

有限元分配法的一般形式及其收敛性

顾志建

(成都科技大学)

提要 本文在作者所写的文献[1]基础上,进一步阐述了有限元分配法的一般形式,并基于泛函分析的 Banach 不动点定理,讨论了这种方法的收敛性;最后举一实例,显示本法能获得较满意的结果。

一、引言

在这之前的有限元分析法,通常是从变分原理出发(也可通过其它途径),通过分区插值,把一个二次泛函(能量积分)的极值问题化为一组多元线性代数方程来求解;而有限元分配法,则是借助于结构力学中,力矩分配法的概念,通过:“放松—传递”的反复循环运算,来逼近精确解,以取代求解一组多元线性代数方程的方法。

二、有限元分配法的一般形式

以往的有限元分析法最终得到一组代数方程:

$$[K]\{\delta\} = \{Q\} \quad (1)$$

式中: $[K]$ 为总体刚度阵, $\{\delta\}$ 为所有结点的“位移”列阵, $\{Q\}$ 为总的结点“载荷”列阵;我们在这里打上引号是表示借用:有限元方法求解结构力学问题时的名称;而在实际的各种不同问题中,引号中的名称,是有着不同的物理意义。例如:在传热学问题中, $\{\delta\}$ 表示各结点温度列阵。

总刚度阵 $[K]$ 为全部单元刚度阵之迭加:

$$[K] = \sum_E [k]^E \quad (2)$$

对每一个单元来说,有下式成立:

$$\{q\}^E = [k]^E \cdot \{\delta\}^E \quad (3)$$

现根据(3)式,导出本方法的基本公式。

每一个单元有 n 个结点,每一个结点,又有 m 个方向的“广义位移”,相应地,就有 m 个“广义载荷”。例如:弹性力学平面问题,当采用三角形单元时 $n = 3$ 及 $m = 2$ 。

式(3)可展写成下式:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}^E = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \cdots k_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} \cdots k_{nn} \end{bmatrix}^E \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}^E \quad (E=1, 2, \cdots, N) \quad (4)$$

这里: N 为单元总数, q_i^E 和 δ_i^E 分别表示第 E 个单元, 第 i 结点上的“结点力”及“结点位移”; 若将 q_i^E 和 δ_i^E 展开, 则可写成:

$$q_i^E = \{q\}_i^E = \begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ \vdots \\ q^{(m)} \end{Bmatrix}_i^E \quad (E=1, 2, \cdots, N; i=1, 2, \cdots, n) \quad (5)$$

$$\delta_i^E = \{\delta\}_i^E = \begin{Bmatrix} \delta^{(1)} \\ \vdots \\ \delta^{(m)} \end{Bmatrix}_i^E \quad (E=1, 2, \cdots, N; i=1, 2, \cdots, n) \quad (6)$$

式(4)中单元刚度阵中的每个元素 k_{rs} 是一个 $m \times m$ 的子矩阵:

$$k_{rs}^E = [k]_{rs}^E = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots k_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} \cdots k_{mm} \end{bmatrix}_{rs}^E \quad (r, s=1, 2, \cdots, n) \quad (7)$$

现令: E 单元, i 结点, 在 p “方向”上发生一个单位的“位移”, (即: $(\delta^{(p)})_i^E = 1$), 而在其余“方向”上, 用相应的约束予以“固结”; 此时, 在 i 结点的各约束方向上所产生的“约束力”由式(4)~(7)导得:

$$\begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ \vdots \\ q^{(p)} \\ \vdots \\ q^{(m)} \end{Bmatrix}_i^E = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cdots k_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ k_{p1} & k_{p2} \cdots k_{pm} \\ \vdots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} \cdots k_{mm} \end{bmatrix}_{ii}^E \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

因此

$$(q_p^{(i)})_i^E = (k_{ip})_{ii}^E \quad (i=1, 2, \cdots, n; p, i=1, 2, \cdots, m) \quad (9)$$

这里, $(q_p^{(i)})_i^E$ 表示: 第 E 个单元, 在 i 结点上, 由于在 p “方向”上产生了一个单位的“位移”, 而导致本单元, 本结点在 i “方向”上引起的“约束反力”; $(k_{ip})_{ii}^E$ 表示: 第 E 个单元的单元刚度阵中, 第 i 个主子矩阵中, 第 i 行, 第 p 列元素。

由于一个结点 i 可以同时属于几个单元, 如图 1 所示, 结点 i 既属于 E 单元 ($i \in E$), 也属于 A 单元 ($i \in A$) (注意: 本文用大写字母表示单元, 小写字母表示结点和位移方向.)



