

无力矩非对称双自旋卫星的姿态运动

杨海兴

(上海交通大学)

摘要 本文从动量矩守恒定律出发, 导出以欧拉角及相对转动角为参变量的非对称双自旋卫星在无力矩状态下的一阶运动微分方程组, 并利用能量积分获得零马达力矩条件下的解析形式姿态运动规律。以此讨论了转子自转角速度接近零时一类卫星的姿态运动稳定性, 及其在消旋过程中通过不稳定区域时的非驻定姿态运动。文中顺便指出并纠正了文献[7]、[10]的错误之处。

双自旋卫星的一种初步近似模型是陀螺体。一九七〇年, Kane^[1]给出了带一个驱动转子的非轴对称陀螺体姿态运动的部分解, 一九八二年, Cochran 等^[10]利用欧拉方程及其首次积分给出两个欧拉角和相对转动角的解析积分。由于在一定条件下, 例如转子自转角速度接近零^[7]或等于相对转动角速度^{[5]、[4]、[8]}, 某些非对称双自旋卫星在消旋过程中会陷入“消旋被迫中止而章动角日益增大”的所谓“陷井状态”, 因此研究双自旋卫星的解析积分具有实际意义。本文避免使用传统的欧拉方程^[9], 直接从动量矩守恒定律出发导出以欧拉角及相对转动角为参变量的非对称双自旋卫星的一阶运动微分方程组, 并利用能量积分进而获得其解析积分。由一阶方程组可直接判断转子自转角速度接近零时一类双自旋卫星拟永久转动的稳定性, 给出不稳定区域的判据; 利用解析积分可讨论它在消旋过程中通过不稳定区域的非驻定姿态运动。分析表明, 为避免这类双自旋卫星陷入陷井, 除了采用足够大的驱动马达力矩或章动完全阻尾外, 还可采用小章动角时开启马达, 大章动角时关闭马达的控制方法, 使装有较小功率马达的卫星也能顺利消旋。分析中顺便指出并纠正了文献[7]、[10]的几处错误。

一、运动方程与首次积分常数

设双自旋卫星 S , 由刚体 A 、 B 以轴承联接组成 (图1)。 A 、 B 与 S 的质心 A^* 、 B^* 与 S^* 均在相对转动轴 X_1 上, A^* 、 B^* 相距为 r 。 A 为非对称转子, 其中心主轴坐标系为 $(A^*-X_1X_2X_3)$ 。 B 为轴对称平台, 对称轴沿 X_1 轴, 令固结于 B 的坐标系 $(B^*-X_1Y_2Y_3)$ 相对 $(B^*-X_1X_2X_3)$ 的转角为 α , 相对角速度 $\dot{\alpha} = \Omega$ 。设 A 、 B 与 S 的质量分别为 m_A 、 m_B 与 m , 相对各自中心主轴坐标系的惯量并矢 A 、 B 与 I 分别为

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i x_i x_i, \quad B = \sum_{i=1}^3 B_i x_i x_i, \quad I = \sum_{i=1}^3 I_i x_i x_i; \quad (1)$$

本文 1984 年 6 月 2 日收到。

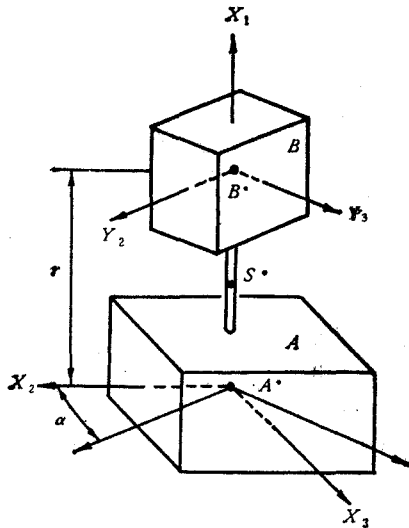


图 1 卫星模型

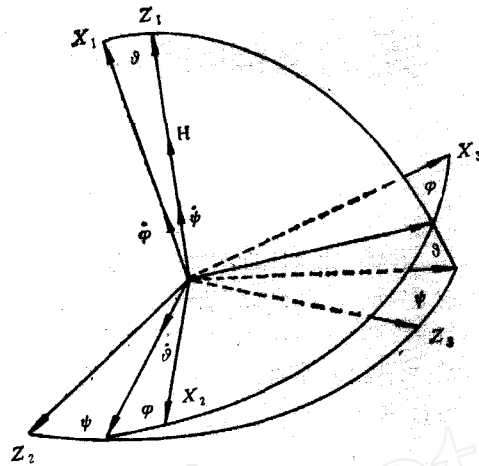


图 2

$$I_1 = A_1 + B_1, \quad I_i = A_i + B_i + r^2 m_A m_B / m_i \quad (i = 2, 3). \quad (2)$$

