

有限空心圆柱体的三维非轴对称变形分析*

欧阳甯 徐林林

(复旦大学)

摘要 本文应用 Pickett^[1] 双重级数展开法的思想研究了有限空心圆柱体的非轴对称三维变形问题。文中先将位移势函数展为 Fourier 级数和 Fourier-Bessel 级数之和,在一定边界条件下,两级数中的系数可以互相表示,这样,我们可获得一组联立代数方程组,求解此方程组,最后可求得问题的解。文中给出了一个计算实例,表明这样构造的解是收敛的。

一、引言

有限空心圆柱体的三维应力分析是弹性力学中的一个困难问题。多年来,由于问题复杂,大多数的讨论限于轴对称变形问题^[2]。1972年,Benthem 和 Minderhoud 在文[3]中已对这方面的工作做了详细的总结和评述。较为深入地探讨非轴对称问题似乎是从 A. E. Green 的研究开始的。1948年,Green 在文[4]中深入分析了含有圆柱空洞无限板问题。与此同时,Sternberg 和 Sadowsky^[7] 则采用一种修正的 Ritz 近似法对同样问题进行了大量的数值计算。然而,具有圆柱空洞的有限板变形问题常常具有实际的重要性。本文应用 Pickett 双重级数展开法的思想研究有限空心圆柱的非轴对称变形问题。文中首先将位移势函数展为 Fourier 和 Fourier-Bessel 两种级数之和,在一定边界条件下,两级数中的系数可以互相表示,这样,我们可获得一组联立代数方程组,求解此方程组,就可求得问题的解。文中给出了一个计算实例,表明这样构造的解是收敛的。

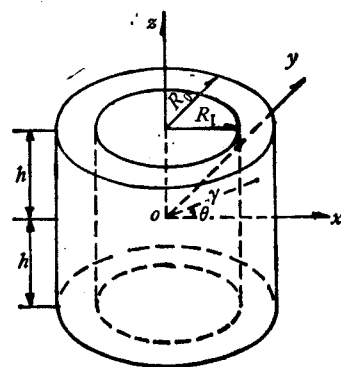


图 1

二、问题的提法

建立坐标系,如图所示。

一般地,我们给定这样的边界条件:(一)柱体的上、下底面无剪切力作用;(二)柱体侧面上的作用力沿轴线(z 轴)投影为零,且关于中面 xoy 呈对称分布。

为分析方便起见,下面对边界条件作一些简化讨论。

假设诸位移、应力分量以及相应的边界值可关于变量 θ 展为 Fourier 级数。例如,设

* 中国科学院科学基金资助的课题。

本文于1984年7月18日收到,1985年7月9日收到修改稿。

$$\sigma_r = \sum_n [f_n(r, z) \cos n\theta + g_n(r, z) \sin n\theta].$$

根据叠加原理,我们可以对每个 n 单独进行讨论.

进而言之,对某个固定的 n , 我们还可分为二部分单独处理,详见下节.

注意到,将 θ 换为 $\theta + \frac{\pi}{2n}$ 可使 $\sin n\theta$ 变为 $\cos n\theta$, 则不失一般性,我们可设边界条件为:

$$\sigma_{rz} = 0, \sigma_{\theta z} = 0, \sigma_z = p(r) \cos n\theta, z = \pm h \quad (2.1)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \sigma_r = \sigma_{rI}(z) \cos n\theta, \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta I}(z) \sin n\theta, r = R_I \quad (2.2)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \sigma_r = \sigma_{rO}(z) \cos n\theta, \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta O}(z) \sin n\theta, r = R_O \quad (2.3)$$

式中诸函数 $\sigma_{rI}(z)$ 、 $\sigma_{r\theta I}(z)$ 、 $\sigma_{rO}(z)$ 及 $\sigma_{r\theta O}(z)$ 均为变量 z 的偶函数.

若 $n = 0$, 则问题退化为轴对称变形问题,这是文[2—3]研究的情况. 本文假设 $n \geq 1$, 即讨论非轴对称变形问题. 下面对边值问题(2.1)、(2.2)、(2.3)进行讨论.

