

受一般载荷的楔: 佯谬的解决

王 敏 中

(北京大学力学系)

提要 对于一个楔, 当其表面受有与 r^n ($n \geq 0$) 成正比的外载荷时, 按照经典弹性力学的解, 对于顶角 2α 为 π 或 2π 的楔, 其应力为无限大. 这个佯谬, 对于 $n=0$ 的情形, 已由 Dempsey 和 T.C.T. Ting 解决. 本文研究 $n > 0$ 的一般情形.

一、引 言

大家知道, 一个楔的侧面边界上受有与 r^n ($n \geq 0$) 成正比的外载荷时, 按照经典弹性理论^[1], 对于顶角 2α 为 π 或 2π 的楔, 应力在整个楔上为无穷大.

对于楔端受有集中力矩时, 也发生类似的佯谬. 此时, 对于顶角 $2\alpha = 2\alpha^*$ ($\tan 2\alpha^* = 2\alpha^*$) 的楔, 古典^[1,2]的应力解也变为无限大. 这个佯谬已由 Sternberg 和 Koiter^[3] 解决.

对于楔的表面受有均匀外载的佯谬 (相当于 r^n 中, $n=0$ 的情形), Dempsey^[4] 构造了在 $2\alpha = 2\alpha^*, \pi, 2\pi$ 时应力均为有限的解. 但是他的解, 当 2α 趋近于 $2\alpha^*, \pi, 2\pi$ 时, 应力仍无界.

最近 T. C. T. Ting^[5] 利用齐次解叠加的方法, 克服了 Dempsey 的缺点, 从而构造了一个当 2α 趋近于 $2\alpha^*, \pi, 2\pi$ 时, 都是有界的解.

本文处理楔表面受有非均匀载荷的情形, 即 $n > 0$ 的情形, 构造了一个当楔角 2α 趋近于 π 和 2π 都是有界的解. T. C. T. Ting 利用了一个齐次解, 本文则利用了两个齐次解, 以达到我们的目的. 本文所得的公式, 将包括 $n=0$ 作为一种特殊情形.

二、对 称 载 荷

在极坐标系 (r, θ) 中, 设有顶角为 2α 的楔

$$0 \leq r < +\infty, -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad (1)$$

记 u_r, u_θ 和 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ 分别为位移分量和应力分量. 在 $\theta = \pm\alpha$ 上受有与矢径 r 的 n 次方成正比的对称载荷, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \alpha) &= \sigma_{\theta\theta}(r, -\alpha) = p_n r^n \\ \sigma_{r\theta}(r, \alpha) &= -\sigma_{r\theta}(r, -\alpha) = q_n r^n \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

该问题的解可设为

本文于1984年11月24日收到.

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)} [A \cos(\lambda+2)\theta + B(\lambda+2) \cos \lambda\theta] \\ 2\mu u_r &= \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1} [-A \cos(\lambda+2)\theta - B(\lambda+2-\gamma) \cos \lambda\theta] \\ 2\mu u_\theta &= \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1} [A \sin(\lambda+2)\theta + B(\lambda+\gamma) \sin \lambda\theta] \\ \sigma_{rr} &= r^\lambda [-A \cos(\lambda+2)\theta - B(\lambda-2) \cos \lambda\theta] \\ \sigma_{\theta\theta} &= r^\lambda [A \cos(\lambda+2)\theta + B(\lambda+2) \cos \lambda\theta] \\ \sigma_{r\theta} &= r^\lambda [A \sin(\lambda+2)\theta + B\lambda \sin \lambda\theta] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 ϕ 为 Airy 应力函数, λ 、 A 和 B 为待定常数, ν 为 Poisson 比, μ 为剪切模量, 而 $\gamma = 4(1-\nu)$ 或 $4/(1+\nu)$ 分别对应于平面应变状态和平面应力状态。

