

# Korteweg-De Vries-Burgers 方程 的一类解析解

忻孝康 黄光伟

(复旦大学应用力学系)

**摘要** 本文利用变数变换和解析积分的办法,找到了 Korteweg-de Vries-Burgers 方程的一类单调激波型的解析解。文中分别给出了隐式和显式形式的解。利用数值积分或 Jacobi 余弦椭圆函数的级数表达式,可以容易地数值计算该函数值。文中给出了不同的  $\nu$  和  $\delta$  值的解曲线的形状。

## 一、引言

如所周知,许多物理问题(如非线性浅水波、等离子体内的波动)可以用 KdV 方程来描述<sup>[1-4]</sup>。作为 KdV 方程的一类特解——孤立子和孤立波已为许多科学工作者所熟悉。在研究液体内含有气泡的流动<sup>[5]</sup>以及弹性管内流体流动等问题<sup>[6-8]</sup>时,人们把控制方程归结为如下的所谓 KdV-Burgers 方程<sup>[9]</sup>:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

这个方程相当于在 KdV 方程上再加上一项粘性耗散项 ( $\nu u_{xx}$ )。目前,对于 KdV 方程 ( $\nu = 0$ ) 和 Burgers 方程 ( $\delta = 0$ ) 的研究已比较深入,而对于 KdV-Burgers 方程的研究还刚刚开始。对方程(1)  $\nu \neq 0, \delta \neq 0$  的一般情况尚未见有人给出精确解。

这里我们将给出方程(1)的某一类解析解(运动激波型解)。这类解析解可以用 Jacobi 余弦椭圆函数来显式地表达。这对于深入研究 KdV-Burgers 方程解的性态将会大有帮助。另一方面,目前对方程(1)的数值研究逐渐增多<sup>[8]</sup>,因此解析解将给数值方法的优劣提供一个可靠的比较依据。对于小粘性系数情况,方程(1)存在另一类振动激波型的解<sup>[9]</sup>。对这类问题的精确解的寻求将是我们进一步深入研究的目標。

## 二、KdV-Burgers 方程解的定性特征

Jeffrey 和 Kakutani<sup>[10]</sup>曾详尽地分析过方程(1)的解的定性特征。他们引入自变量变换<sup>[9,10]</sup>:

$$\zeta = x - \lambda t, \quad t' = t \quad (2)$$

方程(1)可化为:

$$u_{t'} + (u - \lambda)u_{\zeta} - \nu u_{\zeta\zeta} + \delta u_{\zeta\zeta\zeta} = 0 \quad (3)$$

本文于 1985 年 1 月 23 日收到, 1985 年 9 月 21 日收到修改稿。

若我们限于寻求所谓行波解,即  $u = f(\zeta)$ , 则对(3)式关于  $\zeta$  积分一次后,可得如下的非线性常微分方程式:

$$\delta u_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2} u^2 - \lambda u - \nu u_{\zeta} + A = 0 \quad (4)$$

其中  $A$  为积分常数。方程(4)等价于如下一阶非线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\zeta} &= v \\ \frac{dv}{d\zeta} &= \frac{\nu}{\delta} v - \frac{1}{2\delta} (u - u_1)(u - u_2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中:

$$u_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2A} \quad (6)$$

按照常微分方程的定性理论<sup>[3]</sup>,可知方程组(5)有二个奇点  $(u_1, 0)$  和  $(u_2, 0)$ 。奇点  $(u_2, 0)$  总是鞍点;奇点  $(u_1, 0)$  按  $\nu$ ,  $\delta$  和  $\lambda$  的大小有三种可能:

- (A) 当  $\nu^2 \geq 4\delta \sqrt{\lambda^2 - 2A}$  时,  $(u_1, 0)$  是结点;
- (B) 当  $0 < \nu^2 < 4\delta \sqrt{\lambda^2 - 2A}$  时,  $(u_1, 0)$  是焦点;
- (C) 当  $\nu = 0$  时,  $(u_1, 0)$  是中心点。