式(1)中 x_i 为 $X_i (i = 1, 2, 3)$ 轴上的单位矢量。

建立动量矩坐标系 $(S^* - Z_1 Z_2 Z_3)$, S 相对 S^* 的动量矩矢量 H 沿 Z_1 轴, S 的中心主轴坐标系 $(S^* - X_1 X_2 X_3)$ 相对 $(S^* - Z_1 Z_2 Z_3)$ 的角度坐标以欧拉角 ϕ , θ 与 φ 定义(图 2). S 处于无力矩状态, 动量矩守恒, 由图 2 可定义

$$H = Hc\theta x_1 + Hs\theta s\phi x_2 + Hs\theta c\phi x_3, \quad (3)$$

其中 H 为首次积分常数, s 与 c 为 $\sin$ 与 $\cos$ 的缩写符号. 根据动量矩的定义, H 又可写为

$$H = I \cdot \omega + B \cdot \Omega, \quad (4)$$

其中 Ω 及 ω 分别为 B 相对 A 及 A 的角速度矢量,

$$\Omega = \Omega x_1, \quad \omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i. \quad (5)$$

设 H_B 为 B 绕其质心 B^* 的动量矩矢量, 则有

$$H_B = B \cdot (\omega + \Omega). \quad (6)$$

列出 B 相对质心的动量矩定理

$$\dot{H}_B + \omega \times H_B = M x_1, \quad (7)$$

其中波浪号表示相对 $(B^* - X_1 X_2 X_3)$ 的局部导数, M 表示由 A 作用于 B 的马达力矩值(驱动力矩与摩擦力矩之和). 式(7)对 X_1 轴的投影式为

$$B_1(\dot{\omega}_1 + \dot{\Omega}) = M \quad (8)$$

若 $M = 0$, 取 Γ 为积分常数, 则有

$$\omega_1 + \Omega = \Gamma \quad (9)$$

说明在零马达力矩条件下, B 的动量矩沿 X_1 轴的分量守恒.

令 $\nu = H/I_3$, $\lambda = I_3/A_1$, $\rho = I_3/I_2$, $\mu = B_1/A_1$, 由式(3)与(4)恒等, 推得

$$\omega_1 = \lambda \nu c \vartheta - \mu \Gamma, \quad \omega_2 = \rho \nu s \vartheta s \varphi, \quad \omega_3 = \nu s \vartheta c \varphi \quad (10)$$

根据图 2 有

$$\dot{\vartheta} = \omega_2 c \varphi - \omega_3 s \varphi, \quad (11a)$$

$$\dot{\phi} = (\omega_2 s \varphi + \omega_3 c \varphi) / s \vartheta, \quad (11b)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1 - (\omega_2 s \varphi + \omega_3 c \varphi) \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (11c)$$

以式 (9)、(10) 代入 (11) 及 $\dot{\alpha} = \Omega$, 可得

$$\dot{\vartheta} = \nu(\rho - 1) s \vartheta s \varphi c \varphi, \quad (12a)$$

$$\dot{\phi} = \nu[1 + (\rho - 1) s^2 \varphi], \quad (12b)$$

$$\dot{\varphi} = \nu c \vartheta [\lambda - 1 - (\rho - 1) s^2 \varphi] - \mu \Gamma, \quad (12c)$$

$$\dot{\alpha} = (1 + \mu) \Gamma - \lambda \nu c \vartheta. \quad (12d)$$

以广义坐标 ϕ 、 ϑ 、 φ 、 α 为参变量的一阶微分方程组 (12) 确定无力矩非对称双自旋卫星 S 的姿态运动。

除了式 (3) 的 H 及式 (9) 的 Γ 两个积分常数外, 在零马达力矩条件下, 系统能量守恒, 动能为常值

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{const.} \quad (13)$$

由此可推出第三个积分常数 σ

$$\sigma = \frac{2\Gamma - B_1 \Gamma^2}{I_3 \nu^2} = \frac{A_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2}{I_3 \nu^2} \quad (14)$$

以式 (10) 代入, 令 $\Gamma/\nu = k$, 推得

$$\sigma = (\lambda c \vartheta - \mu k)^2 / \lambda + s^2 \vartheta [1 + (\rho - 1) s^2 \varphi]. \quad (15)$$