图 1

根据式(9), 同样可求得:

$$(q_p^{(i)})_i^A = (k_{ip})_{ii}^A \quad (10)$$

由迭加原理, 可求得 i 结点由于在 p “方向”发生一个单位的“位移”而引起 i “方向”上的“反力”为:

$$(q_p^{(i)})_i = \sum_A (k_{ip})_{ii}^A \quad (i \in A) \quad (11)$$

现若在 i 结点的各个方向上,同时作用有: $q_i^{(1)}, q_i^{(2)} \dots q_i^{(m)}$; 而 i 结点周围之各结点均处于约束之下,则 i 结点,在各个方向上产生的“位移”由迭加原理可求得:

$$\begin{Bmatrix} q_i^{(1)} \\ \vdots \\ q_i^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_A (k_{11})_{ii}^A & \sum_A (k_{12})_{ii}^A & \dots & \sum_A (k_{1m})_{ii}^A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_A (k_{m1})_{ii}^A & \sum_A (k_{m2})_{ii}^A & \dots & \sum_A (k_{mm})_{ii}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_i^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

现今:

$$\begin{cases} (H_{11})_{ii} = \sum_A (k_{11})_{ii}^A \dots (H_{1m})_{ii} = \sum_A (k_{1m})_{ii}^A \\ \dots \\ (H_{m1})_{ii} = \sum_A (k_{m1})_{ii}^A \dots (H_{mm})_{ii} = \sum_A (k_{mm})_{ii}^A \end{cases} \quad (13)$$

我们称这些系数为: i 结点的主系数; 这里 $\sum_A$ 表示: 当结点 $i \in A$ 单元时,则相应系数的求和运算,就应包括 A 单元, 式(12)可缩写为:

$$\{q\}_i = [H]_{ii} \cdot \{\delta\}_i \quad (14)$$

根据(14)式可反求: 当 i 结点在结点“载荷” $\{q\}_i$ 作用下,产生的各方向上的“位移”为:

$$\{\delta\}_i = [H]_{ii}^{-1} \cdot \{q\}_i \quad (15)$$

由于每一个结点的“广义位移”数目 m 是不大的,如: 对弹性力学平面问题而言 $m=2$ (若取三角形单元,线性位移插值函数情况下,求 $\{\delta\}_i$ 的公式,已在文献[1]中用显式写出),对薄板弯曲问题而言 $m=3$ ($w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$),对稳定温度场问题而言 $m=1$;因此,我们可以在源程序中,编入一段小程序完成此项工作。

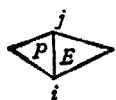


图 2

下面,我们再来求: 由于 $\{q\}_i$ 的作用,周围“固结”的结点上所产生的各个方向的“约束反力”。

例如: 在图 2 中,结点 i, j 都同属于 E 单元 ($i, j \in E$), 而 $\{\delta\}_k = \{0\}$ ($k \neq i$), 故由(4)式可求得 i 结点的“约束反力”:

$$\{q\}_j^E = [k]_{ji}^E \cdot \{\delta\}_i \quad (16)$$

又因 $i, j \in P$ 单元,故类似地可求得:

$$\{q\}_i^P = [k]_{ii}^P \cdot \{\delta\}_i \quad (17)$$

因此,由迭加原理可得 i 结点“约束反力”为:

$$\{q\}_i = \sum_P [k]_{ii}^P \cdot \{\delta\}_i \quad (i, j \in P) \quad (18)$$

对于与 i 不处在同一个单元内的结点来说, $\{\delta\}_i$ 不引起任何“约束反力”。现将(18)式展开成:

$$\begin{Bmatrix} q_i^{(1)} \\ \vdots \\ q_i^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_P (k_{11})_{ii}^P & \sum_P (k_{12})_{ii}^P & \dots & \sum_P (k_{1m})_{ii}^P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_P (k_{m1})_{ii}^P & \sum_P (k_{m2})_{ii}^P & \dots & \sum_P (k_{mm})_{ii}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_i^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