这三类解大致如图 1 所示。

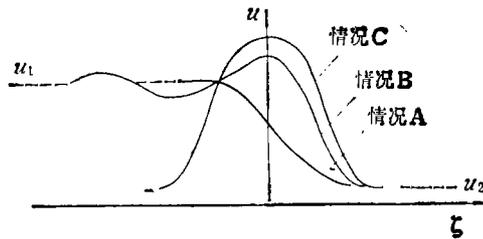


图 1 KdV-Burgers 方程的典型解曲线

(A) 类解是耗散占优的解,这是一种单调型的激波; (B) 类解是色散占优的解,这是一种所谓振动型激波; (C) 类解就是 KdV 方程的孤立波解。

在本文中,我们找到了(A)类型的解析解,即单调激波型的解。文中给出了隐式和显式的解形式;显式解可以用 Jacobi 椭圆函数来表达。

### 三、KdV-Burgers 方程的一类解析解

假设  $\delta \neq 0$ , 则(4)式可写成:

$$u_{\zeta\zeta} + au_{\zeta} + bu^2 + cu + E = 0 \quad (7)$$

其中:

$$a = -\frac{\nu}{\delta}; \quad b = \frac{1}{2\delta}; \quad c = -\frac{\lambda}{\delta}; \quad E = \frac{A}{\delta}$$

不失一般性,可以认为  $E = 0$ , 因为当  $E \neq 0$  时,可作一个简单的平移变换:  $u =$

$\tilde{u} + D (D = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2A})$ , 使  $\tilde{u}$  满足如下方程:

$$\tilde{u}_{\zeta\zeta} + a\tilde{u}_{\zeta} + b\tilde{u}^2 + (c + 2bD)\tilde{u} = 0$$

因此,以后我们只讨论  $E = 0$  (即  $A = 0$ ) 的情况.

先作如下的自变量变换:

$$\tau = e^{-\alpha t} \quad (8)$$

于是方程(7) ( $E = 0$ ) 可化成:

$$a^2 \tau^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + bu^2 + cu = 0 \quad (9)$$

再作如下的自变量和因变量变换:

$$u = \tau^{1/2(1-k)} \cdot \eta(\xi), \quad \xi = \tau^k \quad (10)$$

其中  $k$  为常数. 这样,方程(9)可以化为:

$$a^2 \left\{ \frac{1}{4} (k^2 - 1) \eta + k^2 \tau^{(3k-2)/2} \cdot \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right\} + b \tau^{(1-k)} \cdot \eta^2 + c u = 0 \quad (11)$$

从而,当

$$c = \frac{a^2}{4} (1 - k^2) \quad (12)$$

时,方程(11)可简化为:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -\frac{b}{a^2 k^2} \tau^{(1-5k)/2} \cdot \eta^2 \quad (13)$$

特别当  $k = \frac{1}{5}$  时,方程(13)可大大简化,并可解析地得到解. 这时方程(13)简化为:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -\frac{b}{a^2 k^2} \eta^2, \text{ 其通解为}^{[12]}$$

$$\xi = c_2 + \int^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{c_1 - \frac{2b}{3a^2 k^2} x^3}} \quad (14)$$

利用变换(8)和(10)式返回到原来变量,(14)式可写成:

$$e^{\frac{1}{5}\alpha t} \xi = \int^{\eta(\tau) \cdot e^{-\frac{2}{5}\alpha t}} \frac{dx}{\sqrt{c_1 - \frac{25}{3} \frac{\delta}{\nu^2} x^3}} + c_2 \quad (15)$$

这就是方程(7) ( $E = 0$ ) 在条件(12)下的通解形式. 只要直接对(15)式两边求导,可以容易地验证这一点.

