

解任意形状扁轴对称体 Stokes 流动的奇点环形分布法

吴望一 朱敏

(北京大学力学系)

本文发展了文献[1]中提出的思想,采用奇点环形分布法解决任意形状扁轴对称体的 Stokes 流动问题,并且得到了和长轴对称体相类似的好结果.

考虑一速度为 u 的均匀来流绕过一任意形状扁轴对称体的蠕动流. 取直角坐标 $oxyz$ 及柱坐标系 r, θ, z . 使 z 轴与物体的对称轴重合(参看图1). 显然,这是一个轴对称流动. 习惯上只须考虑 $\theta = 0$ 的 Roz 平面上的流动即可. 取 $L, u, \frac{\mu u}{L}, uL^2$ 为长度,速度,压力和流函数的特征参考量,其中 L 是物体的特征长度, μ 是流体动力学粘性系数.

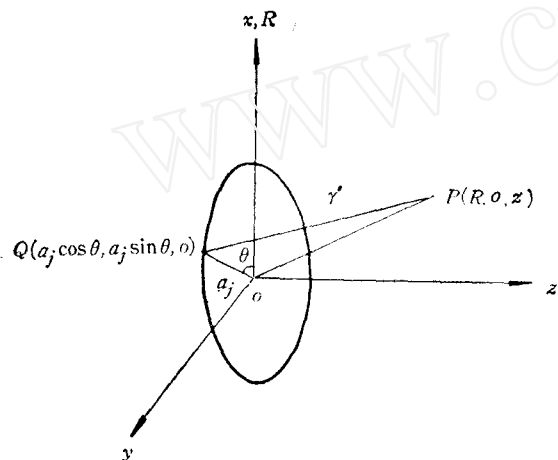


图 1

设物体相对于 $z = 0$ 这个平面而言是前后对称的. 我们在对称面上取一以原点为中心, 半径为 OA 的圆盘 S . 半径 OA 的选取原则是: 设物体与平面 $z = 0$ 的交线为 C , 若物体在 C 处是钝的, 则取物体在 C 处的曲率中心为 A 点, 若物体在 C 处是尖的, 则取 C 与 OR 轴的交点为 A 点. 在圆盘 S 上选取 M 个不同的圆环, 其坐标为 $(a_j, \theta, 0), j = 1, \dots, M, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. 在它们上面放置 Sampson 球形奇点, 同一圆环上奇点的强度相同, 这

M 个奇点环所感生的流场在迭加了均匀来流之后它的无量纲速度和压力的表达式为

$$v_z = 1 + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{nj} \int_0^{2\pi} a_j F_n^{(1)}(R_j, z) d\theta + D_{nj} \int_0^{2\pi} a_j F_n^{(2)}(R_j, z) d\theta \right]$$

$$v_R = \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{nj} \int_0^{2\pi} a_j \frac{R - a_j \cos \theta}{R_j} F_n^{(5)}(R_j, z) d\theta \right. \\ \left. + D_{nj} \int_0^{2\pi} a_j \frac{R - a_j \cos \theta}{R_j} F_n^{(6)}(R_j, z) d\theta \right]$$

本文于1983年11月8日收到.

$$p = p_{\infty} + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} D_{nj} \frac{4n-6}{n} \int_0^{2\pi} a_j F_{n-1}^{(1)}(R_j, z) d\theta \quad (1)$$

其中函数 $F_n^{(1)}, F_n^{(2)}, F_n^{(5)}, F_n^{(6)}$ 的表达式为:

$$\begin{aligned} F_n^{(1)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}} P_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\ F_n^{(2)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \left\{ P_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2J_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \right\} \\ F_n^{(5)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\ F_n^{(6)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\ &\quad - 2z(R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} J_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

P_n, J_n 分别为 n 阶 Legendre 多项式和 Gegenbauer 多项式.

$$R_j = (R^2 + a_j^2 - 2R a_j \cos \varphi)^{1/2},$$

C_{nj}, D_{nj} 是待定系数, p_{∞} 为无穷远处压力. 因(1)式中的积分难于积成封闭形式, 我们进一步对奇点环采取两种不同的简化处理.