由上式可将 $1 + (\rho - 1) s^2 \varphi$ 及 $s^4 \vartheta (\rho - 1)^2 s^2 \varphi c^2 \varphi$ 表示为 $c \vartheta$ 的函数

$$1 + (\rho - 1) s^2 \varphi = \lambda + \frac{\sigma - (\lambda - \mu k)^2 / \lambda}{2(1 - c \vartheta)} + \frac{\sigma - (\lambda + \mu k)^2 / \lambda}{2(1 + c \vartheta)} \quad (16)$$

$$s^4 \vartheta (\rho - 1)^2 s^2 \varphi c^2 \varphi = -(\lambda - 1)(\lambda - \rho) f_1(c \vartheta) f_2(c \vartheta) \quad (17)$$

式 (17) 中

$$f_1(c \vartheta) = c^2 \vartheta - 2\mu k c \vartheta / (\lambda - 1) + (1 + \mu^2 k^2 / \lambda - \sigma) / (\lambda - 1) \quad (18a)$$

$$f_2(c \vartheta) = c^2 \vartheta - 2\mu k c \vartheta / (\lambda - \rho) + (\rho + \mu^2 k^2 / \lambda - \sigma) / (\lambda - \rho) \quad (18b)$$

二、方程的解析积分

令 $x = c \vartheta$, 利用式 (17), 可将方程 (12a) 化为

$$\dot{x}^2 = -\nu^2 (\lambda - 1)(\lambda - \rho) f_1(x) f_2(x). \quad (19)$$

我们只讨论 $A_1 > I_2 > I_3$ 与 $A_1 < I_2 < I_3$ 两类卫星, 则恒有

$$(\lambda - 1)(\lambda - \rho) > 0, \quad (1 - \lambda)(1 - \rho) > 0, \quad (\rho - \lambda)(\rho - 1) < 0 \quad (20)$$

由式 (18) 可解得 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的零根分别为

$$x_{1,2} = (\mu k \pm \sqrt{\Delta_1}) / (\lambda - 1) \quad x_{3,4} = (\mu k \pm \sqrt{\Delta_2}) / (\lambda - \rho) \quad (21)$$

利用式 (15) 可将 Δ_1 与 Δ_2 表示为

$$\Delta_1 = [(\lambda - 1)c\vartheta - \mu k]^2 + (1 - \lambda)(1 - \rho)s^2\vartheta s^2\varphi, \quad (22a)$$

$$\Delta_2 = [(\lambda - \rho)c\vartheta - \mu k]^2 + (\rho - \lambda)(\rho - 1)s^2\vartheta c^2\varphi \quad (22b)$$

由式(20)、(22)可知,恒有 $\Delta_1 \geq 0$, 而 Δ_2 不能保证不小于零,因此 x^2 可能有四个实根,也可能有二个实根和二复根。

四个实根情形^[5]

设 x^2 的四个实零根按大小顺序排列为 $a > b > c > d$, 则式(19)可改写为

$$dx/\sqrt{-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = v\sqrt{(\lambda-1)(\lambda-\rho)}dt \quad (23)$$

令

$$\frac{x-b}{x-c} = \frac{a-b}{a-c} y^2 (a \geq x \geq b) \quad \frac{x-d}{x-a} = \frac{c-d}{c-a} y^2 (c \geq x \geq d) \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} \tau &= (v/2)[(\lambda-1)(\lambda-\rho)(a-c)(b-d)]^{1/2}, \\ \kappa &= [(a-b)(c-d)/(a-c)(b-d)]^{1/2} \end{aligned} \quad (24b)$$

代入式(23),可推得

$$dy/\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa^2 y^2)} = \tau dt \quad (25)$$

因此 y 为模为 κ 的雅可比椭圆函数

$$y = \operatorname{sn} u, \quad u = \tau(t - t_0) \quad (26)$$

其中 t_0 为初始时刻。由式(24a)可求得

$$x = (D_1 + D_2 \operatorname{sn}^2 u)/(D_3 + D_4 \operatorname{sn}^2 u) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} a \geq x \geq b \text{ 时, } & D_1 = b(a-c), D_2 = -c(a-c) \\ & D_3 = a-c, D_4 = -(a-b) \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} c \geq x \geq d \text{ 时, } & D_1 = d(a-c), D_2 = a(c-d) \\ & D_3 = a-c, D_4 = c-d. \end{aligned} \quad (28b)$$