现在来看条件(12). 如用参数  $\nu, \delta$  和  $\lambda$  来表示,这个条件相当于:

$$\lambda = -\frac{6}{25} \frac{\nu^2}{\delta} \quad (16)$$

这就表示波速依赖于  $\nu$  和  $\delta$ , 而且该行波是一个向左传播的波. 由(16)式知:

$$4 \cdot |\lambda| \cdot \delta / \nu^2 = 24/25 < 1,$$

故由第二节的定性讨论可知: 解析解(15)是(A)型的解, 解的曲线应有单调激波的形式.

#### 四、边界条件和精确解的显式形式

方程(7)的一类解析解(15)是  $u$  和  $\xi$  之间的一种隐函数形式的解, 使用起来很不方

便。为此,经过适当的变换,我们把解(15)变成显式的形式。为了完全确定解(15),需要给出二个边界条件以确定(15)式中的积分常数  $c_1$  和  $c_2$ 。由(6)式知,当  $A = 0$  时,

$$u_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2} = \begin{cases} 0 \\ 2\lambda = -\frac{12}{25} \frac{v^2}{\delta} \end{cases} \quad (17)$$

因此,如下的边界条件提法是合理的:

$$\text{当 } \zeta = \zeta_b \text{ 时, } u = u_1 \quad (18a)$$

$$\text{当 } \zeta = -\infty \text{ 时, } u = u_2 \quad (18b)$$

应用边界条件(18b),就可确定积分常数  $c_2$ 。从而解(15)可写成:

$$e^{\frac{1}{5}\frac{v}{\delta}\zeta} = \int_{-\infty}^{u(\zeta) e^{-\frac{2}{5}\frac{v}{\delta}\zeta}} \frac{dz}{\sqrt{c_1 - \frac{25}{3} \frac{\delta}{v^2} z^3}} \quad (19)$$

由于积分常数  $c_1$  位于(19)的被积函数内,处理不很方便,故可作一简单的变换,把  $c_1$  变换到积分上限中去,即:

$$e^{\frac{1}{5}\frac{v}{\delta}\zeta} = \frac{\sqrt{\frac{3c_1 v^2}{25\delta}}}{\sqrt{c_1}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{25\delta}{3c_1 v^2}} \cdot u(\zeta) e^{-\frac{2}{5}\frac{v}{\delta}\zeta}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \quad (20)$$

为简单起见,令:

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{25\delta}{3c_1 v^2}} \quad (21)$$

则(20)式可写为:

$$\sqrt{\frac{25\delta}{3v^2\beta}} e^{\frac{1}{5}\frac{v}{\delta}\zeta} = \int_{-\infty}^{\beta u(\zeta) e^{-\frac{2}{5}\frac{v}{\delta}\zeta}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \quad (22)$$

利用椭圆积分知识<sup>[13]</sup>知:

$$\int_{-\infty}^{\beta u(\zeta) e^{-\frac{2}{5}\frac{v}{\delta}\zeta}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{1}{3^{1/4}} F(\varphi \setminus 75^\circ) \quad (23)$$

这里  $F(\varphi \setminus \alpha)$  是第一类不完全椭圆积分。而  $\varphi$  和  $u(\zeta)$  的关系为:

$$\cos \varphi = \frac{1 - \sqrt{3 - \beta u(\zeta) e^{-\frac{2}{5}\frac{v}{\delta}\zeta}}}{1 + \sqrt{3 - \beta u(\zeta) e^{-\frac{2}{5}\frac{v}{\delta}\zeta}}} \quad (24)$$

若令

$$Z = 3^{1/4} \sqrt{\frac{25\delta}{3v^2\beta}} e^{\frac{1}{5}\frac{v}{\delta}\zeta} \quad (25)$$

则有:

$$Z = F(\varphi \setminus 75^\circ) \quad (26)$$

按照 Jacobi 余弦椭圆函数  $c_n(Z/m)$  的定义<sup>[14]</sup>知:

$$c_n(Z/m) = \cos \varphi \quad (27)$$

其中:

$$m = \sin^2(75^\circ) = 0.9330127 \quad (28)$$

于是,由(24)、(25)及(27)式可求得:

$$u(\zeta) = \frac{\nu^2}{25\delta} Z^2 \left( 3 + \sqrt{3} - \frac{6}{1 - c_n(Z/m)} \right) \quad (29)$$