(1) 离散法

在圆环的 K 个等分点上放置离散的等强度的 Sampson 奇点, 用以代替奇点环. (1) 式简化为

$$\begin{aligned} v_z &= 1 + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^k F_n^{(1)}(R_j, z) + D_{nj} \sum_{i=1}^k F_n^{(2)}(R_j, z) \right] \\ v_R &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^k \frac{R - a_j \cos \frac{2\pi i}{k}}{R_j} F_n^{(5)}(R_j, z) \right. \\ &\quad \left. + D_{nj} \sum_{i=1}^k \frac{R - a_j \cos \frac{2\pi i}{k}}{R_j} F_n^{(6)}(R_j, z) \right] \\ p &= p_{\infty} + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} D_{nj} \frac{4n-6}{n} \sum_{i=1}^k F_{n-1}^{(1)}(R_j, z) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$R_j = \left(R^2 + a_j^2 - 2R a_j \cos \frac{2\pi i}{k} \right)^{1/2}$$

(2) 数值积分法

我们用辛普生公式对(1)式进行数值积分得到

$$\begin{aligned}
 v_z &= 1 + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} a_j w(i) F_n^{(1)}(R_{ij}, z) \right. \\
 &\quad \left. + D_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} a_j w(i) F_n^{(2)}(R_{ij}, z) \right] \\
 v_R &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{R - a_j \cos \frac{2\pi i}{k_1}}{R_{ij}} a_j w(i) F_n^{(5)}(R_{ij}, z) \right. \\
 &\quad \left. + D_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{R - a_j \cos \frac{2\pi i}{k_1}}{R_{ij}} a_j w(i) F_n^{(6)}(R_{ij}, z) \right] \\
 p &= p_{\infty} + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} D_{nj} \frac{4n-6}{n} \sum_{i=1}^{k_1} a_j w(i) F_{n-1}^{(1)}(R_{ij}, z)
 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 k_1 表示对 $2\pi k_1$ 等分,

$$w(2m) = \frac{2\pi}{3k_1}, \quad w(2m+1) = \frac{4\pi}{3k_1}, \quad m = 0, \dots, l, \quad 2l = k_1.$$

将(3),(4)式中的无穷级数在 $N+1$ 项处截断. 在物面上取 MN 个配置点. 在这些点上令(3),(4)的截断式满足无滑移条件, 分别得到下列 $2MN$ 阶线性代数方程组:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^k \bar{F}_n^{(1)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) + D_{nj} \sum_{i=1}^k \bar{F}_n^{(2)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) \right] &= -1 \\
 \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^k \frac{\bar{R} - a_j \cos \frac{2\pi i}{k}}{\bar{R}_{ij}} \bar{F}_n^{(5)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) \right. \\
 &\quad \left. + D_{nj} \sum_{i=1}^k \frac{\bar{R} - a_j \cos \frac{2\pi i}{k}}{\bar{R}_{ij}} \bar{F}_n^{(6)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) \right] = 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

及

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} a_j w(i) F_n^{(1)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) + D_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} a_j w(i) F_n^{(2)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) \right] &= -1 \\
 \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \left[C_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\bar{R} - a_j \cos \frac{2\pi i}{k_1}}{\bar{R}_{ij}} a_j w(i) F_n^{(5)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) \right. \\
 &\quad \left. + D_{nj} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\bar{R} - a_j \cos \frac{2\pi i}{k_1}}{\bar{R}_{ij}} a_j w(i) F_n^{(6)}(\bar{R}_{ij}, \bar{z}) \right] = 0
 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\bar{R}, \bar{z}$ 是各配置点的坐标.

求得未知数 C_{nj}, D_{nj} 后代入(3),(4)式的截断式, 即可得出速度和压力的近似表达式.