现今

$$\left. \begin{aligned} (H_{11})_{ji} &= \sum_P (k_{11})_{ji}^P, \dots, (H_{1m})_{ji} = \sum_P (k_{1m})_{ji}^P \\ \dots\dots\dots \\ (H_{m1})_{ji} &= \sum_P (k_{m1})_{ji}^P, \dots, (H_{mm})_{ji} = \sum_P (k_{mm})_{ji}^P \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

我们称这些系数为 i 结点的副系数, $\sum_P$ 表示: 当结点 i 和 j 同时属于 P 单元时, 则相应系数的求和运算, 就应包括 P 单元。

对许多问题来说, 由功的互等定理可得:

$$(H_{rs})_{ji} = (H_{sr})_{ij} \quad (r, s = 1, 2, \dots, m) \quad (21)$$

式(19)可缩写为:

$$\{q\}_j = [H]_{ji} \cdot \{\delta\}_i \quad (22)$$

在上面, 利用式(15)求 $\{\delta\}_i$ 的物理过程我们称之为: “ i 结点的放松过程”, 利用式(22)求 $\{q\}_j$ 的物理过程, 我们称之为: “ j 结点的传递过程”。

由上阐述, 可见结构力学中的力矩分配法乃是有限元分配法中最为简单的一种特殊情况。

用有限元分配法解题的步骤及计算框图大致如下。

1. 划分单元网格, 定出各结点的坐标。
2. 利用本文中导出的式(13)和式(20)分别求出各结点的主、副系数。
3. 求出实际问题中各结点在“自重”及各种“载荷”作用下的“结点力”。
4. 选定某条路径, 进行“放松——传递”的循环运算, 并迭加每次“放松”结点时所得的结点“位移”, 直到满足预定的精度要求为止。根据作者的经验, 最好用两个条件来同时控制: ① 结点“不平衡力”的绝对值应小于某个预定的误差限(如: 10^{-4} 载荷) ② 前后两次运算所得的结点“位移”之相对误差应小于某个预定的相对误差限(如: 10^{-2})。
5. 针对每个特定问题, 最后计算每个单元的有关物理量(如在弹性力学问题中, 计算每个单元的应力值等)。

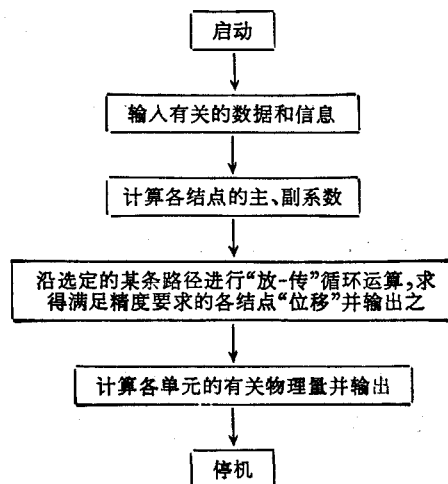


图 3

在编写源程序时应注意:

- “放-传”路径的选择对加快收敛速度有很大的影响,故应尽可能选择“最优路径”。
- 为节省内存对副系数采用紧凑存贮法。
- 根据具体问题的要求确定两个误差限。
- 倘若用小机子解大问题发生内存单元不够时,可边求主、副系数边作“放-传”运算;甚至可利用子结构法。

源程序框图如图3。

三、有限元分配法的收敛性

现在我们对有限元分配法本身计算过程的收敛性及误差估计作一讨论(不涉及形态函数的选择、单元的相容性、奇异性等问题)。

为了研究方便,我们暂先讨论仅在 i 结点上有点“载荷” $\{q\}_i^{(0)}$ 作用。

设 i 结点第 0 次结点“不平衡载荷”(即为实际作用的载荷)为: $\{q\}_i^{(0)}$, 由此可相继地求得各物理量;首先放松 i 结点后得:

$$\{\delta\}_i^{(0)} = -[H]_{ii}^{-1} \{q\}_i^{(0)} \quad (23)$$

(设: i 类结点与 i 结点同处在一个单元中,在每一个包含 i 结点的单元中都有一个 i 结点,详见图4)。

由式(22)可得:

$$\{q\}_{ij}^{(0)} = [H]_{ij} \cdot \{\delta\}_i^{(0)} = -[H]_{ij} \cdot [H]_{ii}^{-1} \cdot \{q\}_i^{(0)} \quad (24)$$