这里  $Z$  由(25)式确定, 解(29)就是解(22)的显式形式. 同样地利用 Jacobi 椭圆函数的导数和性质, 可以直接验证(29)式是方程(4)( $A=0$ )的解. 这时一端的边界条件(18b)已被满足; 另一端边界条件(18a)可用来确定常数  $\beta$ . 由于目前  $u_1=0$ , 故由(22)式可知:

$$\sqrt{\frac{25\delta}{3\nu^2\beta}} e^{\frac{1}{2}\frac{\nu}{\delta}\zeta_b} = \int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-t^3}}$$

则<sup>[14]</sup>:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{25\delta}{3\nu^2} \left( \frac{e^{\frac{1}{2}\frac{\nu}{\delta}\zeta_b}}{\int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-t^3}}} \right)^2 = 75 \frac{\delta}{\nu^2} \left( \frac{e^{\frac{1}{2}\frac{\nu}{\delta}\zeta_b} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \right)^2 \\ &= 1.05961945 \frac{\delta}{\nu^2} e^{\frac{2}{3}\frac{\nu}{\delta}\zeta_b} \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $\Gamma(x)$  是通常的 Gamma 函数<sup>[13]</sup>.

如果我们考虑的是无穷区域上的解, 由于  $\zeta \rightarrow +\infty$  时,  $\beta \rightarrow +\infty$ , 因此, 如下形式的解是一个合理的解:

$$u(\zeta) = \begin{cases} u_1 & \text{当 } \zeta_b \leq \zeta < +\infty \\ \frac{\nu^2}{25\delta} Z^2 \left( 3 + \sqrt{3} - \frac{6}{1 - c_n(Z/m)} \right) & \text{当 } -\infty \leq \zeta < \zeta_b \end{cases} \quad (31)$$

这个解, 除了角点  $(\zeta_b, u_1)$  外, 处处满足方程(4). 由于积分常数  $A$  是任意的, 因此上述的任何一个解析解(22)或(29), 加上适当的常数  $D$  (见前面)仍可为方程(4) ( $A \neq 0$ ) 的解.

为了求出解曲线(29)或(31), 必须计算  $c_n(Z/m)$  的值. 利用 Jacobi 余弦椭圆函数  $c_n(Z/m)$  的如下级数计算是很方便的. 由[13]知:

$$c_n(Z/m) = \frac{2\pi}{m^{1/2} \cdot K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}} \cos(2n+1)v$$

其中:

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad v = \frac{\pi Z}{2K}$$

而  $K$  和  $K'$  分别是模数为  $m$  和  $1-m$  的第一类完全椭圆积分值, 其中  $m$  由(28)式确定. 一般只要取 20—30 项即可.

图 2 给出了  $\zeta_b=0, \delta=1$  和  $\nu=3, 5, 7$  时(注意: 这时每条曲线的  $\lambda$ ——即传播速度是不同的)的解曲线的形状. 可以看到这是一组“单调激波”型曲线, 解曲线在  $\zeta=0$  附近有一个很大的梯度(为了显示清楚起见, 图上我们把  $\zeta$  方向的坐标放大了).

最后, 有两点值得指出一下:

(1) 边界条件(18b)可以改为:

$$\text{当 } \zeta = \zeta_a \text{ 时, } u = u_2 \quad (\zeta_a < \zeta_b)$$

图 3 给出了  $\zeta_a = -1, \zeta_b = 0, \delta = 1$  和  $\nu = 5$  ( $\lambda = -6$ ) 情况下两种边界条件解曲线的形状. 由于“激波层”很薄, 故两条曲线几乎是重合的.

