

任意截面开口中长柱壳的分析

张丕辛 陆明万 黄克智
(清华大学)

摘要 本文在文献[1]的基础上,详细讨论了具有任意截面形状的开口中长柱壳基本应力状态的求解方法。给出了一个截面为半圆形的开口中长柱壳的计算实例,并对相应的材料力学模型进行了评价。

一、引言

中长柱壳是指其长度 l 与横截面特征尺寸 λ 之比为 $\sqrt{\lambda/h}$ 量级的一类柱壳 ($2h$ 为壳体厚度)。在文献[2]中,对中长柱壳中应力状态的特点进行了分析;文献[1]对具有任意截面形状的闭口中长壳的基本应力状态,以及各种边界条件组合情况下的求解方案进行了详细的讨论。中长柱壳的应力状态已不能由薄膜、纯弯和简单边界效应状态所组成。此时,沿壳体的纵向仍以薄膜状态为主,而沿横截面方向则是弯曲与薄膜状态同时存在。这种应力状态称为半无矩状态。

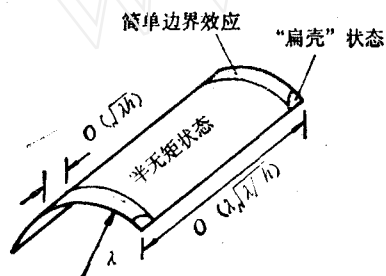


图 1

开口柱壳具有两直边和两曲边,共四条边界线。由于沿环向弯曲与薄膜成份同时存在,因此半无矩状态的基本方程在环向为八阶,可以独立地满足每条直边出现的四个边界条件。沿纵向以薄膜成份为主,基本方程在纵向为四阶,因而半无矩状态在两曲边边界上一般仅能满足面向边界条件,其余的边界条件还须靠引入简单边界效应状态来满足。这两种状态的相对比重要根据具体的

曲边边界条件而定,详细的讨论可参见文献[1]。

当引入简单边界效应状态后,直边边界靠近角点附近 $O(\sqrt{\lambda h})$ 尺寸范围内的边界条件可能被破坏。此时,要在这个区域进行更精细的分析,修正被破坏的边界条件,还需引入双向快变化的“扁壳”应力状态。壳中这几种应力状态的分布可见图1。

本文主要讨论开口中长柱壳中半无矩状态的求解问题,有关简单边界效应以及“扁壳”状态的讨论可参见[1]、[2]、[3]等文献。

二、符号规定

壳厚: $2h$; 壳长: $2l$; 曲率半径: $R(\eta)$; 线元长度: ds ; 广义坐标为 ξ, η 且满足

本文于1985年2月13日收到。

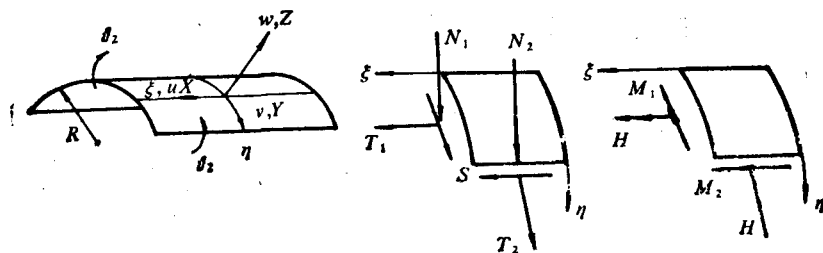


图 2

$$ds^2 = \lambda^2(d\xi^2 + d\eta^2) \quad (2.1)$$

R 满足

$$R(\eta) = \lambda r(\eta) \quad (2.2)$$

各物理量的符号规定见图 2.