顺便指出,文献[10]给出 $a \geq x \geq b$ 时的 $D_i (i=1, \dots, 4)$ 有误。

两个实根、两个复根情形^[2]

由式(22b)容易看出,这种情形对应于大章动角运动。设两个实根 $a > b$, 两个复根 $c, \bar{c} = \xi \pm i\eta$, 则式(19)可改写为

$$dx/\sqrt{-(x-a)(x-b)[(x-\xi)^2 + \eta^2]} = v\sqrt{(\lambda-1)(\lambda-\rho)}dt \quad (29)$$

令

$$\frac{x-a}{x-b} = -\frac{Q(1+y)}{R(1-y)}, \quad Q = [(a-\xi^2) + \eta^2]^{1/2}, \quad R = [(b-\xi)^2 + \eta^2]^{1/2} \quad (30)$$

代入式(29),得

$$\begin{aligned} dy/\sqrt{(1-y^2)\{[(Q+R)^2 - (a-b)^2] + [(a-b)^2 - (Q-R)^2]y^2\}} \\ = -v\sqrt{(\lambda-1)(\lambda-\rho)}dt \end{aligned} \quad (31)$$

对下列两种情况,分别可推得

(1) $(a-b)^2 \geq (Q-R)^2$ 时

$$y = \operatorname{cn} u, \quad x = (E_1 + E_2 \operatorname{cn} u)/(E_3 + E_4 \operatorname{cn} u), \quad u = \tau(t - t_0) \quad (32a)$$

$$\begin{aligned}\tau &= -v[(\lambda-1)(\lambda-\rho)QR]^{1/2}, \\ \kappa &= \{[(a-b)^2 - (Q-R)^2]/(4QR)\}^{1/2}\end{aligned}\quad (32b)$$

(2) $(a-b)^2 < (Q-R)^2$ 时,

$$y = \operatorname{sn} u, \quad x = (E_1 + E_2 \operatorname{sn} u)/(E_3 + E_4 \operatorname{sn} u), \quad u = \tau(t - t_0) \quad (33a)$$

$$\begin{aligned}\tau &= -(v/2)\{(\lambda-1)(\lambda-\rho)[(Q+R)^2 - (a-b)^2]\}^{1/2} \\ \kappa &= \{[(Q-R)^2 - (a-b)^2]/[(Q+R)^2 - (a-b)^2]\}^{1/2}\end{aligned}\quad (33b)$$

其中 t_0 为初始时刻, $E_i (i=1, \dots, 4)$ 定义如下:

$$E_1 = aQ + bQ \quad E_2 = bQ - aR \quad E_3 = Q + R \quad E_4 = Q - R \quad (34)$$

文献 [10] 没有考虑第二种情况, 显然是不完整的. 在下文讨论卫星通过不稳定区域的非驻定姿态运动进行数值计算时, 我们发现需要计算的恰恰是第二种情况, 因此文献 [10] 的这种忽略是错误的. 至于重根, 可以认为是上述两种情形的特例, 不必另予讨论.

式 (27)、(32a)、(33a) 给出了不同情形下 $c\theta$ 的解析积分, 由此容易得到 ψ 、 φ 与 α 的解析积分. 下面以四个实根情形为例说明这一点. 将式 (17) 分别代入方程 (12b) 与 (12c), 可得

$$\dot{\psi} = v \left[\lambda + \frac{\sigma - (\lambda - \mu k)^2 / \lambda}{2(1-x)} + \frac{\sigma - (\lambda + \mu k)^2 / \lambda}{2(1+x)} \right] \quad (35a)$$

$$\dot{\varphi} = v \left[\mu k - \frac{\sigma - (\lambda - \mu k)^2 / \lambda}{2(1-x)} + \frac{\sigma - (\lambda + \mu k)^2 / \lambda}{2(1+x)} \right] \quad (35b)$$