1. 特解

在式(3)中, 设 $\lambda = n$, 并代入(2)中, 可求出常数 A 和 B , 故有特解

$$\phi = \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)D(n)} \{ p_n [-n \sin n\alpha \cos(n+2)\theta + (n+2) \sin(n+2)\alpha \cos n\theta] + q_n [(n+2) \cos n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \} \quad (4)$$

其中

$$D(n) = \sin 2(n+1)\alpha + (n+1) \sin 2\alpha, \quad (5)$$

从 Airy 应力函数(4), 可导出相应的位移分量和应力分量。

显然, 当 n 为整数, 而 $2\alpha = \pi$ 时, $D(n) = 0$ 。另外, 当 n 为整数或半整数, 而 $2\alpha = 2\pi$ 时, $D(n)$ 也为零。对于这两种情形, 只有当 p_n 和 q_n 为零时, 才能得到有界解。这是一个佯谬, 因为对楔而言, $2\alpha = \pi$ 或 2π 与一般的 α 并无本质的差别, 但解(4)却有巨大的差异。为了解决这一问题, 需作进一步的研究。

2. 齐次解

将解(3)代入齐次边条件的(2)式, 即 $\theta = \pm\alpha$ 时, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$, 于是

$$\left. \begin{aligned} A \cos(\lambda+2)\theta + B(\lambda+2) \cos \lambda\theta &= 0 \\ A \sin(\lambda+2)\theta + B\lambda \sin \lambda\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

方程(6)有非零解 A 、 B 的条件是

$$D(\lambda) \equiv \sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1) \sin 2\alpha = 0 \quad (7)$$

当 λ 满足(7)时, 我们选择 A 和 B 为

$$\left. \begin{aligned} A &= -K(\lambda+2) \cos \lambda\alpha + L\lambda \sin \lambda\alpha \\ B &= K \cos(\lambda+2)\alpha - L \sin(\lambda+2)\alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 K 、 L 是任意常数, 于是齐次解的 Airy 应力函数为

$$\phi = \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \{ -L[-\lambda \sin \lambda\alpha \cos(\lambda+2)\theta + (\lambda+2) \sin(\lambda+2)\alpha \cos \lambda\theta] - K[(\lambda+2) \cos \lambda\alpha \cos(\lambda+2)\theta - (\lambda+2) \cos(\lambda+2)\alpha \cos \lambda\theta] \} \quad (9)$$

解(9)对于包括 $2\alpha = \pi$, 2π 在内的任意 α 都是齐次问题的解, 只要 λ 满足方程(7)。

对于方程(7)已有充分的讨论^[5,6],结论是:当 $2\alpha = \pi$ 时,方程(7)对 λ 仅有整数解;而当 $2\alpha = 2\pi$ 时,方程(7)对 λ 仅有整数和半整数解。

3. 修正的特解

我们知道,齐次方程的任一解叠加到非齐次方程的特解上去,可得非齐次方程的一个新的特解。

考虑到(9)式和(4)式,为了得到 2α 趋近于 π 或 2π 时的有界解,在(9)式中令

$$L = \frac{p_n}{D(n)}, \quad K = \frac{q_n}{D(n)},$$

然后将(9)式加到(4)式上去,可得到非齐次方程的一个新的特解,其 Airy 应力函数为

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{p_n}{D(n)} \left\{ \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)} [\lambda \sin \lambda \alpha \cos(\lambda+2)\theta - (\lambda+2) \sin(\lambda+2)\alpha \cos \lambda \theta] \right. \\ & - \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)} [n \sin n \alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \sin(n+2)\alpha \cos n \theta] \Big\} \\ & + \frac{q_n}{D(n)} \left\{ \frac{r^{\lambda+2}}{\lambda+1} [-\cos \lambda \alpha \cos(\lambda+2)\theta + \cos(\lambda+2)\alpha \cos \lambda \theta] \right. \\ & \left. - \frac{r^{n+2}}{n+1} [-\cos n \alpha \cos(n+2)\theta + \cos(n+2)\alpha \cos n \theta] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 λ 满足方程(7)。当 $2\alpha \rightarrow \pi, 2\pi$ 时(这时由于方程(7),取定 $\lambda \rightarrow n$), (10)式成为 $\frac{0}{0}$ 的不定型,我们就把这个不定型的极限值作为 $2\alpha = \pi, 2\pi$,而 $\lambda = n$ 时的解。为了求出这个极限值,我们需先求出另一个极限值。由(7)式有