三、基本方程与基本解

引进势函数^[8] φ 和 $\psi_k (k = 1, 2, 3)$, 采用张量记号, 则位移与势函数的关系可写为:

$$u_i = \varphi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,i}$$

令 $w_i = e_{ijk} \psi_{k,i}$, 上式改写为:

$$u_i = \varphi_{,i} + w_i \quad (3.1)$$

容易看出

$$w_{i,i} = e_{ijk} \psi_{k,ii} = 0 \quad (3.2)$$

应力 σ_{ij} 由下式确定:

$$\sigma_{ij} = \lambda \nabla^2 \varphi \delta_{ij} + 2G \varphi_{,ij} + G(w_{j,i} + w_{i,j}) \quad (3.3)$$

无体力情况下,平衡方程为:

$$\sigma_{ij,i} = 0$$

如用势函数则可表示为:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \nabla^2 \varphi &= \Phi \\ \nabla^2 w_i &= -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \Phi_{,i} \end{aligned} \quad (3.4)$$

对于边值问题(2.1)、(2.2)、(2.3), 可设势函数为下述形式:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(r, z) \cos n\theta \\ \varphi &= \varphi(r, z) \cos n\theta \\ w_r &= \omega_r(r, z) \cos n\theta \\ w_\theta &= \omega_\theta(r, z) \sin n\theta \\ w_z &= \omega_z(r, z) \cos n\theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

故有

$$w_z = \omega(r, z) \cos(n+1)\theta + \check{\omega}(r, z) \cos(n-1)\theta$$

$$w_y = \hat{\omega}(r, z) \sin(n+1)\theta - \check{\omega}(r, z) \sin(n-1)\theta$$

式中

$$\hat{\omega}(r, z) = \frac{\omega_r(r, z) + \omega_\theta(r, z)}{2}$$

$$\check{\omega}(r, z) = \frac{\omega_r(r, z) - \omega_\theta(r, z)}{2}$$

除 $\omega(r, z)$ 为变量 z 的奇函数外, 其余诸函数均为变量 z 的偶函数。

把式(3.5)代入式(3.4), 消去因子 $\cos n\theta$ 或 $\sin n\theta$ 后, 得:

$$\begin{aligned} \nabla_n^2 \Phi(r, z) &= 0 \\ \nabla_n^2 \varphi(r, z) &= \Phi(r, z) \\ \nabla_{n+1}^2 \hat{\omega}(r, z) &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right) \Phi(r, z) \\ \nabla_{n-1}^2 \check{\omega}(r, z) &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right) \Phi(r, z) \\ \nabla_n^2 \omega(r, z) &= -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

式中算子

$$\nabla_m^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (m = n-1, n, n+1)$$

现在, 问题就归结为怎样在一定边界条件下求解上述方程。

我们称满足(2.1)的前二式, (2.2)和(2.3)的第一式的解为基本解。

下面采用分离变量法解方程组(3.6), 以求得基本解。

情况 1: 对方程组(3.6), 我们寻找下述形式之解:

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, z) &= \Phi_m(r) \cos k_m z \\ \varphi_m(r, z) &= \varphi_m(r) \cos k_m z \\ \hat{\omega}_m(r, z) &= \hat{\omega}_m(r) \cos k_m z \\ \check{\omega}_m(r, z) &= \check{\omega}_m(r) \cos k_m z \\ \omega_m(r, z) &= \omega_m(r) \sin k_m z \end{aligned} \quad (3.7)$$

式中 k_m 为常数。

由类似 Yih^[7] 的方法, 可解得:

$$\begin{aligned} \Phi_m(r) &= C_{1m} I_n(\rho) + D_{1m} K_n(\rho) \\ \varphi_m(r) &= \bar{C}_{1m} \rho I_{n+1}(\rho) + \bar{D}_{1m} \rho K_{n+1}(\rho) + \frac{C_{2m}}{k_m^2} I_n(\rho) + \frac{D_{2m}}{k_m^2} K_n(\rho) \\ \omega_m(r) &= \tilde{C}_{1m} \rho I_{n+1}(\rho) + \tilde{D}_{1m} \rho K_{n+1}(\rho) + \frac{C_{3m}}{k_m} I_n(\rho) + \frac{D_{3m}}{k_m} K_n(\rho) \\ \hat{\omega}_m(r) &= \hat{C}_{1m} \rho I_{n+2}(\rho) + \hat{D}_{1m} \rho K_{n+2}(\rho) + \frac{C_{4m}}{k_m} I_{n+1}(\rho) + \frac{D_{4m}}{k_m} K_{n+1}(\rho) \\ \check{\omega}_m(r) &= \check{C}_{1m} \rho I_n(\rho) + \check{D}_{1m} \rho K_n(\rho) + \frac{C_{5m}}{k_m} I_{n-1}(\rho) + \frac{D_{5m}}{k_m} K_{n-1}(\rho) \end{aligned} \quad (3.8)$$