图 4

放松 i 类结点导致 i 结点产生的结点“位移”为:

$$\{\delta\}_j^{(0)} = -[H]_{jj}^{-1} \{q\}_{ij}^{(0)} = [H]_{jj}^{-1} \cdot [H]_{ij} \cdot [H]_{ii}^{-1} \cdot \{q\}_i^{(0)} \quad (25)$$

由于 i 类结点的放松,传递给 j 结点的“不平衡载荷”为:

$$\{q\}_j^{(0)} = \sum_i [H]_{ij} \cdot \{\delta\}_i^{(0)}$$

将(25)式代入上式可得:

$$\begin{aligned} \{q\}_j^{(0)} &= \sum_i ([H]_{ij} \cdot [H]_{jj}^{-1} \cdot [H]_{ij} \cdot [H]_{ii}^{-1} \cdot \{q\}_i^{(0)}) \\ &= \sum_i ([H]_{ij} \cdot [H]_{jj}^{-1} \cdot [H]_{ji} \cdot [H]_{ii}^{-1}) \{q\}_i^{(0)} \end{aligned}$$

现令:

$$\sum_i ([H]_{ij} \cdot [H]_{jj}^{-1} \cdot [H]_{ji} \cdot [H]_{ii}^{-1}) = [H^*]_{ij} \quad (26)$$

因此:

$$\{q\}_j^{(0)} = [H^*]_{ij} \cdot \{q\}_i^{(0)} \quad (27)$$

现在,将 i 类结点和 i 结点均“固结”,考察 k 类结点在“放-传”过程中对 i 结点的影响。

经过类似上面的推导可得:

$$\begin{aligned}\{q\}_i^{(0)} &= -[H]_{ki} \cdot [H]_{ii}^{-1} \cdot \{q\}_i^{(0)} - [H]_{ki} \cdot [H]_{ii}^{-1} \cdot \{q\}_i^{(0)} \\ &= (-[H]_{ki} \cdot [H]_{ii}^{-1} + [H]_{ki} \cdot [H]_{ii}^{-1} [H]_{ii} \cdot [H]_{ii}^{-1}) \{q\}_i^{(0)}\end{aligned}\quad (28)$$

$$\{\delta\}_k^{(0)} = -[H]_{kk}^{-1} \cdot \{q\}_k^{(0)} \quad (29)$$

$$\{q\}_{ik}^{(0)} = \sum_k [H]_{ik} \cdot \{\delta\}_k^{(0)} \quad (30)$$

$$\{q\}_{ik}^{(0)} = [H^*]_{ik} \cdot \{q\}_i^{(0)} \quad (31)$$

如若再逐批地考虑: $l, u, v, \dots$ 类结点放松后对 i 结点的影响, 最后利用迭加原理可得 i 结点第 1 次结点“不平衡载荷”为:

$$\{q\}_i^{(1)} = \{q\}_i^{(0)} + \{q\}_{ik}^{(0)} + \{q\}_{il}^{(0)} + \dots = [H^*]_i^{(1)} \cdot \{q\}_i^{(0)} \quad (32)$$

经过类似推导可得第 w 次结点“不平衡载荷”:

$$\{q\}_i^{(w)} = [H^*]_i^{(w)} \cdot \{q\}_i^{(w-1)} \quad (33)$$

在式(33)中, $\{q\}_i^{(w)}$ 和 $\{q\}_i^{(w-1)}$ 均为一个 m 维列向量(m 为结点“广义位移”的数目);而 $[H^*]_i^{(w)}$ 为一个 $m \times m$ 阶的矩阵.

根据式(33)现在 R^m 上定义如下的距离和映象:

$$d(x, y) = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k - y_k|, \forall x, y \in R^m \quad (34)$$

$$T: R^m \rightarrow R^m$$

$$x \rightarrow Cx \quad (35)$$

其中:

$$x \in R^m, C \in R^{m \times m} \quad (36)$$

若:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^m |C_{ik}| = \mu < 1 \quad (37)$$

(式(37)是收敛的充分条件)

则: $\forall x, y \in R^m$ 有:

$$\begin{aligned}d(Tx, Ty) &= \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{k=1}^m C_{ik} x_k - \sum_{k=1}^m C_{ik} y_k \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^m |C_{ik}| \cdot |x_k - y_k| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^m |C_{ik}| \cdot \max_{1 \leq k \leq m} |x_k - y_k| \\ &= \mu \cdot d(x, y)\end{aligned}\quad (38)$$