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = - \frac{2(\lambda+1)[\cos 2(\lambda+1)\alpha + \cos 2\alpha]}{2\alpha \cos 2(\lambda+1)\alpha + \sin 2\alpha}, \quad (11)$$

从(11)式,有

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi}(n+1), & \text{当 } 2\alpha = \pi, \lambda = \text{偶数 } n \\ 0, & \text{当 } 2\alpha = \pi, \lambda = \text{奇数 } n \\ -\frac{2}{\pi}(n+1), & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, \lambda = \text{整数 } n \\ 0, & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, \lambda = \text{半整数 } n \end{cases} \quad (12)$$

从(5)式,有

$$\frac{d}{d\alpha} D(n) = 2(n+1)[\cos 2(n+1)\alpha + \cos 2\alpha], \quad (13)$$

从(13)式,有

$$\frac{d}{d\alpha} D(n) = \begin{cases} -4(n+1), & \text{当 } 2\alpha = \pi, \text{偶数 } n \\ 0, & \text{当 } 2\alpha = \pi, \text{奇数 } n \\ 4(n+1), & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, \text{整数 } n \\ 0, & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, \text{半整数 } n \end{cases} \quad (14)$$

从(11)、(12)和(13)、(14),按 L' Hospital 法则,有

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ (\lambda \rightarrow \text{奇数 } n)}} \frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\frac{d}{d\alpha} D(n)} &= -\frac{1}{\pi} \lim \frac{\cos 2(\lambda+1)\alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2(n+1)\alpha + \cos 2\alpha} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \lim \frac{\cos(\lambda+2)\alpha}{\cos(n+2)\alpha} \lim \frac{\cos \lambda\alpha}{\cos n\alpha} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \lim \frac{\sin(\lambda+2)\alpha \left[\alpha \frac{d\lambda}{d\alpha} + \lambda + 2 \right]}{(n+2) \sin(n+2)\alpha} \\
 &\quad \times \lim \frac{\sin \lambda\alpha \left[\alpha \frac{d\lambda}{d\alpha} + \lambda \right]}{n \sin n\alpha} = -\frac{1}{\pi}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

同理,

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \pi \\ (\lambda \rightarrow \text{半整数 } n)}} \frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\frac{d}{d\alpha} D(n)} = \frac{1}{2\pi}, \quad (16)$$

综合 (12), (14), (15) 和 (16), 可得

$$\frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\frac{d}{d\alpha} D(n)} \rightarrow \eta \equiv \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow \pi, \lambda \rightarrow \text{偶数 } n \\ -\frac{1}{\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow \pi, \lambda \rightarrow \text{奇数 } n \\ -\frac{1}{2\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow 2\pi, \lambda \rightarrow \text{整数 } n \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow 2\pi, \lambda \rightarrow \text{半整数 } n \end{cases} \quad (17)$$

今在 (10) 式中取极限, 按 L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned}
 \phi &= \eta p_n \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \left\{ \ln r [n \sin n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \sin(n+2)\alpha \cos n\theta] \right. \\
 &\quad + [\sin n\alpha \cos(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \cos n\theta] \\
 &\quad + \alpha [n \cos n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \\
 &\quad \left. + \theta [-n \sin n\alpha \sin(n+2)\theta + (n+2) \sin(n+2)\alpha \sin n\theta] \right\} \\
 &\quad + \eta q_n \frac{r^{n+2}}{n+1} \left\{ \ln r [-\cos n\alpha \cos(n+2)\theta + \cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \right. \\
 &\quad + \alpha [\sin n\alpha \cos(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \cos n\theta] \\
 &\quad \left. + \theta [\cos n\alpha \sin(n+2)\theta - \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中 $2\alpha = \pi$ 或 2π . 从 (10) 式得到 (18) 式时, 我们略去了下述两项

$$-\eta \left\{ \frac{(2n+3)r^{n+2}}{(n+2)^2(n+1)^2} p_n [n \sin n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \sin(n+2)\alpha \cos n\theta] \right.$$

$$+ \frac{r^{n+2}}{(n+1)^2} q_n [-\cos n\alpha \cos(n+2)\theta + \cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \} \quad (19)$$