阻力系数可分别由下列两式给出

$$\lambda = \frac{k \sum_{j=1}^M D_{2j}}{1.5\mu L} \quad (\text{离散法}) \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{2\pi \sum_{j=1}^M a_j D_{2j}}{1.5\mu L} \quad (\text{数值积分法}) \quad (8)$$

首先,我们计算了有精确解的扁球的 Stokes 流动,以检验方法的收敛性,有效范围及

表 1 扁球的阻力系数

N	MN	a/b = 0.9	a/b = 0.8	a/b = 0.7	a/b = 0.6	a/b = 0.5	a/b = 0.4
离 散 法							
M = 3							
2	6	0.97983	0.95843	0.93543	0.91228		
4	12	0.98013	0.96058	0.94157	0.92589		
6	18	0.98013	0.96058	0.94157	0.92433		
8	24			0.94157	0.92297		
M = 5							
2	10	0.98017	0.96058	0.94190	0.92298	0.90417	
4	20	0.98013	0.96058	0.94147	0.92301	0.90300	
6	15	0.98013	0.96058	0.94147	0.92297	0.90536	
8	20				0.92297	0.90532	
10	25					0.90532	
数值积分法							
M = 3							
4	12	0.98013	0.96058	0.94146	0.92432		
6	18	0.98013	0.96058	0.94147	0.92243		
8	24		0.96058	0.94147	0.92296		
10	30			0.94147	0.92297		
12	36				0.92297		
M = 5							
2	10	0.98013	0.96058	0.94147	0.92297	0.90533	
4	20	0.98013	0.96058	0.94147	0.92297	0.90533	
6	30				0.92297	0.90531	
8	40					0.90531	
M = 9							
2	18	0.98013	0.96058	0.94147	0.92298	0.90534	0.88960
4	36	0.98013	0.96058	0.94147	0.92297	0.90534	0.88910
6	54				0.92297	0.90531	0.88909
8	72					0.90531	0.88880
10	90						0.88880
准确解		0.98013	0.96058	0.94147	0.92297	0.90531	0.88881

精度,然后,作为一般算例,我们计算了卡西尼卵形体的绕流问题。

设扁球和卡西尼卵形体的极坐标方程分别为

$$z = a \cos \phi, R = b \sin \phi$$

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\phi + \sqrt{d^4 - c^4 \sin^2 2\phi} \quad (d > c > 0)$$

其中 a, b 分别为短轴和长轴, ϕ 为极角; ρ, ϕ 是极坐标系中的矢径和极角, c 是焦距, 取 $oA = c$ 。采用等分原则分布奇点环。物面上配置点的选取采用与文[1]中相同的极角等分原则,为了避免系数矩阵出现奇异,我们用 $\phi = \frac{\pi}{2} \pm \delta$, $\phi = \delta$, $\pi - \delta$ 代替 $\phi = \pi/2$ 及 $\phi = 0, \pi$ 。这里取 $\delta = 0.01^\circ$ 。

从结果数据表 1 中可看出,当扁球的短长轴之比在 0.4 到 1.0 之间时,只要 M, N 取得适当大,其收敛的阻力系数与精确解可有五位有效数重合,压力分布也有三位以上有效数重合,而且数值积分方法比离散奇点法精度高。

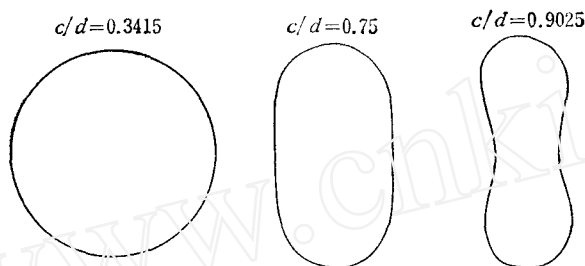


图 2

表 2 扁球表面上的压力分布

l	$a/b = 0.7$		$M = 5$	$N = 4$	
	$R(l)$	$Z(l)$	P (离散)	P (积分)	P (准确)
1	3.4982	0.0004	-0.0003	-0.0001	-0.0001
2	3.4451	0.4252	-0.1385	-0.1387	-0.1387
3	3.2873	0.8375	-0.2513	-0.2512	-0.2512
4	3.0296	1.2244	-0.3268	-0.3269	-0.3269
5	2.6798	1.5740	-0.3703	-0.3703	-0.3703
6	2.2486	1.8756	-0.3918	-0.3918	-0.3918
7	1.7491	2.1207	-0.4006	-0.4008	-0.4007
8	1.1965	3.3011	-0.4035	-0.4032	-0.4034
9	0.6075	2.4116	-0.4037	-0.4040	-0.4040
10	0.0006	2.4488	-0.4040	-0.4029	-0.4037