其中: 由(37)式知:

$$\mu \in (0, 1) \quad (39)$$

因此, T 是一个在 R^m 空间上的压缩映象, 而这里的 R^m 是完备的 Banach 空间, 故由 Banach 不动点定理可知:

迭代序列:

$\forall x_0 \in R^m, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \dots$ 是一个收敛的柯西序列, 收敛点: x^* 就是不动点, 而且是唯一的. 即: 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有:

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0 \quad (40)$$

而在我们这个映象中,不动点就是 θ (零向量)。因此,由式(33)所示的迭代过程,表示 i 结点的“不平衡载荷”: $\{q\}^{(w)}$ 必收敛于 θ 。

最后,根据迭加原理可知:当所有结点上都有结点“载荷”作用时,经过若干次反复的“放-传”循环运算后,所有结点上的“不平衡结点载荷”必将逐渐减小,从而各结点逐步趋向稳定平衡。

对于循环次数,可根据误差估计理论来进行估算;由 Banach 不动点理论,有:

$$d(x^{(w+p)}, x^{(w)}) < \frac{\mu^w}{1-\mu} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \quad (41)$$

我们要近似地求出不动点 x^* , 只需取适当的 w , 用 $x^{(w)}$ 代替 x^* 即可, 故取 $p \rightarrow \infty$ 的极限, 得:

$$d(x^*, x^{(w)}) \leq \frac{\mu^w}{1-\mu} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \quad (42)$$

在有限元分配法中,对结点“不平衡载荷”来说,由于 $x^* = \theta$, 因此由 (42) 式得到:

$$d(x^*, x^{(w)}) = d(\theta, x^{(w)}) = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k^{(w)}| \leq \frac{\mu^w}{1-\mu} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \quad (43)$$

也就是说:我们只要取适当的 w , 使得 $\frac{\mu^w}{1-\mu} d(x^{(1)}, x^{(0)})$ 不超过预定的某一个很小的

表 1 结点的主系数

数 值 项目 结点	$[H_{11}]_{ii}$	$[H_{12}]_{ii}$	$[H_{21}]_{ii}$	$[H_{22}]_{ii}$
$i=1$	0.25E	0	0	0.5E
$i=2$	1.5E	0.25E	0.25E	1.5E
$i=3$	1.5E	0.25E	0.25E	1.5E
$i=4$	1.5E	0.25E	0.25E	1.5E
$i=5$	0.5E	0	0	0.25E

表 2 结点的副系数

数 值 结点 [H] _{ij}	结点 1 (i=1)		结点 2 (i=2)			结点 3 (i=3)		结点 4 (i=4)	
	j=2	j=3	j=3	j=4	j=6	j=4	j=5	j=5	j=6
$[H_{11}]_{ii}$	-0.25E	0	-1.0E	0	-0.25E	-0.5E	0	-0.5E	-0.5E
$[H_{12}]_{ii}$	0	0	-0.25E	0.25E	0	-0.25E	0	0	-0.25E
$[H_{21}]_{ii}$	-0.25E	0.25E	-0.25E	0.25E	-0.25E	-0.25E	0.25E	-0.25E	0
$[H_{22}]_{ii}$	-0.5E	0	-0.5E	0	-0.5E	-1.0E	0	-0.25E	-0.25E

数: $\varepsilon > 0$, 那么, 对这样的 w 就有:

$$\max_{1 \leq k \leq m} |x_k^{(w)}| \leq \frac{\mu^w}{1-\mu} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \leq \varepsilon \quad (44)$$

四、举 例

我们现选择文献[4]中所提供的一个较为简单的例子来作为我们讨论的对象。

设有图 5 所示的对角受压的正方形薄板, 荷载沿厚度均匀分布, 为: $2T/m$, 为了简化起见, 取 $\mu = 0$, 板厚 $t = 1$, 且不计自重影响。

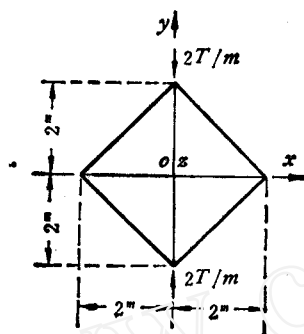


图 5

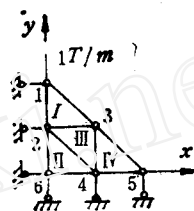


图 6

根据对称性取四分之一部分作为计算对象, 如图 6 所示。(注意: 在本文编写源程序时, 为了将具有双向约束的结点排在最后, 故在图 6 中的第 4, 5, 6 三个结点的编号与原文献[4]中该三个结点的编号不同)。