(其中 $2\alpha = \pi$ 或 2π), 这是因为, 这两项都分别是双调和函数, 而且在楔的两边仅造成零应力。不难看出, 当 $2\alpha = 2\pi$ 时, 此时的楔相当于全平面上有一条裂缝, 而 (19) 式正是 Williams^[7] 解的对称部分。

三、反对称情形

在 $\theta = \pm\alpha$ 上受有与矢径 r 的 n 次方成正比的反对称载荷, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \alpha) &= -\sigma_{\theta\theta}(r, -\alpha) = p_n r^n \\ \sigma_{r\theta}(r, \alpha) &= \sigma_{r\theta}(r, -\alpha) = q_n r^n \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

该问题的解为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)} [-A \sin(\lambda+2)\theta - B(\lambda+2) \sin \lambda\theta], \\ 2\mu u_r &= \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1} [A \sin(\lambda+2)\theta + B(\lambda+2) \sin \lambda\theta], \\ 2\mu u_\theta &= \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1} [A \cos(\lambda+2)\theta + B(\lambda+2) \cos \lambda\theta], \\ \sigma_{rr} &= r^\lambda [A \sin(\lambda+2)\theta + B(\lambda-2) \sin \lambda\theta], \\ \sigma_{\theta\theta} &= r^\lambda [-A \sin(\lambda+2)\theta - B(\lambda+2) \sin \lambda\theta], \\ \sigma_{r\theta} &= r^\lambda [A \cos(\lambda+2)\theta + B\lambda \cos \lambda\theta] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 ϕ 是 Airy 应力函数, λ 和 A 、 B 是待定常数。

1. 特解

设 $\lambda = n$, 将 (21) 代入 (20) 式, 可求出待定常数 A 和 B , 于是 (21) 式的 Airy 应力函数成为,

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)D(n)} \{ p_n [-n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta \\ &\quad + (n+2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] + q_n [-(n+2) \sin n\alpha \sin(n \\ &\quad + 2)\theta + (n+2) \sin(n+2)\alpha \sin n\theta] \} \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$D(n) = \sin 2(n+1)\alpha - (n+1) \sin 2\alpha$$

对于 $n=0$ 的情形, Dempsey 和 T. C. T. Ting 已研究过, 本文以下暂假定 $n > 0$ 。

当 n 为整数, 而 $2\alpha = \pi$ 时, $D(n) = 0$ 。另外, 当 n 为整数或半整数, 而 $2\alpha = 2\pi$ 时, $D(n)$ 也为零。对于这两种情形, 除非 p_n 或 q_n 为零, 否则解 (22) 是不适用的, 因为它在整个楔中造成无限大应力。

2. 齐次解

将解 (21) 代入齐次边条件的 (20) 式, 即 $\theta = \pm\alpha$ 时, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$ 的情形, 此时有

$$\left. \begin{aligned} -A \sin(\lambda+2)\alpha - B(\lambda+2) \sin \lambda\alpha &= 0 \\ A \cos(\lambda+2)\alpha + B\lambda \cos \lambda\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

齐次方程 (23) 有非零解 A 、 B 的条件是, 常数 λ 适合方程

$$D(\lambda) \equiv \sin 2(\lambda + 1)\alpha - (\lambda + 1) \sin 2\alpha = 0 \quad (24)$$