式中

$$\begin{aligned}\rho &= K_m r, \quad \bar{C}_{1m} = C_{1m}/2K_m^2, \quad \bar{D}_{1m} = -D_{1m}/2K_m^2 \\ \tilde{C}_{1m} &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} C_{1m}/K_m, \quad \tilde{D}_{1m} = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} D_{1m}/K_m, \\ \hat{C}_{1m} &= -\frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} C_{1m}/K_m, \quad \hat{D}_{1m} = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} D_{1m}/K_m, \\ \check{C}_{1m} &= \hat{C}_{1m}, \quad \check{D}_{1m} = \hat{D}_{1m}\end{aligned}\quad (3.9)$$

又由 $w_{i,i} = 0$, 诸常数须满足等式:

$$\begin{aligned}C_{3m} + C_{4m} + C_{5m} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} C_{1m} &= 0, \\ D_{3m} - D_{4m} - D_{5m} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} D_{1m} &= 0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

根据此组势函数可求出位移、应力诸分量。

注意到 $\varphi_m(r)$ 中 $\frac{C_{2m}}{K_m} I_n(\rho) + \frac{D_{2m}}{K_m} K_n(\rho)$ 的贡献可由其余诸函数表示, 所以可取 $C_{2m} = D_{2m} = 0$ 。

将(3.5)、(3.7)、(3.8)、(3.9)和(3.10)代入(3.1)、(3.3), 并令 $C_{2m} = D_{2m} = 0$, 得

$$\begin{aligned}\frac{u_{r,m}(r, \theta, z)}{\cos K_m z \cos n\theta} &= \left[\frac{1}{2K_m} (\rho I_{n+1})' - \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)K_m} \rho (I_{n+2} + I_n) \right] C_{1m} \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2K_m} (\rho K_{n+1})' - \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)K_m} \rho (K_{n+2} + K_n) \right] D_{1m} \\ &\quad + \frac{I_{n+1}}{K_m} C_{4m} + \frac{K_{n+1}}{K_m} D_{4m} + \frac{I_{n-1}}{K_m} C_{5m} + \frac{K_{n-1}}{K_m} D_{5m}\end{aligned}\quad (3.11)$$

式中 $K_m, C_{1m}, D_{1m}, C_{4m}, D_{4m}, C_{5m}$ 和 D_{5m} 为待定常数。

取 $K_m = \frac{m\pi}{h}$ ($m = 1, 2, \dots$), 则在边界 $z = \pm h$ 上, $\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$ 。

把(3.12)代入(2.2)、(2.3)的第一式, 得

$$\begin{aligned}&\left[I_n(K_m R_l) \left(\frac{K_m R_l}{2(1-2\nu)} + \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} \frac{n}{K_m R_l} \right) \right. \\ &\quad \left. + I_{n+1}(K_m R_l) \left(-\frac{n}{2(1-2\nu)} \right) \right] C_{1m} \\ &\quad + \left[K_n(K_m R_l) \left(\frac{K_m R_l}{2(1-2\nu)} + \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} \frac{n}{K_m R_l} \right) + K_{n+1}(K_m R_l) \frac{n}{2(1-2\nu)} \right] D_{1m} \\ &\quad + \left[I_n(K_m R_l) \left(-\frac{n}{2K_m R_l} \right) - I_{n+1}(K_m R_l) \right] C_{4m} \\ &\quad + \left[K_n(K_m R_l) \frac{n}{2K_m R_l} - K_{n+1}(K_m R_l) \right] D_{4m} \\ &\quad + \left[I_n(K_m R_l) \left(-\frac{3n}{2K_m R_l} \right) - I_{n+1}(K_m R_l) \right] C_{5m}\end{aligned}$$