三、柱壳基本方程

记

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = ()'; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = ()' \quad (3.1)$$

1. 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} T_1' + S' + \lambda X &= 0; \quad S' + T_2 - \frac{N_2}{r} + \lambda Y = 0; \quad N_1' + N_2 + \frac{T_2}{r} - \lambda Z = 0 \\ H' + M_2 - \lambda N_2 &= 0; \quad M_1' + H - \lambda N_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

2. 变形几何关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= u'/\lambda; \quad \varepsilon_2 = (v' + w/r)/\lambda; \quad \omega = (u' + v')/\lambda \\ \mathcal{H}_1 &= w''/\lambda^2; \quad \mathcal{H}_2 = (w' - v/r)/\lambda^2; \quad \tau = (w' - v/r)/\lambda^2 \\ \vartheta_1 &= w'/\lambda; \quad \vartheta_2 = (w' - v/r)/\lambda \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

3. 弹性关系:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); \quad S = \frac{Eh}{1+\nu} \omega \\ M_1 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\mathcal{H}_1 + \nu\mathcal{H}_2); \quad M_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\mathcal{H}_2 + \nu\mathcal{H}_1); \quad H = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)} \tau \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中: E 为弹性模量; ν 为泊桑比.

四、半无矩状态的基本方程及边界条件提法

1. 各物理量的渐近展开.

取 $h_* = h/\lambda$, 引入新坐标系 (ξ, η)

$$\xi = \xi h_*^{1/2}, \quad \eta = \eta \quad (4.1)$$

设分布力 X, Y, Z 及各未知量的渐近展开形式为:

$$\lambda^2 X = h_*^{3/2} X_{(0)}; \quad \lambda^2 Y = Y_{(0)}; \quad \lambda^2 Z = Z_{(0)} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Ehu &= h_*^{-3/2}(u_{(0)} + \cdots); & 2Ehv &= h_*^{-2}(v_{(0)} + \cdots); \\ 2Ehw &= h_*^{-2}(w_{(0)} + \cdots); & 2Eh\lambda\epsilon_1 &= h_*^{-1}(\epsilon_{1(0)} + \cdots); \\ 2Eh\lambda\epsilon_2 &= h_*^{-1}(\epsilon_{2(0)} + \cdots); & 2Eh\lambda\omega &= h_*^{-1/2}(\omega_{(0)} + \cdots); \\ 2Eh\lambda^2\mathcal{H}_1 &= h_*^{-1}(\mathcal{H}_{1(0)} + \cdots); & 2Eh\lambda^2\mathcal{H}_2 &= h_*^{-2}(\mathcal{H}_{2(0)} + \cdots); \\ 2Eh\lambda^2\tau &= h_*^{-3/2}(\tau_{(0)} + \cdots); & 2Eh\lambda\vartheta_1 &= h_*^{-3/2}(\vartheta_{1(0)} + \cdots); \\ 2Eh\lambda\vartheta_2 &= h_*^{-2}(\vartheta_{2(0)} + \cdots) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda T_1 &= h_*^{-1}(T_{1(0)} + \cdots); & \lambda T_2 &= T_{2(0)} + \cdots; & \lambda S &= h_*^{-1/2}(S_{(0)} + \cdots); \\ M_1 &= M_{1(0)} + \cdots; & M_2 &= M_{2(0)} + \cdots; & H &= h_*^{1/2}(H_{(0)} + \cdots); \\ \lambda N_1 &= h_*^{1/2}(N_{1(0)} + \cdots); & \lambda N_2 &= N_{2(0)} + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

等效横剪力 $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2$ 为:

$$\lambda\tilde{N}_1 = h_*^{1/2}(N_{1(0)} + H_{(0)} + \cdots); \quad \lambda\tilde{N}_2 = N_{2(0)} + \cdots \quad (4.5)$$

2. 半无矩状态的一次近似基本方程

将 (4.1)–(4.4) 式代入柱壳的基本方程 (3.2)–(3.4) 式中, 取一次近似, 得平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{1(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{(0)}}{\partial \eta} + X_{(0)} &= 0; & \frac{\partial S_{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_{2(0)}}{\partial \eta} - \frac{N_{2(0)}}{r} + Y_{(0)} &= 0; \\ \frac{T_{2(0)}}{r} + \frac{\partial N_{2(0)}}{\partial \eta} - Z_{(0)} &= 0; & N_{2(0)} = \frac{\partial M_{2(0)}}{\partial \eta}; & \frac{\partial M_{1(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial H_{(0)}}{\partial \eta} - N_{1(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