当 λ 满足 (24) 时, 我们可选择常数 A 和 B 为

$$\begin{cases} A = -K(\lambda + 2) \sin \lambda\alpha - L\lambda \cos \lambda\alpha \\ B = K \sin(\lambda + 2)\alpha + L \cos(\lambda + 2)\alpha \end{cases} \quad (25)$$

其中 K 、 L 为任意常数, 于是齐次解的 Airy 应力函数为

$$\begin{aligned} \phi = \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \{ & -L[-\lambda \cos \lambda\alpha \sin(\lambda+2)\theta \\ & + (\lambda+2) \cos(\lambda+2)\alpha \sin \lambda\theta] - K[-(\lambda+2) \sin \lambda\alpha \sin(\lambda+2)\theta \\ & + (\lambda+2) \sin(\lambda+2)\alpha \sin \lambda\theta] \} \end{aligned} \quad (26)$$

其中 λ 满足方程 (24)。解 (26) 对于包括 $2\alpha = \pi, 2\pi$ 在内的任意 α , 都是齐次问题的解。按^[5,6]的讨论: 当 $2\alpha = \pi$ 时, 方程 (24) 对 λ 有整数解 n ; 而当 $2\alpha \neq 2\pi$ 时, 方程 (24) 对 λ 有整数解和半整数解。

3. 修正的特解

考虑到 (26) 式和 (22) 式, 在 (26) 式中, 令

$$K = \frac{q_n}{D(n)}, \quad L = \frac{p_n}{D(n)}$$

然后将 (26) 式加到 (22) 式上去, 得到一个新的特解, 它的应力函数为

$$\begin{aligned} \phi = \frac{p_n}{D(n)} \{ & \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)} [\lambda \cos \lambda\alpha \sin(\lambda+2)\theta - (\lambda+2) \cos(\lambda+2)\alpha \sin \lambda\theta] \\ & - \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)} [n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \} \\ & + \frac{q_n}{D(n)} \{ \frac{r^{\lambda+2}}{\lambda+1} [\sin \lambda\alpha \sin(\lambda+2)\theta - \sin(\lambda+2)\alpha \sin \lambda\theta] \\ & - \frac{r^{n+1}}{n+1} [\sin n\alpha \sin(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \sin n\theta] \} \end{aligned} \quad (27)$$

其中 λ 满足方程 (24)。当 2α 趋于 π 或 2π 时 (这时 λ 趋于 n), (27) 式成为 $\frac{0}{0}$ 的不定型,

为了求它的极限值, 我们需先求出下面的极限值。从方程 (24) 求出

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = - \frac{2(\lambda+1)[\cos 2(\lambda+1)\alpha - \cos 2\alpha]}{2\alpha \cos 2(\lambda+1)\alpha - \sin 2\alpha} \quad (28)$$

从 (28) 有

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{当 } 2\alpha = \pi, \lambda \text{ 为偶数 } n \\ -\frac{4(n+1)}{\pi}, & \text{当 } 2\alpha = \pi, \lambda \text{ 为奇数 } n \\ 0, & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, \lambda \text{ 为整数 } n \\ -\frac{2(n+1)}{\pi}, & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, \lambda \text{ 为半整数 } n \end{cases} \quad (29)$$

从 (23) 可求出

$$\frac{d}{d\alpha} D(n) = 2(n+1)[\cos 2(n+1)\alpha - \cos 2\alpha] \quad (30)$$

从 (30) 可算出

$$\frac{d}{d\alpha} D(n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 2\alpha = \pi, n \text{ 为偶数} \\ 4(n+1), & \text{当 } 2\alpha = \pi, n \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, n \text{ 为整数} \\ -4(n+1), & \text{当 } 2\alpha = 2\pi, n \text{ 为半整数} \end{cases} \quad (31)$$

利用类似求 (15) 式的方法, 当 $n > 0$ 时, 可求出

$$\lim_{\substack{2\alpha \rightarrow \pi \\ (\lambda \rightarrow \text{奇数 } n)}} \frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\frac{d}{d\alpha} D(n)} = \frac{1}{\pi} \quad (32)$$

$$\lim_{\substack{2\alpha \rightarrow 2\pi \\ (\lambda \rightarrow \text{整数 } n)}} \frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\frac{d}{d\alpha} D(n)} = -\frac{1}{2\pi} \quad (33)$$