在文献[4]中通过计算列出了(45)式的线性代数方程组, 并通过直接法, 解得各结点的位移, 及各单元内的应力(详见式(46)和表 4)。

$$E \begin{bmatrix} 0.5 & & & & & \\ -0.5 & 1.5 & & & & \\ 0 & -0.5 & 1.5 & & & \\ 0 & -0.25 & 0.25 & 1.5 & & \\ 0 & 0.25 & -0.25 & -0.5 & 1.5 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

$$[v_1 \ v_2 \ v_3 \ u_3 \ u_4 \ u_5]^T = \frac{1}{E} [-3.252 \ -1.252 \ -0.372 \ -0.088 \ 0.176 \ 0.176]^T \quad (46)$$

我们用表格形式列出本法的各项计算成果(见表 1, 2)。

注: 在表 2 中未列出 $i < j$ 的结点副系数, 根据式(21), 我们不难写出这些副系数。

在本例中, 结点载荷只有 1 结点才有: $(f_x)_1 = 0$, $(f_y)_1 = -1 (T/m)$

在本法计算中, 我们同时采用两个误差限来控制计算的精度: ① 要求循环运算后, 最大的不平衡结点力(绝对值) $ER < 0.0001 (T/m)$ ② 要求前后两次运算所得的结点位移之最大相对误差(绝对值) $PE < 0.01$ 。

为选择最佳“放-传”路径, 在表 3 中列出了四条不同路径下, 循环运算次数 $N = 5$ 和 $N = 10$ 所获得的计算结果。

从表 3 可见: 对本例而言, 第①、②路径较佳; 第③、④路径稍差。(在本例中四条路

表 3 沿不同的路径所得计算成果

项目	路径 数值	① 路径		② 路径		③ 路径		④ 路径	
		N = 5	N = 10	N = 5	N = 10	N = 5	N = 10	N = 5	N = 10
1 结 点	ER	0.0157721	0.000310971	0.0157721	0.000310971	0.0157721	0.000464805	0.0179517	0.000620290
	PE	0.0715120	0	0.0370275	0	0.250320	0.0103692	0.133593	0
	u_1	0	0	0	0	0	0	0	0
	u_1	-3.194467	-3.251624	-3.194467	-3.251624	-3.194467	-3.251624	-3.194467	-3.251624
	$(F_x)_1$	-0.214479	-0.219668	-0.215204	-0.219697	-0.216382	-0.219690	-0.216382	-0.219690
2 结 点	$(F_x)_1$	-0.0157721	-0.000310971	-0.0157721	-0.000310971	-0.0157721	-0.000310971	-0.0157721	-0.000310971
	u_2	0	0	0	0	0	0	0	0
	v_2	-1.226012	-1.252246	-1.226012	-1.252246	-1.226012	-1.252246	-1.226012	-1.252246
	$(F_x)_2$	-0.491282	-0.494606	-0.482578	-0.494252	-0.492101	-0.494805	-0.492101	-0.494805
	$(F_y)_2$	-0.00602766	-0.000107430	-0.00602766	-0.000107430	0	0	0	0
3 结 点	u_3	-0.0927553	-0.0881504	-0.0847760	-0.0878257	-0.0954772	-0.0883715	-0.0954772	-0.0883715
	v_3	-0.368096	-0.373576	-0.365194	-0.373458	-0.360483	-0.373487	-0.360483	-0.373487
	$(F_x)_3$	0.00580313	0.000236175	0	0	0.00217961	0.000236175	0.00217961	0.000309320
	$(F_y)_3$	0.00290156	0.000118088	0	0	-0.0107393	-0.0000785682	-0.0107393	-0.0000785682