变形几何关系:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{1(0)} &= \frac{\partial u_{(0)}}{\partial \xi}; & \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \eta} + \frac{w_{(0)}}{r} &= 0; & \frac{\partial u_{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \xi} &= 0 \\ \mathcal{H}_{1(0)} &= \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \xi^2}; & \mathcal{H}_{2(0)} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w_{(0)}}{\partial \eta} - \frac{v_{(0)}}{r} \right); & \tau_{(0)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w_{(0)}}{\partial \eta} - \frac{v_{(0)}}{r} \right) \\ \vartheta_{1(0)} &= \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \xi}; & \vartheta_{2(0)} &= \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \eta} - \frac{v_{(0)}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

弹性关系:

$$\left. \begin{aligned} T_{1(0)} &= \epsilon_{1(0)}; & \nu\epsilon_{1(0)} + \epsilon_{2(0)} &= 0; & S_{(0)} &= \omega_{(0)}/2(1+\nu) \\ M_{1(0)} &= \nu\mathcal{H}_{2(0)}/3(1-\nu^2); & M_{2(0)} &= \mathcal{H}_{2(0)}/3(1-\nu^2); & H_{(0)} &= \tau_{(0)}/3(1+\nu) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

3. 半无矩状态的定解方程

根据 (4.6)–(4.8) 式, 我们得到各物理量之间的如下关系图:

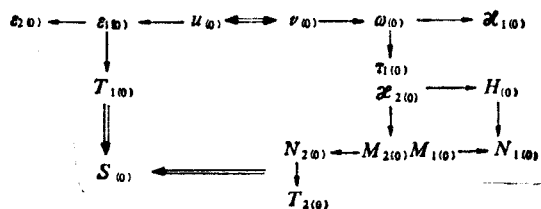


图 3

上图中单线方向表示经过微分或代数运算后, 可导出箭头所指的量; 双线表示包括积

分运算的导出过程。从图中可以清楚地看出各量的相互关系。显然,位移分量 $u_{(0)}$, $v_{(0)}$ 的地位较为重要,只要得知这两个分量,除 $S_{(0)}$ 以外的各量,均可由它们经过简单的代数或微分运算而得到。

选 $v_{(0)}$ 作基本量,一方面它能较 $u_{(0)}$ 导出更多物理量,另一方面选用 $v_{(0)}$ 可使具能按沿纵向的特征函数展开,从而给求解带来一些方便。下面导出 $v_{(0)}$ 所应满足的微分方程。

根据(4.7)式有:

$$\left. \begin{aligned} w_{(0)} &= -r \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \eta} & \mathcal{C}_{2(0)} &= -Q_2 v_{(0)} \\ \text{其中 } Q_2 &= \frac{\partial}{\partial \eta} Q_3 & Q_3 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \right) + \frac{(\dots)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

根据第四平衡方程及弹性关系有:

$$\left. \begin{aligned} M_{2(0)} &= -Q_2 v_{(0)} / 3(1 - \nu^2) & N_{2(0)} &= -Q v_{(0)} / 3(1 - \nu^2) \\ \text{其中 } Q &= \frac{\partial}{\partial \eta} Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

根据第二、第三平衡方程有:

$$\frac{\partial S_{(0)}}{\partial \xi} = \frac{N_{2(0)}}{r} - \frac{\partial T_{2(0)}}{\partial \eta} - Y_{(0)} = \frac{-Q_2 Q v_{(0)}}{3(1 - \nu^2)} - \left(Y_{(0)} + \frac{\partial(rZ_{(0)})}{\partial \eta} \right) \quad (4.11)$$

将第一平衡方程对 η 求导,并注意到 $T_{1(0)} = \frac{\partial u_{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{(0)}}{\partial \eta} = 0$, 可得:

$$-\frac{\partial^3 v_{(0)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 S_{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial X_{(0)}}{\partial \eta} = 0 \quad (4.12)$$