综合 (29) (31) (32) (33), 可得

$$\frac{\frac{d\lambda}{d\alpha}}{\frac{d}{d\alpha} D(n)} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow \pi, \lambda \rightarrow \text{偶数 } n \\ -\frac{1}{\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow \pi, \lambda \rightarrow \text{奇数 } n \\ -\frac{1}{2\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow 2\pi, \lambda \rightarrow \text{整数 } n \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{当 } 2\alpha \rightarrow 2\pi, \lambda \rightarrow \text{半整数 } n \end{cases} \quad (34)$$

可以看出 (34) 式右端的极限值与 (17) 式右端的极限值是相同的, 故其值仍以记号 η 表示之。不过应指出, (17) 式和 (34) 式量的含义并不一致, 其中 λ 和 α 分别满足不同的方程 (7) 和 (24), 而 $D(n)$ 分别由 (5) 式和 (23) 式定义。

有了 (34) 以后, 在 (27) 中令 $2\alpha \rightarrow \pi$ 或 2π , 按 L'Hospital 法则有

$$\begin{aligned} \phi = \eta p_n \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \{ & \ln r [n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \\ & + [\cos n\alpha \sin(n+2)\theta - \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \\ & + \alpha [-n \sin n\alpha \sin(n+2)\theta + (n+2) \sin(n+2)\alpha \sin n\theta] \\ & + \theta [n \cos n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \} \\ & + \eta q_n \frac{r^{n+2}}{n+1} \{ \ln r [\sin n\alpha \sin(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \sin n\theta] \\ & + \alpha [\cos n\alpha \sin(n+2)\theta - \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \\ & + \theta [\sin n\alpha \cos(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \cos n\theta] \} \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $2\alpha = \pi$ 或 2π 。从 (27) 式得到 (35) 式的过程中, 我们略去了下述两项

$$-\eta \left\{ p_n \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2} r^{n+2} [n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \right. \\ \left. + q_n \frac{r^{n+2}}{(n+1)^2} [\sin n\alpha \sin(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \sin n\theta] \right\} \quad (36)$$

这是因为(36)式的两项都是双调和函数,且在楔的表面上仅产生零应力。

另外,当 $2\alpha = 2\pi$ 时,(36)式就是 Williams^[7]解的反对称部分。十分有趣的是, Airy 应力函数(35)在推导的过程中,预先假设 $n > 0$,但对 $n = 0$,也将给出正确的答案。事实上,设 $n = 0$,解(35)成为,

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \eta p_0 \frac{r^2}{2} (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha) + \eta q_0 r^2 (\alpha \sin 2\theta - \theta \sin 2\alpha) \\ \sigma_{rr} &= -\eta p_0 \left(\frac{3}{2} \sin 2\theta + \theta \cos 2\alpha \right) - \eta q_0 \left(\frac{3}{2} \sin 2\theta + \theta \sin 2\alpha \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \eta p_0 (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha) + \eta q_0 (\alpha \sin 2\alpha - \theta \sin 2\alpha) \\ \sigma_{r\theta} &= -\eta p_0 (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) - \eta q_0 (2\alpha \cos 2\theta - \sin 2\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

其中 η 仍采用(34)式所定义的值。从(37)式不难算出,当 $2\alpha = \pi$ 或 2π 时,有

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\pm\alpha} = \pm p_0, \quad \sigma_{r\theta}|_{\theta=\pm\alpha} = q_0.$$

由于(35)式对 $n = 0$ 仍正确,故以下应用(35)式时,可认为 $n \geq 0$ 。

四、半平面问题

设在弹性半平面的边界上作用有外力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= A_n r^n, \quad \sigma_{r\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = B_n r^n \\ \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= A'_n r^n, \quad \sigma_{r\theta}|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = B'_n r^n \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