将式 (27) 分别代入上二式及式 (12d), 并引入以下参数

$$\begin{aligned}p_0 &= \lambda v \quad p_1 = \mu v k \quad p_2 = [\sigma - (\lambda + \mu k)^2] / 2 \quad p_3 = [\sigma - (\lambda - \mu k)^2] / 2 \\ p_4 &= D_4 / (D_4 + D_2) \quad p_5 = (D_3 D_2 - D_4 D_1) / (D_3 + D_1)(D_4 + D_2) \\ p_6 &= D_4 / (D_4 - D_2) \quad p_7 = (D_3 D_2 - D_4 D_1) / (D_3 - D_1)(D_4 - D_1) \\ a_0 &= (p_0 + p_2 p_4 + p_3 p_6) / \tau \quad a_1 = -p_3 p_7 / \tau \quad a_2 = p_2 p_5 / \tau \\ b_0 &= (p_1 + p_2 p_4 - p_3 p_6) / \tau \quad b_1 = -a_1 \quad b_2 = a_2 \\ c_0 &= [(1 + \mu) \Gamma - \lambda v D_2 / D_4] / \tau, \quad c_1 = \lambda v (D_3 D_2 - D_4 D_1) / (D_4 D_1 \tau) \\ \beta_1 &= (D_4 - D_2) / (D_3 - D_1) \quad \beta_2 = (D_4 + D_2) / (D_3 + D_1) \quad \beta_3 = D_4 / D_3\end{aligned}\quad (36)$$

积分后, 可推得

$$\psi = a_0(u - u_0) + a_1 \int_{u_0}^u \frac{du}{1 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 u} + a_2 \int_{u_0}^u \frac{du}{1 + \beta_2 \operatorname{sn}^2 u} + \psi_0 \quad (37a)$$

$$\varphi = b_0(u - u_0) + b_1 \int_{u_0}^u \frac{du}{1 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 u} + b_2 \int_{u_0}^u \frac{du}{1 + \beta_2 \operatorname{sn}^2 u} + \varphi_0 \quad (37b)$$

$$\alpha = c_0(u - u_0) + c_1 \int_{u_0}^u \frac{du}{1 + \beta_3 \operatorname{sn}^2 u} + \alpha_0 \quad (37c)$$

其中 ψ_0 、 φ_0 与 α_0 为初始值. 显见, 上述欧拉角 ψ 、 φ 与相对转动角 α 的解析积分式中均含有勒让德第三类椭圆积分^[3]. 积分 (37) 的推导由于直接应用一阶微分方程组 (11), 比文献 [10] 要简捷与明了. 同理可推得两个实根、两个复根情形的 ψ 、 φ 与 α 的解析积分表达式, 这里不再赘述.

三、自转角速度趋近零时的卫星姿态稳定性

在一般情形下, 方程组 (11) 各式等号右边参变量 φ 为快变量, ϑ 为慢变量. 方程组 (11) 对每一 $\pi/\dot{\varphi}$ 周期作平均化处理, 处理后的参变量加一划表示, 可得

$$\dot{\bar{\vartheta}} = 0 \quad \bar{\vartheta} = \vartheta_0 \quad (38a)$$

$$\dot{\bar{\phi}} = \nu(\rho + 1)/2 \quad (38b)$$

$$\dot{\bar{\phi}} = \nu c \vartheta_0 [\lambda - (\rho + 1)/2] - \mu \Gamma \quad (38c)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = (1 + \mu)\Gamma - \lambda \nu c \vartheta_0. \quad (38d)$$

显见, $\bar{\vartheta}$ 、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\phi}$ 与 $\bar{\alpha}$ 均为常值, 式 (38) 是方程组 (12) 的一个稳态解, 说明双自旋卫星 S 在作拟规则进动, 当 $\vartheta_0 = 0$ 时, S 绕 X_1 轴作拟永久转动. 此时, 由式 (10a) 可得 $\bar{\omega}_1$ 亦为常值,

$$\bar{\omega}_1 = \lambda \nu c \vartheta_0 - \mu \Gamma \quad (39)$$

当自转角速度 $\dot{\phi}$ 趋近零时, 即文献 [7] 式 (6) 情形, 上述拟规则进动或拟永久转动可能不稳定. 将式 (10) 式 ω_1 代入 (12c), 得

$$\dot{\phi} = -(\omega_1 + \mu \Gamma) \left[\left(\frac{\rho + 1}{2\lambda} - \frac{1}{1 + \mu \Gamma / \omega_1} \right) - \left(\frac{\rho - 1}{2\lambda} \right) c \lambda \varphi \right] \quad (40)$$

根据平均化处理的要求, 显然 $\dot{\phi}$ 不能等于零, 必须满足 $|\dot{\phi}| > 0$, 由此推得稳定性条件

$$\left(\frac{\rho + 1}{2\lambda} - \frac{1}{1 + \mu \Gamma / \omega_1} \right)^2 > \left(\frac{\rho - 1}{2\lambda} \right)^2 \quad (41)$$

判据 (41) 与文献 [7] 判据 (19) 经过变换, 都可化为如下判据:

$$\Gamma / \omega_1 > \max(F_1, F_2) \quad \text{或} \quad \Gamma / \omega_1 < \min(F_1, F_2) \\ F_1 = (I_3 - A_1)/B_1 \quad F_2 = (I_2 - A_1)/B_1 \quad (42)$$

但与文献 [7] 相比, 本文推导较为简捷, 物理意义较为明显.