利用上式消去(4.11)中的 $S_{(0)}$ 项,得到关于 $v_{(0)}$ 的定解方程:

$$\frac{\partial^4 v_{(0)}}{\partial \xi^4} + \frac{Q Q v_{(0)}}{3(1 - \nu^2)} + p = 0, \quad p = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(Y_{(0)} + \frac{\partial(rZ_{(0)})}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 X_{(0)}}{\partial \eta \partial \xi} \quad (4.13)$$

(4.13) 式在环向为八阶,在纵向为四阶。

4. 半无矩状态边界条件的提法

曲边边界条件一般由半无矩状态与简单边界效应状态共同满足,文献[1]详细讨论了半无矩状态曲边边界的提法。在壳体每一端,半无矩状态应满足的面向边界条件共有四种组合,即给定: 1) $u_{(0)}$, $v_{(0)}$ 2) $u_{(0)}$, $S_{(0)}$ 3) $T_{1(0)}$, $v_{(0)}$ 4) $T_{1(0)}$, $S_{(0)}$ 。它们均可化为对 $v_{(0)}$ 的条件:

$$v_{(0)} = v_{(0)}; \quad \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial u_{(0)}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 v_{(0)}}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial T_{1(0)}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 v_{(0)}}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^2 S_{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial X_{(0)}}{\partial \eta} \quad (4.14)$$

全部直边边界条件均由半无矩状态满足,且可化为对 $v_{(0)}$ 的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} v_{(0)} &= v_{(0)}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} Q v_{(0)} = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{T_{2(0)}}{r} - Z_{(0)} \right) \\ \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \eta} &= -\frac{w_{(0)}}{r} & Q v_{(0)} &= -3(1 - \nu^2) N_{2(0)} \\ Q_2 v_{(0)} &= -Q_2(0) & Q_2 v_{(0)} &= -3(1 - \nu^2) M_{2(0)} \\ Q_2 Q v_{(0)} &= 3(1 - \nu^2) \left[\frac{\partial^3 u_{(0)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial X_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Y_{(0)} + \frac{\partial(rZ_{(0)})}{\partial \eta} \right) \right] \\ Q_2 Q v_{(0)} &= -3(1 - \nu^2) \left[\frac{\partial S_{(0)}}{\partial \xi} + Y_{(0)} + \frac{\partial(rZ_{(0)})}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

五、半无矩状态的求解

设解由两部分组成:

$$v_{(0)} = V + v_h \quad (5.1)$$

V 为满足两曲边边界条件的某个函数, 并且尽可能满足基本方程 (4.13) 式 (如做不到, 可以留待与 v_h 一起满足). V 的选取可以不考虑直边边界条件, 有时甚至可以利用文献 [1] 中闭口中长壳的结果.

v_h 为满足两曲边齐次条件的函数, 它必须和 V 共同满足基本方程 (4.13) 式及直边边界条件. v_h 可利用分离变量法求得.

将 (5.1) 式代入 (4.13) 式, 得到 v_h 满足的方程:

$$\frac{\partial^4 v_h}{\partial \xi^4} + \frac{Q Q v_h}{3(1 - \nu^2)} + \bar{p} = 0, \quad \bar{p} = p + q \quad (5.2)$$

这里的 q 是由 V 产生的, 若 V 满足 (4.13) 式则有:

$$q = -p \quad \bar{p} = 0 \quad (5.3)$$

设

$$v_h = \sum B_n(\eta) v_n(\xi) \quad (5.4)$$

$$\bar{p} = \sum A_n(\eta) v_n(\xi) \quad (5.5)$$

上两式中的 $v_n(\xi)$ 为由齐次方程:

$$\frac{d^4 v}{d \xi^4} - \lambda v = 0 \quad (5.6)$$

及 v_h 的齐次曲边边界条件所确定的一族特征函数, 可以证明 $v_n(\xi)$ 对任意的曲边边界条件组合都是存在且完备的. $v_n(\xi)$ 相应的特征值为 λ_n .