今将(38)式写成对称形式与反对称形式的和,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{A_n + A'_n}{2} r^n + \frac{A_n - A'_n}{2} r^n, \quad \sigma_{r\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{B_n - B'_n}{2} r^n + \frac{B_n + B'_n}{2} r^n \\ \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} &= \frac{A_n + A'_n}{2} r^n - \frac{A_n - A'_n}{2} r^n, \quad \sigma_{r\theta}|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{B_n - B'_n}{2} r^n + \frac{B_n + B'_n}{2} r^n \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

利用公式(18),(35)和(39),当 n 为奇数时有,

$$\begin{aligned} \phi &= (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)\pi} \left\{ \frac{A_n + A'_n}{2} \ln r [n \cos(n+2)\theta + (n+2) \cos n\theta] \right. \\ &\quad - \left(\frac{A_n + A'_n}{2} \theta + \frac{A_n - A'_n}{2} \frac{\pi}{2} \right) [n \sin(n+2)\theta + (n+2) \sin n\theta] \\ &\quad + \frac{A_n + A'_n}{2} [\cos(n+2)\theta + \cos n\theta] \\ &\quad + (n+2) \frac{B_n + B'_n}{2} \ln r [\sin(n+2)\theta + \sin n\theta] \\ &\quad \left. + (n+2) \left(\frac{B_n + B'_n}{2} \theta + \frac{B_n - B'_n}{2} \frac{\pi}{2} \right) [\cos(n+2)\theta + \cos n\theta] \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

当 n 为偶数时

$$\begin{aligned} \phi = & (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+1)\pi} \left\{ \frac{A_n - A_n''}{2} \ln r [n \sin(n+2)\theta + (n+2) \sin n\theta] \right. \\ & + \left(\frac{A_n - A_n'}{2} \theta + \frac{A_n + A_n'}{2} \frac{\pi}{2} \right) [n \cos(n+2)\theta + (n+2) \cos n\theta] \\ & + \frac{A_n - A_n'}{2} [\sin(n+2)\theta + \sin n\theta] \\ & - (n+2) \frac{B_n - B_n'}{2} \ln r [\cos(n+2)\theta + \cos n\theta] \\ & \left. + (n+2) \left(\frac{B_n - B_n'}{2} \theta + \frac{B_n + B_n'}{2} \frac{\pi}{2} \right) [\sin(n+2)\theta + \sin n\theta] \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

下面举几个例子,作为公式(40)和(41)的应用。例1,设在 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 上有线性

压应力分布,(如图1),此时

$$A_1 = B_1 = 0, A_1' = -\frac{p}{a}, B_1' = 0$$

从(40)式可求出

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{pr^3}{12\pi a} \left\{ \ln r (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) \right. \\ & + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (\sin 3\theta + 3 \sin \theta) \\ & \left. + \cos 3\theta + \cos \theta \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

或者换为直角坐标

$$\phi = \frac{p}{2\pi a} \left[\frac{1}{3} y^3 \ln(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{3} x^2 y \right] \quad (43)$$

从式(42)到式(43),我们略去了含 y^3 的项,因为它是双调和函数,且在 $y=0$ 时仅产生零应力。公式(43)与[1]一致。

类似地还可求出[1]中半平面上分布均匀的压应力、均匀剪应力和线性剪应力的解。今考虑抛物线分布外力的情形。

例2 设在 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 上有按抛物线分布的压力(如图2),此时

$$A_2 = B_2 = 0, A_2' = -\frac{p}{a^2}, B_2' = 0$$

从(41)式求出

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{pr^4}{24\pi a^2} \left\{ \ln r (2 \sin 4\theta + 4 \sin 2\theta) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (2 \cos 4\theta + 4 \cos 2\theta) + \sin 4\theta + \sin 2\theta \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