(2) 通过另外一种类似的变换,我们还找到了如下非线性方程:

$$\xi^{5/2} \cdot \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \eta^2 = 0 \quad (32)$$

的一个特解:

$$\eta(\xi) = \frac{3}{8} \sqrt{\xi} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{4} \ln \xi\right) \quad (33)$$

这可能有助于其它问题的解,而文献 [12] 并未指出过式(32)的可解性.

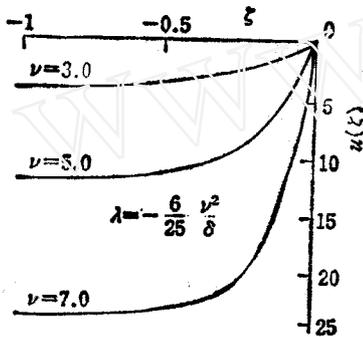


图2 对  $\zeta_b = 0, \delta = 1, \nu = 3, 5, 7$  时解曲线的形状

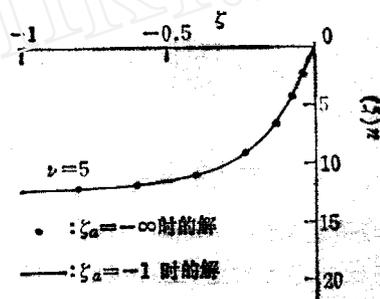


图3 当  $\delta = 1, \nu = 5$  时左边界条件对解的影响

### 参 考 文 献

- [1] Korteweg, D. J. and De Vries, G., On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Channel, and on a New Type of Long Stationary Waves, *Phil. Mag.*, 39(1895), 422—443.
- [2] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Pub., N. Y. (1974).
- [3] Karpman, V. I., *Nonlinear Waves in Dispersive media*, Pergamon Pub., N. Y. (1975).
- [4] Miura, R. M., The Korteweg-de Vries Equation, A Survey of Results, *SIAM Rev.* 18, 3(1976).
- [5] Wijngaarden, L. V., One Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4(1972). 369—396.
- [6] Johnson, R. S., *Nonlinear Waves in Fluid-Filled Elastic Tubes and Related Problems*, Doctoral Thesis, Univ of London (1969).
- [7] Kawahara, J., Weak Nonlinear Magneto-acoustic Waves in a Cold plasma in the Presence of Effective Electron-Ion Collisions, *J. Phys. Soc. Japan*, 28(1970), 1321—1329.
- [8] Lin Yi (林逸), The Evolution of the Korteweg-de Vries-Burgers Shock Structure, Proc of the Second Asian Congress of Fluid Mech., Beijing, China, (1983), 342—347.
- [9] Fletcher, C. A. J., Burgers' Equation: A model for All Reasons, Num. Solutions of P. D. E., Edt. by J. Noye, North-Holland Pub. Co. Amsterdam (1982).
- [10] Jeffrey, A. and Kakutani, T., Weak Nonlinear Dispersive Waves: A Discussion Centered around the Korteweg-de Vries Equation, *SIAM Rev.*, 14(1972), 582—643.
- [11] 金福临,李训经等编,常微分方程(第二版),上海科学技术出版社(1962).
- [12] Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipiz (1956).  
(中译本:常微分方程手册,科学出版社,1980)
- [13] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Pub., N. Y. (1972).

## ONE CLASS OF THE ANALYTICAL SOLUTIONS OF KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS EQUATION

Xin Xiaokang Huang Guangwei  
(Fudan University, Shanghai)

### Abstract

On using variable transformations and the analytical integration, one class of analytical solutions of the Korteweg-De Vries-Burgers equation for monotonic shock profiles has been found. Implicit and explicit forms of the analytical solutions are given out in the paper. Using the series expression of the Jacobi Cosine elliptic function or the numerical integration, it is easy to calculate this function. The profiles of the solution curves for various values of  $\nu$  and  $\delta$  have been shown in the figures of the paper.