将 (5.4), (5.5) 式代入 (5.2) 式, 利用 (5.6) 式可得 $B_n(\eta)$ 满足的方程:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n B_n + \frac{Q Q B_n}{3(1 - \nu^2)} + A_n &= 0 \\ \text{此时 } Q &= \frac{d^2}{d \eta^2} \left[\frac{d}{d \eta} \left(r \frac{d(\dots)}{d \eta} \right) + \frac{(\dots)}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

设 b_{n0} 为 (5.7) 式的非齐次特解, b_{nj} ($j = 1, 2, \dots, 8$) 为 (5.7) 的八个线性无关齐次解, 则有:

$$B_n = b_{n0} + \sum_{j=1}^8 c_{nj} b_{nj} \quad (5.8)$$

其中 c_{nj} 为一组八个待定常数, 可以由直边的八个边界条件所确定. 此时 $v_{(0)}$ 已完全确定.

当 $v_{(0)}$ 确定后, 由图 3 可见: $u_{(0)}$ 、 $S_{(0)}$ 还必须通过积分来确定.

$$u_{(0)} = \int_{\eta_0}^{\eta} - \frac{\partial v_{(0)}}{\partial \xi} d\eta + \bar{u}(\xi) \quad (5.9)$$

$$S_{(0)} = \int_{\xi_0}^{\xi} - \left[Q_3 Q v_{(0)} / 3(1 - \nu^2) + \left(Y_{(0)} + \frac{\partial(r Z_{(0)})}{\partial \eta} \right) \right] d\xi + \bar{S}(\eta) \quad (5.10)$$

$\bar{u}(\xi)$ 、 $\bar{S}(\eta)$ 为待定积分函数. 逐个检验半无矩状态的各个方程得知: 仅当 $\bar{u}(\xi)$ 、 $\bar{S}(\eta)$ 满足:

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial^3 v_{(0)}}{\partial \xi^3} d\eta + \int_{\xi_0}^{\xi} \left[\frac{\partial_2 \partial v_{(0)}}{3(1-\nu^2)} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Y_{(0)} + \frac{\partial(rZ_{(0)})}{\partial \eta} \right) \right] d\xi - X_{(0)} = \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \frac{d\bar{S}}{d\eta} \quad (5.11)$$

时, 方程才能全部满足。

设 (5.11) 式左端为 $f(\xi, \eta)$, 由 (4.13) 式可知:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (5.12)$$

上式的一般解为 $f(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \phi(\eta)$. 因此:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} = \varphi(\xi) + c \quad \frac{d\bar{S}}{d\eta} = \phi(\eta) - c \quad (5.13)$$

c 为某个常数, φ 、 ϕ 的分离可由在 (5.11) 式中取 ξ 、 η 分别为某给定值而定。积分 (5.13) 式得:

$$\bar{u}(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi(\xi) d\xi d\xi + \frac{c}{2} (\xi - \xi_0)^2 + \bar{u}_1(\xi - \xi_0) + \bar{u}_2 \quad (5.14)$$

$$\bar{S}(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \phi(\eta) d\eta - c(\eta - \eta_0) + \bar{S}_0 \quad (5.15)$$

其中的积分常数 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$ 、 $\bar{S}_0$ 都有明确的物理意义, 连同 c 都可由边界给定的面向条件确定。

实际上有时可以直接求得 $\bar{u}(\xi)$ 、 $\bar{S}(\eta)$ 。 $\bar{u}(\xi)$ 为 $\eta = \eta_0$ 边上给定的切向位移; $\bar{S}(\eta)$ 为 $\xi = \xi_0$ 边上给定的面内剪力。可以验证这样给出的 $\bar{u}$ 、 $\bar{S}$ 仍是满足 (5.11) 式的。