$$+ \left[K_n(K_m R_l) \frac{3n}{2K_m R_l} - K_{n+1}(K_m R_l) \right] D_{3m} = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \left[I_n(K_m R_0) \left(\frac{K_m R_0}{2(1-2\nu)} + \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} \frac{n}{K_m R_0} \right) \right. \\ & \quad \left. + I_{n+1}(K_m R_0) \left(-\frac{n}{2(1-2\nu)} \right) \right] C_{1m} + \left[K_n(K_m R_0) \left(\frac{K_m R_0}{2(1-2\nu)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} \frac{n}{K_m R_0} \right) + K_{n+1}(K_m R_0) \frac{n}{2(1-2\nu)} \right] D_{1m} \\ & \quad + \left[-I_n(K_m R_0) \frac{n}{2K_m R_0} - I_{n+1}(K_m R_0) \right] C_{4m} \\ & \quad + \left[K_n(K_m R_0) \frac{n}{2K_m R_0} - K_{n+1}(K_m R_0) \right] D_{4m} \\ & \quad + \left[-I_n(K_m R_0) \frac{3n}{2K_m R_0} - I_{n+1}(K_m R_0) \right] C_{5m} \\ & \quad + \left[K_n(K_m R_0) \frac{3n}{2K_m R_0} - K_{n+1}(K_m R_0) \right] D_{5m} = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

从(3.12)、(3.13)式可解出 C_{1m} 和 D_{1m} 。这样,我们获得了一组含有待定常数 C_{4m} 、 D_{4m} 、 C_{5m} 和 D_{5m} 的基本解。

对于 $K_m = 0$ 的情形,(3.8)~(3.13)式不再成立。这种情形须特殊处理如下:事实上,这相当于一种平面应变情况,我们引进应力函数^[3]: $U(r, \theta) = U(r) \cos n\theta$, 不难求得:

$$U(r) = 2GR_l^2 \left[C_{40} \left(\frac{r}{R_l} \right)^{n+2} + D_{40} \left(\frac{r}{R_l} \right)^{-(n-2)} + C_{50} \left(\frac{r}{R_l} \right)^n + D_{50} \left(\frac{r}{R_l} \right)^{-n} \right] \quad (3.14)$$

如前面一样,我们进而可求得应力与位移的表式。

这组解恒满足(2.1)的第一、第二式及(2.2)、(2.3)式的第一式,所以,它也是一个基本解。

情况 2:

对方程组(3.6),我们寻找下述形式的解:

$$\begin{aligned} \Phi_k(r, z) &= z_n(\alpha_k r) \Phi_k(z) \\ \varphi_k(r, z) &= z_n(\alpha_k r) \varphi_k(z) \\ \hat{\omega}_k(r, z) &= z_{n+1}(\alpha_k r) \hat{\omega}_k(z) \\ \check{\omega}_k(r, z) &= z_{n-1}(\alpha_k r) \check{\omega}_k(z) \\ \omega_k(r, z) &= z_n(\alpha_k r) \omega_k(z) \end{aligned} \quad (3.15)$$

式中 α_k 为常数, z_n 为 ν 阶圆柱函数:

$$z_n(\alpha_k r) = J_n(\alpha_k r) + \xi_k Y_n(\alpha_k r), \quad \nu = n-1, n, n+1 \quad (3.16)$$

ξ_k 为待定常数。

把(3.15)代入(3.6)式,不难解得:

$$\begin{aligned}
 \Phi_k(z) &= A_k \operatorname{ch}(\alpha_k z) \\
 \varphi_k(z) &= \frac{A_k}{2\alpha_k} z \operatorname{sh}(\alpha_k z) + B_k \operatorname{ch}(\alpha_k z) \\
 \omega_k(z) &= \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} A_k z \operatorname{sh}(\alpha_k z) + D_k \operatorname{ch}(\alpha_k z) \\
 \tilde{\omega}_k(z) &= -\frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} A_k z \operatorname{sh}(\alpha_k z) + E_k \operatorname{ch}(\alpha_k z) \\
 \omega_k(z) &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu} A_k z \operatorname{ch}(\alpha_k z) + C_k \operatorname{sh}(\alpha_k z)
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

式中 A_k, B_k, C_k, D_k 和 E_k 为待定常数.

由 $w_{i,i} = 0$, 诸常数须满足等式:

$$D_k - E_k + C_k - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{A_k}{\alpha_k} = 0 \quad (3.18)$$

同样地, 我们可根据势函数定出位移、应力等.

与情况 1 类似, 稍加分析后可见, 在 B_k, D_k 和 E_k 三者中仅存在二个独立常数, 所以, 不失一般性, 我们取 $E_k = 0$.

为了获得基本解, 我们还必须适当选择其余待定常数, 以满足 (2.1) 的第一、第二式及 (2.2)、(2.3) 式的第一式. 为此, 我们首先计算出应力分量 σ_{rr} 和 $\sigma_{\theta z}$.