表 2 说明,对于卡西尼卵形体当 $c/d = 0.3415, 0.75$ 时(参看图 2)两种方法的阻力系数都能收敛到四位以上有效数,而且它们是一致的,其压力分布也有三位以上有效数重合。但当 $c/d = 0.9025$ 时,离散法的收敛性能就明显变差,而数值积分法仍能保持原有收敛性不变。

通过以上算例说明:奇点环形分布法是解决任意形状扁轴对称体 Stokes 流动的一

种有效方法,它具有简单易行,计算量小和精度高等优点、此外,根据 Weinbaum^[2] 等人发展起来的强干扰理论,可将此方法推广到一些有界流动中去。其缺点是对于较扁的物体收敛性变差。但如果在 R 方向连续地分布奇点,此方法将会有显著改进,这方面的工作将另文发表。

表 3 卡西尼卵形体的阻力系数

c/d $M \quad MN$	离 散 法		$N=6$	数 值 积 分 法		
	0.3415	0.75	0.9025	0.3415	0.75	0.9025
4 24	0.9822	0.9326	0.9196	0.9822	0.9330	0.9187
6 36	0.9822	0.9331	0.9214	0.9822	0.9330	0.9187
8 48		0.9331	0.9216			

表 4 卡西尼卵形体表面上的压力分布

I	$c/d = 0.75$		$M=6$	$N=6$
	$R(I)$	$Z(I)$	P (离散)	P (积分)
1	2.5000	0.0004	-0.0033	-0.0003
2	2.4107	0.4506	-0.2990	-0.2990
3	2.1597	0.8367	-0.5129	-0.5129
4	1.7953	1.1116	-0.6069	-0.6069
5	1.3868	1.2642	-0.6098	-0.6097
6	0.9990	1.3229	-0.5775	-0.5774
7	0.6639	1.3333	-0.5466	-0.5465
8	0.3780	1.3284	-0.5274	-0.5273
9	0.2337	1.3253	-0.5214	-0.5213
10	0.0002	1.3229	-0.5177	-0.5176

参 考 文 献

- [1] 吴望一 解任意形状非细长轴对称体 Stokes 流动的一种新方法 中国科学 A 辑 2(1984).
 [2] Weinbaum S. Lectures on Mathematics in the Life Sciences 1981 Vol. 114.

THE ANNULAR DISCRETE DISTRIBUTION METHOD OF SINGULARITIES TO TREAT THE STOKES FLOW OF THE ARBITRARY OBLATE AXISYMMETRICAL BODY

Wu Wangyi Chu Min

(Department of Mechanics, Peking University)

Abstract

This paper deals with the Stokes flow of the arbitrary oblate axisymmetrical body by using the annular discrete distribution method of singularities, which is the further development of the line distribution method of singularities proposed in paper(1). The Sampson spherical singularities are distributed discretely along the singularities ring with centre on the origin of the coordinate system. Truncating the infinite series and choosing the control points on the body surface, a set of linear algebraic equations are obtained from the non-slip boundary conditions. After solving this set of equations the approximate solutions of the problem are presented. This method is utilized to treat the Stokes flow of the arbitrary oblate axisymmetrical body. By comparison with the exact solution it is demonstrate that the annular discrete distribution method of singularities has good convergence and accuracy. As an example of arbitrary oblate axisymmetrical body, the Stokes flow of the oblate Katheny oval is considered and the corresponding drag factor and pressure distribution on the surface are obtained.