当 $\bar{u}$ 、 $\bar{S}$ 完全确定后, 半无矩状态的解就完全确定了。

六、算 例

设有半径为 1 m, 长为 10 m, 厚为 2 cm 的半圆形水槽, 盛有比重为 γ 的液体, 两直边自由, 两端固定在薄板墙上 (如图 4)。

取 $\lambda = R$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = R\gamma \cos \eta$, $r = 1$

$$Z_{(0)} = R^3 \gamma \cos \eta = k \cos \eta \quad (6.1)$$

边界条件:

$$\xi = \pm \xi_0 \quad v = 0, w = 0, T_1 = 0, M_1 = 0 \quad (6.2)$$

$$\eta = \pm \pi/2 \quad T_2 = 0, S = 0,$$

$$M_2 = 0, \tilde{N}_2 = 0 \quad (6.3)$$

根据 [1] 中的讨论知, 目前情况下半无矩状态要独立

满足两端面 $v = 0$, $T_1 = 0$ 的条件。因此, 半无矩状态应满足的边界条件为:

$$\xi = \pm \xi_0 \quad v_{(0)} = 0, T_{1(0)} = 0 \quad (6.4)$$

$$\eta = \pm \pi/2 \quad T_{2(0)} = 0, S_{(0)} = 0, M_{2(0)} = 0, N_{2(0)} = 0 \quad (6.5)$$

此时 (4.13) 式为:

$$\frac{\partial^4 v_{(0)}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial_2 \partial v_{(0)}}{3(1-\nu^2)} + k \sin \eta = 0, \quad \partial = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (6.6)$$

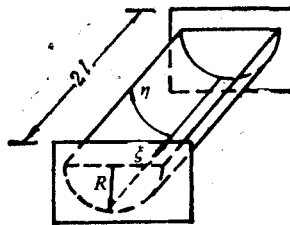


图 4

取 $V = -k \sin \eta (\xi^4 - 6\xi^2\xi_0^2 + 5\xi_0^4)/24$, 它满足 (6.6) 式及 (6.4) 式. v_h 此时应满足齐次方程

$$\frac{\partial^4 v_h}{\partial \xi^4} + \frac{Q Q v_h}{3(1-\nu^2)} = 0 \quad (6.7)$$

由 $\xi = \pm \xi_0$ 处 $v_{(0)} = 0$, $\frac{\partial^2 v_{(0)}}{\partial \xi^2} = 0$ 条件定出的特征函数及特征值为:

$$v_n = \cos \frac{2n+1}{2\xi_0} \pi \xi \quad \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2\xi_0} \pi \right)^4 \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.8)$$

(5.7) 式的齐次解 b_{nj} 为 (参见 [3] 第十二章):

$$\left. \begin{aligned} b_{n1} &= \operatorname{ch} p_n \eta \sin q_n \eta & b_{n2} &= \operatorname{ch} p_n \eta \cos q_n \eta \\ b_{n3} &= \operatorname{sh} p_n \eta \cos q_n \eta & b_{n4} &= \operatorname{sh} p_n \eta \sin q_n \eta \\ b_{n5} &= \operatorname{ch} \bar{p}_n \eta \sin \bar{q}_n \eta & b_{n6} &= \operatorname{ch} \bar{p}_n \eta \cos \bar{q}_n \eta \\ b_{n7} &= \operatorname{sh} \bar{p}_n \eta \cos \bar{q}_n \eta & b_{n8} &= \operatorname{sh} \bar{p}_n \eta \sin \bar{q}_n \eta \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

其中:

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} [(A_n - 1) + \sqrt{(A_n - 1)^2 + B_n^2}]^{1/2}, \\ q_n &= \frac{1}{2} [-(A_n - 1) + \sqrt{(A_n - 1)^2 + B_n^2}]^{1/2}, \\ \bar{p}_n &= \frac{1}{2} [-(A_n + 1) + \sqrt{(A_n + 1)^2 + B_n^2}]^{1/2}, \\ \bar{q}_n &= \frac{1}{2} [(A_n + 1) + \sqrt{(A_n + 1)^2 + B_n^2}]^{1/2}, \\ A_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{16\mu_n + 1}}, \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{16\mu_n + 1}}, \\ \mu_n &= 3(1 - \nu^2) \left[\frac{2n+1}{2\xi_0} \pi \right]^4 \end{aligned}$$