4 结 点	u_i	0.162298	0.175356	0.176080	0.175917	0.150692	0.174884	0.150692	0.174884
	v_i	0	0	0	0	0	0	0	0
	$(F_x)_i$	0.00580313	0.000236175	-0.00326426	-0.000312849	0.00788604	0.000155485	0.0179517	0.000620290
	$(F_y)_i$	-0.350710	-0.351775	-0.342368	-0.351436	-0.346679	-0.351839	-0.346679	-0.351859
5 结 点	u_i	0.162298	0.175356	0.176080	0.175917	0.130560	0.173954	0.150692	0.174884
	v_i	0	0	0	0	0	0	0	0
	$(F_x)_i$	0	0	0	0	0.0100556	0.000464805	0	0
	$(F_y)_i$	0.0637634	0.0658766	0.0652141	0.0659357	0.0615413	0.0658138	0.0615423	0.0658138
6 结 点	u_i	0	0	0	0	0	0	0	0
	v_i	0	0	0	0	0	0	0	0
	$(F_x)_i$	0.0811490	0.0876781	0.0880403	0.0879585	0.0753459	0.0874419	0.0753459	0.0874419
	$(F_y)_i$	-0.613006	-0.626123	-0.613006	-0.626123	-0.613006	-0.626123	-0.613006	-0.626123
当 $ER=0 \wedge PF=0$ 时,所需次数		$N=12$			$N=12$			$N=13$	
注: ①路径为:		1→2→3→4→5			1→2→4→5→3			④路径为:	
		1→2→3→4→5			1→2→4→5→3			1→3→5→4→2	
		1→2→3→4→5			1→2→4→5→3			1→3→5→4→2	

表 4 分配法(沿④路径, $N=12$) 与直接法比较

数值方法 项目		分配法	直接法	数值方法 项目		分配法	直接法	
结点最大不平衡力 ER		0	0.002	I 单元	σ_x	-0.0879735	-0.088	
结点位移,最大 相对误差 PE		0	—		σ_y	-1.999876	-2.000	
					τ_{xy}	0.439514	0.440	
					σ_1	0.00822315	—	
					σ_2	-2.096072	—	
1 结点	u_1	0	0		θ	12°20'44.4"	—	
	v_1	-3.252520	-3.2523	II 单元	σ_x	0.175711	0.176	
	$(F_x)_1$	-0.219757	(未算)		σ_y	-1.252650	-1.252	
	$(F_y)_1$	-0.0000621533	0		τ_{xy}	0	0	
2 结点	u_2	0	0		σ_1	0.175711	—	
	v_2	-1.252650	-1.252		σ_2	-1.252650	—	
	$(F_x)_2$	-0.494541	(未算)		θ	0°	—	
	$(F_y)_2$	-0.0000203708	0	III 单元	σ_x	-0.0879735	-0.088	
3 结点	u_3	-0.0879735	-0.088		σ_y	-0.373622	-0.372	
	v_3	-0.373622	-0.372		τ_{xy}	0.307671	0.308	
	$(F_x)_3$	0.0000589489	0		σ_1	0.108408	—	
	$(F_y)_3$	0.0000294745	0.002		σ_2	-0.570003	—	
4 结点	u_4	0.175711	0.176		θ	32°32'57.8"	—	
	v_4	0	0	IV 单元	σ_x	0	0	
	$(F_x)_4$	0.0000589489	0		σ_y	-0.373622	-0.372	
	$(F_y)_4$	-0.351688	(未算)		τ_{xy}	-0.131842	-0.132	
5 结点	u_5	0.175711	0.176		σ_1	0.0418388	—	
	v_5	0	0		σ_2	-0.415461	—	
	$(F_x)_5$	0	0		θ	-17°36'22.7"	—	
	$(F_y)_5$	0.0659212	(未算)					

径的差别不大,但并不能认为:在其它实例中,不同的路径差别也会不大)(注意:表中 $ER = 0$ 表示: $ER < 0.0001T/m$; $PE = 0$ 表示: $PE < 0.01$)

从表 4 中可见:文献[4]提供的直接解数值下,结点 3 在 y 向还有较大的结点不平衡力: $(F_y)_3 = 0.002(T/m)$,而运用本法,循环 12 次后,全部结点的不平衡力均已小于 $0.0001(T/m)$;若运用本法,仅要求达到文献[4]所得解的精度要求,则从表 6 可见:仅需运算 8 次即可。

