了海洋和大气中 N 和 h 值的变动范围内所对应的 L_N 和 $(h/L_N)^2$ 值。

表 1 L_N 值

N (秒 ⁻¹)	6.3×10^{-2}	10^{-2}	2×10^{-3}	10^{-4}
L_N (米)	1.6×10^4	6.3×10^3	1.6×10^2	6.3×10^1

表 2 $(h/L_N)^2$ 值

N (秒 ⁻¹) \ / h (米)	6.3×10^{-2}	10^{-2}	2×10^{-3}	10^{-4}
10^2	3.9×10^{-9}	2.5×10^{-8}	3.9×10^{-11}	2.5×10^{-16}
10^3	3.9×10^{-3}	2.5×10^{-6}	3.9×10^{-9}	2.5×10^{-14}
4×10^3	6.3×10^{-2}	4×10^{-5}	6.3×10^{-8}	4×10^{-13}
10^4	0.39	2.5×10^{-4}	3.9×10^{-7}	2.5×10^{-12}
3×10^4	3.5	2.3×10^{-3}	3.5×10^{-6}	2.3×10^{-11}

从表看出, 由于平均说来, 大气内波 $N \sim 10^{-2}$ 秒⁻¹, $h \sim 10^3 - 10^4$ 米, 所以 δ 效应和准不可压缩性对内波相速的订正并不重要, 只是在层结强烈稳定 (如 $N \sim 10^{-1}$ 秒⁻¹) 的个别情形才需要考虑采用 δ 效应和准不可压缩近似。观测表明, 海洋中的 N 值变化于 10^{-4} 秒⁻¹ (大洋) — 10^{-2} 秒⁻¹ (温跃层), 平均值为 10^{-3} 秒⁻¹。因此, 无论是浅海还是大洋, δ 效应和准不可压缩近似对实际海洋内波相速的影响总是微不足道的, 而可以把海水当作 Boussinesq 流体处理。尤其是对浅海内波, 采用 Boussinesq 近似具有比大洋内波更高的精度。

从 (49)' 式还可看到, 分别采用非静力学近似、 δ 近似和准不可压缩近似会使相对于基本流的内波相速数值变小但传播方向不变。但同时采用不计 δ 效应和不可压缩假定的 Boussinesq 近似则对内波相速不产生任何影响。

从 (46), (48) 和 (49) 以及 (16) 诸式可得 U, N 均为常量, 顶面为固壁而底壁呈二次曲线剖面的铅直扰动速度的结构

$$\omega = C_1 e^{(\mu+\delta)N^2 z/2g} \cdot \sin \frac{n\pi z}{h} \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{D} \cos k(x - ct) - (\alpha + \beta x)U, \quad (z \leq \zeta) \tag{50}$$

它在顶面和底壁处为零,而在深度为

$$z = -h_1 = \frac{h}{n\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2n\pi g}{(\mu + \delta)N^2 h} \right)$$

处达到最大值。而在 Boussinesq 流体中,铅直扰动速度则为简单的正弦型铅直分布,最大值出现在深度 $h/2n$ 。由上式和(1)式也不难求到扰动压力、扰动速度、扰动密度和水平散度的结构式,在此从略。

六、结 语

上面以两种不同的流体动力学模式展示了层化流体中剪切流的可能不稳定条件和半圆定理,它们不仅在量的方面和 Miles 与 Howard 的结果有所差别,而且在质的方面也有所不同。(1)由于考虑三维问题和在 y 方向的有限波宽的结果,使平行剪切流不稳定判据中的 Ri 数的临界值严格地依赖于 x 方向波长和 y 方向波宽的比值。(2)非 Boussinesq 近似的采用对层化平行剪切流的不稳定修正并不明显。(3)顶面取“自由”的动力学边界条件对剪切流的不稳定判据不产生任何影响,只对半圆定理的结论有量的影响。(4)底壁呈二次曲线剖面时和平底情形相仿,它丝毫不改变剪切流的不稳定性质和半圆定理,但若底壁呈二次以上曲线或其他函数形式剖面时,情形将大不相同,这有待进一步的研究。

文中还结合对内波相速的研究,分别给出了静力学近似和 Boussinesq 近似所必须满足的条件以及它们在大气和海洋内波中的适用范围,并阐明了重力内波铅直扰动速度的结构,所有这些都助于对内波问题的深入研究。

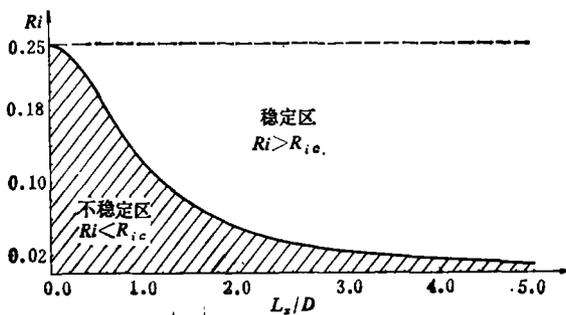


图 1

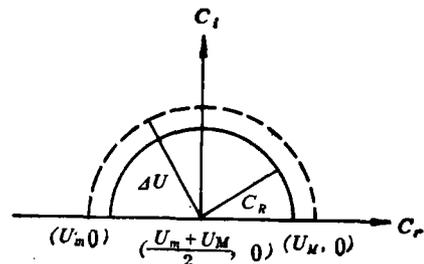


图 2

参 考 文 献

- [1] 富永政英,海洋波动——基础理论与观测成果,共立出版株式会社,第11章(1976).
- [2] Howard, L. N., Note on a paper of John W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **10** (1961), 509—512.
- [3] LeBlond, P. H. and Mysak, L. A., *Waves in the Ocean*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York (1978), 602.
- [4] Miles, J. W., On the stability of heterogeneous shear flows, *J. Fluid Mech.*, **10** (1961), 496—508.

ON THE GENERALIZATION OF THE STABILITY THEORY OF HETEROGENEOUS SHEAR FLOWS

Qin Zenghao*

(Shandong College of Oceanology)

Abstract

By taking into consideration of the free top surface and quadratically depth-varying profile of the bottom surface, the stability of inviscid, non-Boussinesq and stratified shear flows in two dynamic models are investigated in this paper. Thus, both Mile's theorem and Howard's semicircle theorem are generalized to the three-dimensional cases. The present author also discusses the non-hydrostatic and non-Boussinesq effects on the internal gravity waves and obtains the criteria for the hydrostatic and Boussinesq approximations. It is shown that, in general, both atmosphere and ocean may be treated as Boussinesq fluids except in a strongly stable atmosphere.

* Present address: Shanghai Meteorological Center.