根据对称性, $v_{(0)}$ 仅取关于 η 的反对称函数; 为求解方便, 设 $v_{(0)}$ 为:

$$v_{(0)} = V + \frac{12(1-\nu^2)k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\sum_{j=1,3,\dots}^7 c_{nj} b_{nj} \right) \cos \frac{2n+1}{2\xi_0} \pi \xi \quad (6.10)$$

利用直边边界条件可得 c_{nj} 满足的线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1,3,\dots}^7 Q_2(b_{nj})|_{\eta=\pi/2} c_{nj} &= 0 \\ \sum_{j=1,3,\dots}^7 \frac{\partial}{\partial \eta} Q_2(b_{nj})|_{\eta=\pi/2} c_{nj} &= 0 \\ \sum_{j=1,3,\dots}^7 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} Q_2(b_{nj})|_{\eta=\pi/2} c_{nj} &= 0 \\ \sum_{j=1,3,\dots}^7 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} Q_2(b_{nj})|_{\eta=\pi/2} c_{nj} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.11)$$

解 (6.11) 式可定出全部待定常数 c_{nj} .

$u_{(0)}$ 、 $S_{(0)}$ 可求得为:

$$u_{(0)} = k \cos \eta (3 \xi_0^2 \xi - \xi^3) / 6 + \frac{32 k \xi_0^3}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^4} Q_2 Q \left(\sum_{j=1,3,\dots}^7 c_{nj} b_{nj} \right) \sin \frac{2n+1}{2\xi_0} \pi \xi \quad (6.12)$$

$$S_{(0)} = k \xi \sin \eta - \frac{8 k \xi_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} Q_3 Q \left(\sum_{j=1,3,\dots}^7 c_{nj} b_{nj} \right) \sin \frac{2n+1}{2\xi_0} \pi \xi \quad (6.13)$$