表 5 迭代法与超松弛迭代法计算结果

项 目 \ 方 法 数 值		迭 代 法			超松弛迭代法(取 $\omega = 1.805$)		
		$N = 5$	$N = 10$	$N = 44$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 37$
PE		2.000000	0.696191	0	19.019467	1.063416	0
结 点 位 移	v_1	-3	-3.167581	-3.252105	-3.439950	-3.373811	-3.252457
	v_2	-0.962963	-1.251676	-1.253317	-1.598661	-1.302071	-1.252286
	v_3	-0.320988	-0.338198	-0.373231	-0.665456	-0.378063	-0.373423
	u_1	-0.123457	-0.0676853	-0.0875170	-0.209850	-0.0828750	-0.0879228
	u_4	0.160494	0.129414	0.175254	0.0083651	0.353340	0.175166
	u_5	0.0370370	0.191168	0.176456	0.378757	0.367406	0.175055
不 平 衡 节 点 力	$(F_y)_1$	-0.0185185	0.0420477	0.003606202	-0.0793553	-0.0358698	-0.0000855955
	$(F_y)_2$	0.287037	-0.0753506	-0.00161540	-0.290729	0.0318838	0.000283039
	$(F_y)_3$	-0.0709876	0.0692666	0.00111928	-0.253413	-0.0251128	0.000236836
	$(F_x)_1$	-0.104938	0.0621348	0.00111924	-0.0856673	-0.0699803	0.000248327
	$(F_x)_4$	0.123457	-0.0959902	-0.00161550	-0.305177	0.156742	-0.000532328
	$(F_x)_5$	-0.0617284	0.0308769	0.000606153	0.185186	0.00703299	-0.0000555570
ER		0.287037	0.0959902	0.00161550	0.305177	0.156742	0.000532328

表 6 本法沿① 路径, 12 次运算中的误差值

项 值 \ N		1	2	3	4	5	6
ER		0.333333	0.156614	0.0732208	0.0340658	0.0157721	0.00726658
PE		1	0.481054	0.250320	0.133593	0.0715120	0.0380118
项 值 \ N		7	8	9	10	11	12
ER		0.00333124	0.00151935	0.000689285	0.000310971	0.000139467	0
PE		0.0199783	0.0103692	0	0	0	0

从表 5 中可见: 对于迭代法和超松弛迭代法来说, 虽然各自经过 44 次和 37 次运算后, 前后两次结点位移的最大相对误差已小于 0.01, 但是在结点上依然有较大的不平衡结点力(前者相当于本法计算 8 次的水平, 后者相当 9 次水平)。

我们将表 5 与表 3、表 6 相比, 可发现: 有限元分配法的收敛速度显然要快得多。

五、小 结

通过本例,我们可定性地对本法小结如下:

1. 本法的物理概念清晰,运算不复杂。
2. 从本例可见:收敛速度比通常的迭代法及超松弛迭代法来得快。
3. 运用本法可用小机子解较大的问题。这只需边计算结点的主、副系数边进行“放-传”运算;也可以把计算对象划分为几个子块,先在每个子块中进行本法计算,然后在各子块间进行“放-传”运算,如此循环几次,即可获得满意解答。
4. 运用本法存在一个最佳路径问题,不同的路径有着不同的 μ 值, μ 值越小,则收敛越快,如何找到 $\min \mu$?还有待我们进一步用优化设计的理论去探讨。
5. 运用本法可同时求得各结点力,且以此作为控制精度的一个重要指标;而其它方法仅仅着眼于前后两次运算所得的结点位移之相对误差。本法着眼于“结点的不平衡力”,从本质上反映了结点是否处于稳定的平衡状态。

6. 利用表6 $d(x^{(1)}, x^{(0)}) = 1/3$, 及表4: 当 $N = 12$ 时

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}| \leq 0.0001$$

(本例取 $\varepsilon = 10^{-4}$),再运用(44)式,可得本例沿①路径,其 $\mu \approx 0.48$,确实满足式(37)。

最后,作者认为:本法的提出可能对有限元分析法的发展起一定的促进作用,然而本文的工作尚属初步,故希望我国科技人员能共同为完善有限元分配法作进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] 顾志建,有限元分配法,力学与实践 4(1983).
- [2] 复旦大学数学系编著,泛函分析,上海科技出版社, (1960,5), 106—112.
- [3] Erwin Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, 299—314.
- [4] 华东水利学院,弹性力学问题的有限单元法(修订版),水利电力出版社 (1978,10), 34—38.

GENERAL FORM AND CONVERGENCE OF DISTRIBUTION METHOD IN FINITE-ELEMENT ANALYSIS

Gu Zhijian

(Chengdu University of Science and Technology)

Abstract

This paper further presents general form of distribution method in finite-element on the basis of the previous paper (1) and discusses convergence of this method based on the Banach fixed point theorem of functional analysis. A simple example is given and satisfactory results are obtained.