或写成直角坐标

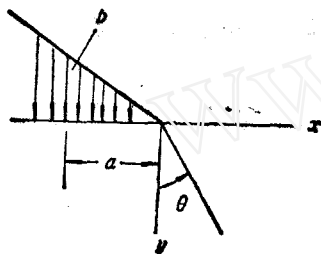


图 1

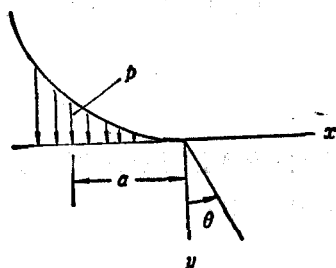


图 2

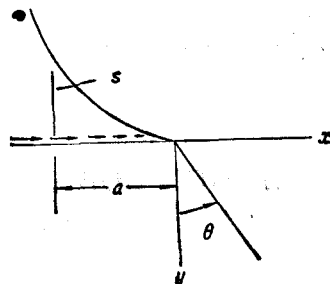


图 3

$$\phi = -\frac{p}{12\pi a^2} \left[4xy^3 \ln(x^2 + y^2) + (x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 3xy^3 - x^3y \right] \quad (45)$$

例3 设在 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 上有按抛物线分布的剪力(见图2)。此时有

$$A_2 = B_2 = 0, A'_2 = 0, B'_2 = \frac{S}{a^2}$$

从(41)式可求出

$$\phi = \frac{-Sr^4}{6\pi a^2} \left[\ln r (\cos 4\theta + \cos 2\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (\sin 4\theta + \sin 2\theta) \right] \quad (46)$$

或用直角坐标

$$\phi = -\frac{S}{6\pi a^2} \left[(y^4 - 3x^2y^2) \ln(x^2 + y^2) + 2(3xy^3 - x^3y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] \quad (47)$$

致谢 丁启财(T. C. T. Ting)教授慷慨地向作者提供他未出版的手稿^[5,8,9,10],并阅读了本文,提出了宝贵意见,本文作者对此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, Hill, 1970, 140, 112, 147.
- [2] Carothers, S. D., Plane Strain in a Wedge, Proceedings, Royal Society, Edinburgh, 23 (1912), 292.
- [3] Sternberg, E. and Koiter, W. T., The Wedge Under a Concentrated Couple: A Paradox in the Two-dimensional Theory of Elasticity, J. Appl. Mech., 25 (1958), 575—581. (see also the discussion in 26(1959) 472—474).
- [4] Dempsey, J. P., The Wedge Subjected to Traction: A Paradox Resolved, J. Elasticity, 11(1981), 1—10.
- [5] Ting, T. C. T., The Wedge Subjected to Traction: A Paradox Re-examined, J. Elasticity, 14 (1984), 235—247.
- [6] Moffatt, H. K. and Duffy, B. R., Local Similarity Solutions and Their Limitations, J. Fluid Mech., 96(1980), 299—313.
- [7] Williams, M. L., On the Stress Distribution at the tip of a Stationary Crack, J. Appl. Mech., 24 (1957), 109—114.
- [8] Ting, T. C. T., A Paradox on the Elastic Wedge Subjected to a Concentrated Couple, ZAMM V. 65(1985), 188—190.
- [9] Ting, T. C. T., Elastic Wedge Subjected to Anti-Plane Shear Traction—A Paradox Explained,

- Q. J. Mech. Appl. Math. V. 38 (1985) 245—256.
- [10] Ting, T. C T., Asymptotic Solution near the Apex of an Elastic Wedge with Curved Boundaries, Q. Appl. Math. (待发表).

THE WEDGE SUBJECTED TO GENERAL TRACTIONS: A PARADOX RESOLVED

Wang Minzhong

(Department of Mechanics, Peking University)

Abstract

For a wedge subjected to tractions in proportion to r^n ($n \geq 0$), the stresses of the solution in classical theory of elasticity become infinite when the angle of the wedge is π or 2π . The paradox has been resolved by Denpney and T. C. T. Ting, When $n=0$. The purpose of this paper is to resolve the paradox, when $n > 0$.