至此半无矩状态求解完毕。在本问题中, 两端的曲边边界条件 $w = 0$, $M_1 = 0$ 半无矩状态也能满足, 不必再引入简单边界效应状态。

本例使用中长壳理论的计算结果及其与材料力学结果的比较见如下各图。

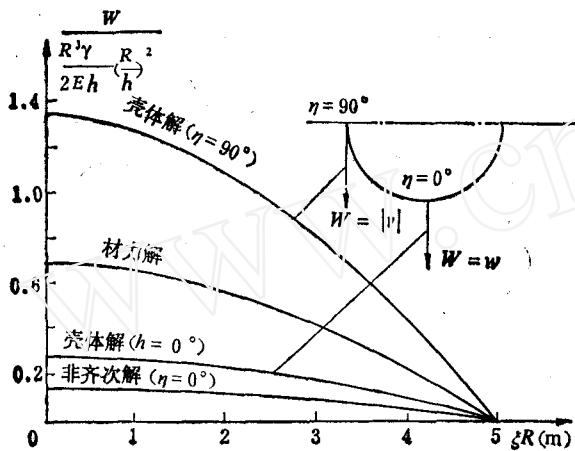


图 5 纵向挠度分布图

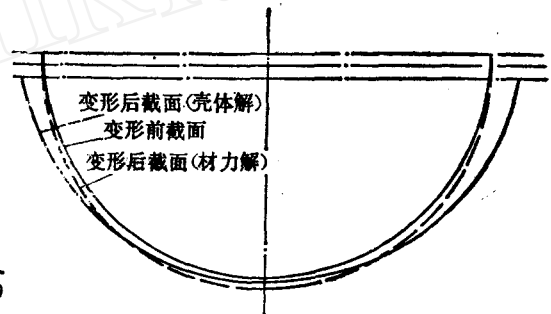


图 6 $\xi = 0$ 截面变形示意图

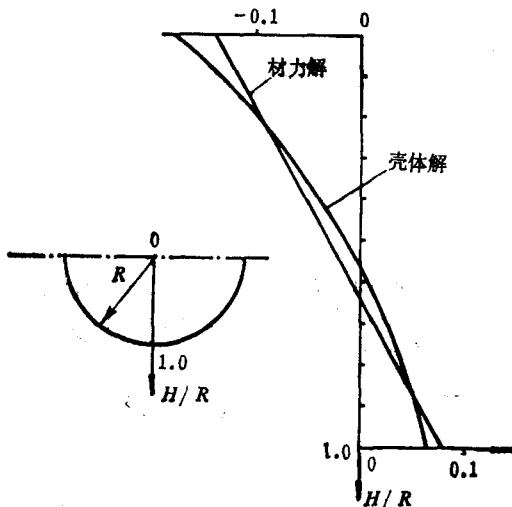


图 7 $\xi = \xi_0$ 位移 u 沿高度分布图

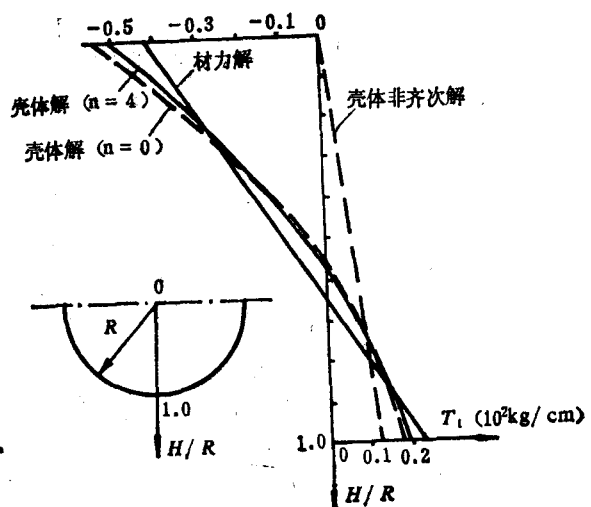


图 8 T_1 沿高度分布图

七、讨 论

1. 图 5 和图 6 表明, 半无矩状态和薄膜状态一样沿纵向和环向都是遍及全壳的. 由于现在纵向变化长度(即壳长)远大于横向变化长度 λ , 所以各物理量沿纵向变化缓慢, 弯曲效应可以忽略, 在纵向方程降为四阶, 相当于材料力学中梁的方程; 而沿环向变化较快, 弯曲和薄膜效应同量级, 方程仍为八阶, 这是半无矩状态与薄膜状态的基本区别. 若在两端边界附近再迭加上简单边界效应(其基本方程沿纵向为四阶, 环向为 0 阶), 就能满足薄壳的全部边界条件.

2. 图 6 和图 7 表明, 在中长柱壳中材料力学的平截面假设和截面形状不变的假设都不成立. 同一截面上不同点处的挠度相差很大(图 5), 应力在截面上也不是线性分布(图 8), 显然壳体理论给出了更为精确的结果. 但在小变形前提下, 截面变形对截面总体性质(惯性矩)的影响不大, 所以最大应力和平均挠度与材料力学解的差别小于 20%, 而且这种差别将随 l/λ 的增大而减小.

3. 图 8 表明, 解 (6.10) 中的非齐次解(它是个薄膜解)的比重很小, 所以中长柱壳不能用薄膜解加边界效应来处理. 同时齐次解的收敛性很好, 取一项 ($n=0$) 误差就只有 7%, 五项以后的曲线就几乎完全重合了.

参 考 文 献

- [1] 高玉臣, 黄克智, 具有任意闭口截面的中长柱壳的应力状态和解法分类, 力学学报, 8, 4 (1965), 12.
- [2] Гольденвейзер, А. Л., Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат (1953).
- [3] Власов, В. З., Общая Теория оболочек и её приложения в технике, Гостехиздат (1949).

THE ANALYSIS OF MID-LONG CYLINDRICAL SHELLS WITH ARBITRARY OPEN SECTIONS

Zhang Peixing Lu Mingwan Hwang Kehchih
(Tsinghua University)

Abstract

Based on the literature [1], this paper has discussed in detail the method of solution for mid-long cylindrical shells with arbitrary open sections. A practical example of a mid-long cylindrical shell with semi-circular section was given, and the result was compared with that of the model in the theory of strength of materials.