为了深入研究由于 A 的不对称性而引起的卫星姿态不稳定性, 可直接应用首次积分式 (15). 积分常数 σ 可由 ω_1 、 Γ 、 ϑ 与 φ 的初始值 ω_{10} 、 Γ_0 、 ϑ_0 与 φ_0 确定如下

$$\sigma = \omega_{10}^2 / \lambda \nu^2 + S^2 \vartheta_0 [1 + (\rho - 1) S^2 \varphi_0] \quad \nu = (\omega_{10} + \mu \Gamma_0) / \lambda c \vartheta_0 \quad (43)$$

取实际非对称双自旋卫星的参数如下:

$$I_1 = 480 \text{ kgm}^2 \quad I_2 = 360 \text{ kgm}^2 \quad I_3 = 440 \text{ kgm}^2 \quad B_1 = 160 \text{ kgm}^2 \\ \vartheta_0 = 0.5 \text{ deg} \quad \varphi_0 = 0 \quad \Gamma_0 = 1.0 \text{ rad/s} \quad (44)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \omega_{10} = 1.0 \text{ rad/s} \\ (2) \omega_{10} = 4.5 \text{ rad/s} \end{array} \right\} \text{ 稳定情形} \quad \left. \begin{array}{l} (3) \omega_{10} = 1.5 \text{ rad/s} \\ (4) \omega_{10} = 2.0 \text{ rad/s} \\ (5) \omega_{10} = 3.0 \text{ rad/s} \end{array} \right\} \text{ 不稳定情形}$$

除 ϑ_0 外上述参数与文献 [7] 所给参数相同. 根据积分式 (15), 可以画出参数 (44) 卫星章动角 ϑ 随 φ 的变化曲线 (见图 3).

图 3 表明, 当章动角有小的初始扰动值 ϑ_0 时, 对于稳定情形, 章动角 ϑ 在小范围内变动; 对于不稳定情形, 随着 φ 的变化, 章动角 ϑ 会变得很大. 与文献 [7] 图 2 中的 R 与 θ 相比较, 本文图 3 的章动角 ϑ 与自转角 φ 的物理含义要明确得多. 由比较还可看到, 文献 [7] 图 2 的曲线 (5) 性态有错误, 原因在于推出该曲线的积分式 (27) 错了 [错误的产生是因

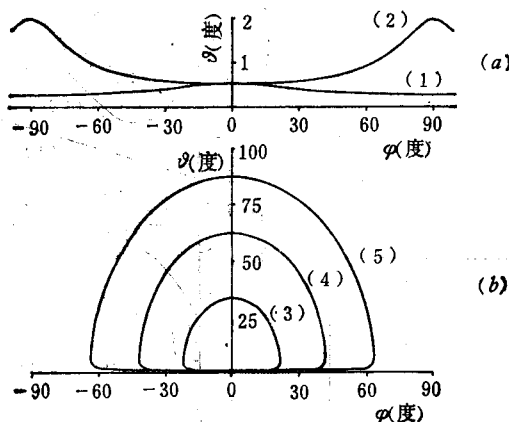


图 3 卫星姿态稳定性

为由式 (14b) 推出式 (24) 时错将 I_{A_3} 改为 I 的缘故].

四、通过不稳定区域的非驻定姿态运动

下面我们研究双自旋卫星 S 在消旋过程中通过不稳定区域的非驻定姿态运动. 设 M 为常值, 令 $M/B_1 = -\gamma$. 消旋时, $\gamma > 0$. 由式 (8)、(9) 可得

$$\dot{\Gamma} = \Gamma_0 - \gamma t \quad (45)$$

其中 Γ_0 为初始值. 上式代入方程组 (12), 得

$$\dot{\theta} = \nu(\rho - 1)s\theta s\varphi c\varphi \quad (46a)$$

$$\dot{\phi} = \nu[1 + (\rho - 1)s^2\varphi] \quad (46b)$$

$$\dot{\varphi} = \nu c\theta[\lambda - 1 - (\rho - 1)s^2\varphi] - \mu\Gamma_0 + \mu\gamma t \quad (46c)$$

$$\dot{\alpha} = (1 + \mu)\Gamma_0 - \lambda\nu c\theta_0 - (1 + \mu)\gamma t \quad (46d)$$

上述方程组是一个显含 t 的非定常运动微分方程组. 由于相应的定常方程组 (12) 已有解析积分, 并且 γ 一般来说是一个小值, 因此可用迭代法计算方程组 (46) 的解. 只要时间步长取得足够小, 就可以得到满意的精度.