把 (3.5)、(3.15)、(3.17) 及 (3.18) 式代入 (3.3) 式, 得:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_{rr}(r, \theta, z)}{2G \cos n\theta} &= z'_n(\alpha_k r) \left[\alpha_k \varphi'_k(z) + \frac{\alpha_k}{2} \omega_k(z) - \tilde{\omega}_k(z) \right] \\
 &\quad + \frac{\alpha_k}{2} z_{n-1}(\alpha_k r) \operatorname{sh}(\alpha_k z) D_k \\
 \frac{\sigma_{\theta z}(r, \theta, z)}{2G \sin n\theta} &= -\frac{n}{\alpha_k r} z_n(\alpha_k r) \left[\alpha_k \varphi'_k(z) + \frac{\alpha_k}{2} \omega_k(z) - \tilde{\omega}_k(z) \right] \\
 &\quad - \frac{\alpha_k}{2} z_{n-1}(\alpha_k r) \operatorname{sh}(\alpha_k z) D_k
 \end{aligned}$$

把上述表达式代入 (2.1) 的第一、第二式及 (2.2)、(2.3) 的第一式, 并利用 (3.18), 得:

$$D_k = 0 \quad (3.19)$$

$$J'_n(\alpha_k R_I) Y'_n(\alpha_k R_0) - J'_n(\alpha_k R_0) Y'_n(\alpha_k R_I) = 0 \quad (3.20)$$

$$\xi_k = -\frac{J'_n(\alpha_k R_0)}{Y'_n(\alpha_k R_0)} = -\frac{J'_n(\alpha_k R_I)}{Y'_n(\alpha_k R_I)} \quad (3.21)$$

$$\alpha_k^2 B_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_k h}{2(1-2\nu)} \operatorname{cth}(\alpha_k h) \right) A_k = 0 \quad (3.22)$$

由 (3.20)、(3.21) 可解出常数 α_k, ξ_k , 我们知道方程 (3.20) 具有无限多个正实根^[10].

把 (3.5)、(3.15)、(3.17)、(3.18) 及 (3.22) 代入 (3.1)、(3.3), 并令 $D_k = E_k = 0$, 得:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{rk}(r, \theta, z)}{\cos n\theta} &= A_k z'_n(\alpha_k r) \left[-\frac{z \operatorname{sh}(\alpha_k z)}{2(1-2\nu)} + \frac{1}{\alpha_k} \left(\frac{\alpha_k h \operatorname{cth}(\alpha_k h)}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch}(\alpha_k z) \right] \\
 &\quad \text{等等}
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

这样,我们获得了另一组含有待定常数 A_k 的基本解。

四、问题的解

本节中,我们把基本解相互叠加,以求边值问题之解。令

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sigma_{ijm}^{(1)} + \sum_k \sigma_{ijk}^{(2)} \quad (4.1)$$

这样构造的解,自然满足边界条件(2.1)的第一、第二式及(2.2)、(2.3)式的第一式,而其余五式则可以通过适当选取基本解中的待定常数得以满足。

把(4.1)式代入(2.1)、(2.2)、(2.3)式的剩余五式,得:

$$\sum_m \sigma_{zm}^{(1)}(r, \theta, h) + \sum_k \sigma_{zk}^{(2)}(r, \theta, h) = p(r) \cos n\theta \quad (4.2)$$

$$\sum_m \sigma_{rm}^{(1)}(R_I, \theta, z) + \sum_k \sigma_{rk}^{(2)}(R_I, \theta, z) = \sigma_{TI}(z) \cos n\theta \quad (4.3)$$

(4.2)式是含变量 r 的方程,而(4.3)等等则为含变量 z 的方程,将(4.2)、(4.3)等各按正交基 $\{z_n(\alpha_k r)\}$ 和 $\{\cos K_m z\}$ 展开,比较诸基前的系数,可获得一组线代数方程,求解此方程组,定出常数 $A_k, C_{4m}, D_{4m}, C_{5m}$ 及 D_{5m} ,则问题得解。

五、计算实例与讨论

设柱体端面自由,而侧面上的作用力沿母线均匀分布,当此柱体较长和较短时,问题分别化为平面应变和平面应力。

实例计算时,取 $N = 2, \nu = 0.3$, 首先,计算了 ρ 等于4和8时,方程

$$J'_n(\alpha)Y'_n(\alpha\rho) - J'_n(\alpha\rho)Y'_n(\alpha) = 0$$

的特征根,对柱体内外表面载荷,设 $\sigma_{rI}(z) = \sigma_{rO}(z) = 0, \sigma_{r0}(z) = \sigma_{r\theta_0}(z) = T$ 。计算表明:(4.2)~(4.6)中 m, k 指标各取 19, 20 项时,计算结果已能较好满足边界条件,说明了所取解系的完备性质。

对于不同的高度 h 值,计算了柱体中截面上的应力 σ_z , 结果见图 2, 3。

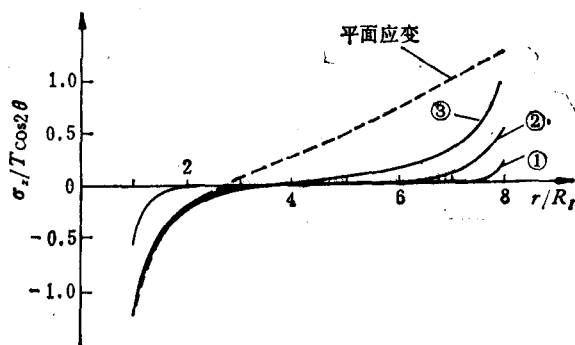


图2 $\sigma_{rI}(z) = \sigma_{rO}(z) = 0, \sigma_{r0}(z) = \sigma_{r\theta_0} = T$

图 2, 3 表明: 随着高度的增加或壁厚的变薄, 应力 σ_{zmax} 迅速地趋于平面应变状态下的 σ_z 值。但是, 因为应力 σ_z 沿环向呈 $\cos 2\theta$ 分布, 所以, 在一般情况下, 即柱高不太大或

壁厚不太薄时, 平面应力和平面应变间的差别程度沿环向是不同的, 例如, 在 θ 等于 0° 处, 二者间的差别程度最大, 而在 θ 等于 45° 处, 二者间的差别消失。这是非轴对称变形不同于轴对称变形之点。图4为柱体侧面上应力 σ_θ 的分布图。通过计算结果我们能够看到柱切面内之应力对厚度效应并不敏感。

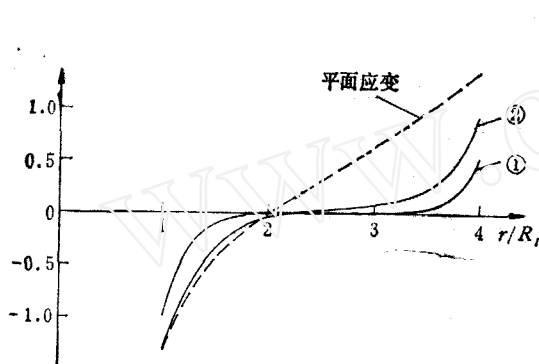


图3 $\sigma_{r1}(z) = \sigma_{\theta1}(z) = 0$, $\sigma_{r0}(z) = \sigma_{\theta0}(z) = T$

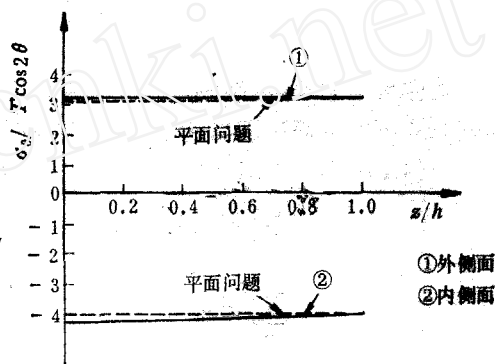


图4 $R_1/R_0 = 1/8$, $h/R_1 = 0.5$.

参 考 文 献

- [1] Pickett, G., J. Appl. Mech., 11(1944), A-176.
- [2] Prasad, S. N. et al., J. Elasticity, 7(1977), 225.
- [3] Benthem, J. P. et al., Int. J. Solids and Struct., 8(1972), 1027.
- [4] Green, A. E., Phil. Trans. Roy. Soc., Series A, 240(1948), 561.
- [5] Sternberg, E. et al., J. Appl. Mech., 16(1949), 27.
- [6] Fung, Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Printice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., (1965), 184.
- [7] Chia Shun Yih, Q. Appl. Math., 13(1956), 462.
- [8] Morris Kline, J. Math. Phys., 27(1948), 37.

ON 3-DIMENSIONAL NON-AXISYMMETRICAL DEFORMATION ANALYSIS FOR FINITE HOLLOW CIRCULAR CYLINDER

Ouyang Chang Xu Linlin
(Fudan University)

Abstract

In this paper non-axisymmetrical 3-dimensional deformation analysis for finite hollow circular cylinder has been discussed by Pickett' double series expansion method⁽¹⁾.