以式 (45) 代入式 (10) ω_1 , 得

$$\omega_1 = \lambda\nu c\theta - \mu\Gamma_0 + \mu\gamma t \quad (47)$$

上式两边对时间微分并利用式 (46a), 可推得

$$\dot{\omega}_1 = \mu\gamma - \lambda(\rho - 1)\nu^2 s^2\theta s2\varphi/2 \quad (48)$$

只要

$$\gamma > \lambda(\rho - 1)\nu^2 s^2\theta/2\mu \quad (49)$$

就能保证物体 A 角速度分量 ω_1 的持续增长, 从而避免陷井状态, 使消旋顺利进行. 为满足式 (49), 可使用功率大的力矩马达(取较大的 γ), 或者在消旋运转一开始, 章动完全阻尼(保持 θ 为小值), 否则就会陷入陷井状态. 为说明这一点, 根据参数 (44) 和方程组 (12) 的解析积分分别给出图 4 与图 5 的曲线.

图 4 给出 Γ/ω_1 由 0.9 到 0.1 变化时, 章动角 θ 的变化范围, 见阴影部分. 可以清楚地看到全图分为三个区域, 用虚线隔开, 两条虚线恰好是稳定性判据的临界线. I 是稳定区

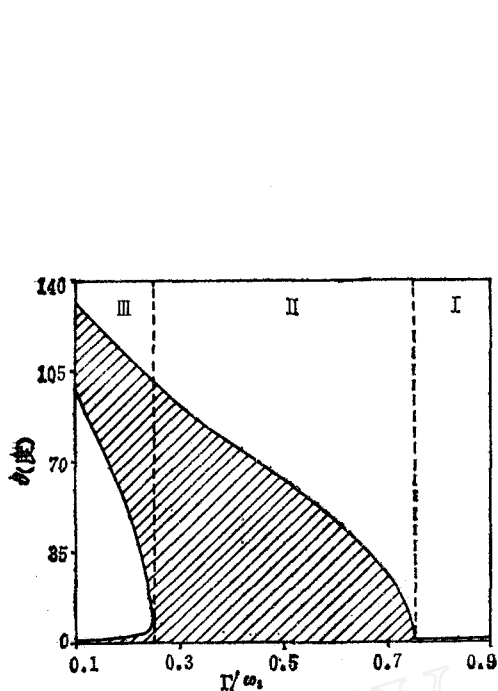


图 4 章动角变化范围

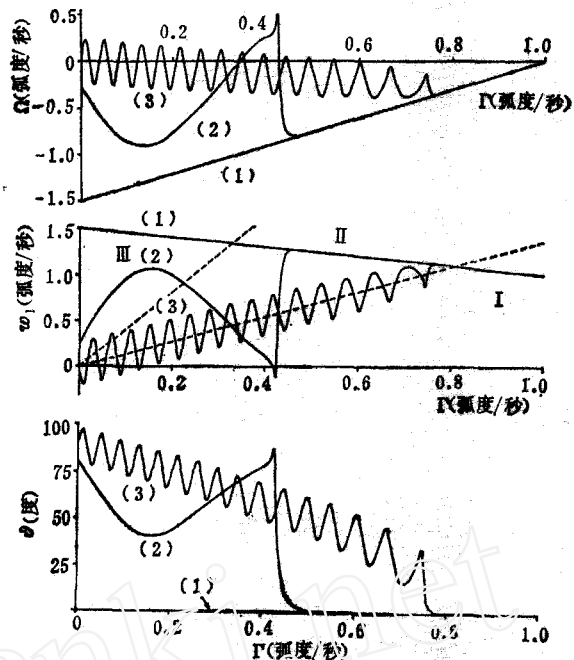


图 5 卫星通过不稳定区域的非驻定姿态运动

域, II 是不稳定区域, 由 II 进入 III 发生分叉, 下部是稳定区域, 上部是不稳定区域。

图 5 应用迭代法以及椭圆函数的级数表达式与倍角公式^[6], 给出双自旋卫星通过不稳定区域的非驻定姿态运动曲线, 与文献[7]采用的 WKB 法相比, 利用本文解析积分给出曲线较为简捷, 并从某种意义上可认为该曲线是精确解。曲线分三种情形。(1) $\gamma = 0.2 \text{ rad/s}^2$, (2) $\gamma = 0.02 \text{ rad/s}^2$, (3) $\gamma = 0.002 \text{ rad/s}^2$ 。设初始状态为 $\Gamma_0 = \omega_{10} = 1.0 \text{ rad/s}$, 此时卫星处于稳定区域 I, 章动角是小值。随着时间的增长, Γ 逐渐减小, 卫星将进入不稳定区域 II。对于马达力矩较大的情形(1), 章动角保持小值, ω_1 与 $-\dot{\alpha}$ 线性增大; 对于马达力矩较小的情形(2)(3), 章动角逐渐增大, ω_1 与 $-\dot{\alpha}$ 逐渐减小, 并伴随振荡, 马达力矩越小, 振荡越厉害, 其中 ω_1 沿区域 I、II 的分界线振荡[见图 5(b)], 卫星陷入陷井状态。 Γ 进一步减小, 卫星将到达区域 III。对于情形(1), 卫星进入下部稳定区域, 消旋成功; 对于情形(2)(3), 卫星进入上部不稳定区域, 消旋失败。

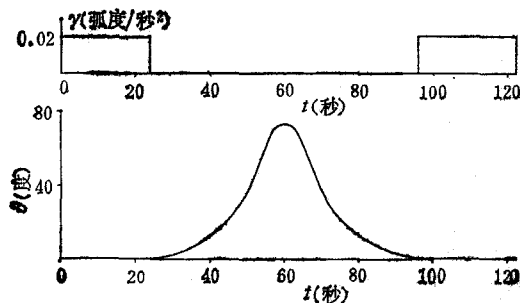


图 6 控制马达避免陷井状态

在力矩马达功率较小,而章动又不能完全阻尼的条件下,还有一种避免陷井状态的方法.从图3(b)可以看出,当卫星在不稳定区域II时,章动角 θ 有时处于小值范围,有时处于大值范围.我们可以在章动角取小值时,开启力矩马达,章动角取大值时,关闭力矩马达,从而避免陷入陷井状态.图6就是根据这一方法而给出的通过不稳定区域的非驻定姿态运动曲线(此时 $\gamma = 0.02\text{rad/s}^2$),当章动角大于1度时关闭马达,此时 t 约为24秒,待章动角小于1度时再开启马达,此时 t 约为96秒,然后直至消旋成功,此时 t 约122秒.这一方法与文献[3]的带小功率消旋马达的 $A_1 > I_2 > I_3$ 双自旋卫星(此时平台B相对转动轴不平衡)消旋时避免自转角速度等于相对转动角速度的响应陷井所采用的关闭马达的方法是类同的.

参 考 文 献

- [1] Kane, T. R., *AIAA, J.*, 8, 6(1970), 1141—1143.
- [2] Byrd, P. F. and Friedman, M. D., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd Rev. Ed., Springer-Verlag, New York, (1971).
- [3] Scher, M. P. and Farrenkopf, R. L., *AIAA, J.*, 12, 12(1974), 1721—1725.
- [4] Cochran, J. E., *J. Spacecraft*, 14, 9(1977), 562—572.
- [5] 王竹溪,郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社(1979).
- [6] 王连祥,方德植等,数学手册,人民教育出版社(1979).
- [7] Kazuo Tsuchiya, *J. Guidance*, 2, 4(1979), 323—333.
- [8] Adams, G. J., *J. Guidance*, 3, 1(1980), 29—36.
- [9] 刘延柱,上海力学,2, 3(1981), 52—55.
- [10] Cochran, J. E., Shu, P. H. and Rew, S. D., *J. Guidance*, 5, 1(1982), 37—42.

ATTITUDE MOTION OF TORQUE-FREE ASYMMETRIC DUAL-SPIN SPACECRAFT

Yang Haixing

(Shanghai Jiao-Tong University)

Abstract

The attitude motion of a torque-free asymmetric dualspin spacecraft is discussed. 1-st order differential equations with variables, the Eulerian angles and the angle of relative rotation, are derived from the law of conservation of angular momentum. An exact analytical solution for the attitude motion without external torque is obtained with the aid of the energy integral of the system. The nutational stability of a dual-spin spacecraft is calculated when the Spin angular speed of the rotor comes near zero. The nonstationary attitude motion of the dual-spin spacecraft through the unstable region is discussed by the analytical solution in the process of despinning the platform. Some mistakes in the literature are pointed out and corrected.