

# 强引力场中活塞运动的球对称解

唐泽眉

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文研究在强引力场中活塞的球对称匀速运动问题。对三种不同强度的引力场,用特征线法数值求解流体力学方程组,得出符合激波间断条件及稀疏波边界条件的解。文中详细地描述了活塞的运动图象、激波传播速度、活塞面上声速分布以及活塞扰动区流场,分析讨论了引力场对球对称活塞运动的影响。

## 一、引言

用活塞过程可以描述日冕瞬变现象,研究在太阳引力场中气体的非定常运动<sup>[1]</sup>。对不考虑引力作用的活塞运动,普通气体动力学已有详细的讨论<sup>[2,3]</sup>,但是在天体物理中,发生在恒星周围大气中的爆发现象都受到恒星引力场的影响,因此有必要研究恒星引力场对活塞运动的影响。在弱引力场中活塞的平面、柱对称及球对称运动已有研究<sup>[4,5]</sup>,这些工作中均考虑弱引力场,即取特征重力逃逸速度与特征流体质点运动速度之比为小参数。中晚期恒星具有较大的密度,引力场很强,在它周围所发生的爆发现象中,上述两特征速度之比不再是小参数,因此研究强引力场中球对称活塞的运动是必要的,这种研究更具有普遍意义。

我们以球面活塞向与引力相反方向的匀速运动模拟天体中的某些爆发现象。研究在三种不同强度引力作用下静止恒星大气中球对称活塞的匀速运动,这种运动不再存在自模拟性,用特征线法数值求解流体力学方程组,得出符合边界条件的解,这些边界条件由静止恒星大气中的声速分布决定。考虑恒星引力与压力相平衡,声速不再均匀分布。结果表明引力场对压缩区、稀疏区流场、激波传播速度以及活塞面上声速均有明显的影响。

## 二、基本方程、边界条件及解法

取恒星中心为座标原点, $x$ 沿恒星半径方向向外,球对称活塞匀速运动。在 $t=1$ , $x_* = 1$ 处活塞以 $v_p = 1$ 的速度开始匀速运动,取活塞扰动区的流动为多方过程, $\gamma$ 取为5/3及4/3。引入声速 $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ,取活塞运动速度 $v_p$ 为特征速度,活塞初始位置 $x_*$ 为特征长度,得到下列无量纲形式的一维非定常流体力学方程组:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{2} a \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v v}{x} \right) = 0 \quad (2.1)$$

本文于1983年6月23日收到。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{\gamma - 1} a \frac{\partial a}{\partial x} = - \frac{v_*^2}{v_p^2 x^2} \quad (2.2)$$

式中  $v_*^2 = \frac{GM}{x_*}$ ,  $M$  为恒星质量,  $G$  为万有引力常数,  $v_*$  为  $x_*$  处的特征重力逃逸速度.  $v$  取为 2, 相应于球对称活塞运动.

边界条件: 如图 1 所示, 活塞运动在活塞前形成一压缩区, 在活塞后形成常流区及稀疏区, 活塞面为一接触间断面, 将二区分开, 我们对这两个区域分别求解.

压缩区, 活塞面上质点流速  $v_{c,p} = v_p = 1$ , 活塞面上质点声速  $a_{c,p}$  由激波关系决定. 压缩区的流场应满足激波面上的动力学条件, 假定未受活塞扰动的激波前区域气体处于静止状态, 以下标“1”表示此区的参量, 以“s”表示激波后的参量, 激波守恒关系有:

$$v_s = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{N} (N^2 - a_1^2) \quad (2.3)$$

$$a_s = \left\{ \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{a_1}{N} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{a_1}{N} \right)^2 \right] + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{N} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} N \quad (2.4)$$

其中  $N$  为激波传播速度.

常流区及稀疏区: 活塞面上质点流速  $v_{r,p} = v_p = 1$  活塞面上流体质点声速  $a_{r,p}$  由  $v + a$  族特征线, 即, 由稀疏区边界决定. 活塞扰动所形成的稀疏区边界以  $-a_r$  的速度在静止恒星大气中传播, 稀疏区边界条件为:

$$v_r = 0 \quad (2.5)$$

$$a_r = a_1 \quad (2.6)$$

$a_1$  为静止恒星大气中的声速分布. 在强引力条件下, 考虑引力与流体压力相平衡, 有

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \rho \frac{GM}{x^2},$$

引进声速  $a_1^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ , 对多方过程有下列无量纲关系式:

$$\frac{2a_1}{\gamma - 1} \frac{\partial a_1}{\partial x} = - \frac{\alpha}{x^2}, \quad \alpha = \frac{v_*^2}{v_p^2}, \quad v_*^2 = \frac{GM}{x_*}, \quad \text{积分取无穷远处声速为零, 有:}$$

$$a_1^2 = \frac{\alpha}{x} (\gamma - 1) \quad (2.7)$$

上式说明, 在  $v_p = 1$  的匀速活塞运动中, 恒星的质量决定了  $\alpha$  的大小, 声速  $a_1$  随  $\alpha$ ,  $\gamma$  的增加而增加. 给定了恒星的质量  $M$  及  $\gamma$  值, 就决定了静止恒星大气中的声速分布. 恒星质量越大,  $\alpha$  越大, 引力作用越强.

由于在强引力场中无论是稀疏区还是压缩区中的流动都不再是自模拟的, 我们将用特征线法数值求解. 按照特征理论, 特征线及特征关系为:

$$dv + \frac{2}{\gamma + 1} da + \left( \frac{vav}{x} + \frac{\alpha}{x^2} \right) dt = 0 \quad \frac{dx}{dt} = v + a \quad (2.8)$$

$$dv - \frac{2}{\gamma - 1} da - \left( \frac{vav}{x} - \frac{\alpha}{x^2} \right) dt = 0 \quad \frac{dx}{dt} = v - a \quad (2.9)$$

我们用 (2.8)、(2.9) 式研究在  $x_* = 1$ ,  $a_1 = a_0$  ( $a_0$  分别为 0.5, 1.0, 1.5) 时活塞以  $v_p = 1$  的速度匀速运动所形成的初始流场随时间的发展。初始流场仅取决于活塞所在初始位置  $x_* = 1$  处的声速  $a_0$  值以及活塞的运动规律, 而与是否有引力场及坐标系的选取无关。从 (2.8)、(2.9) 式可以看出, 引力的作用和坐标系的选取不同仅影响  $t > 1$  时间中的流场, 因此, 我们将用平面活塞运动的分析结果作为初值<sup>[3]</sup>, 按特征线法求解特征方程 (2.8)、(2.9), 研究在引力作用下, 满足所给边界条件的初始流场的发展。所给初始流动参数如下:

$$\text{压缩区: } N = \frac{\frac{\gamma+1}{2} v_p + \sqrt{\left(\frac{(\gamma+1)v_p}{2}\right)^2 + 4a_0^2}}{2}$$

$$v_t = v(x, t) = v_p = 1$$

$$a_t = a(x, t) = a_{cp} = \left\{ \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{a_0}{N} \right)^2 \right] + \left[ \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left( 1 - \left( \frac{a_0}{N} \right)^2 \right) + \left( \frac{a_0}{N} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} N$$

其中  $a_{cp}$  为压缩区活塞面上声速。

活塞后有常流区及稀疏区。稀疏区中的一族特征线

$$\frac{dx}{dt} = v - a$$

为汇交于活塞初始位置的一族扇形直线。稀疏区边界上  $a_r = a_0$ ,  $v_r = 0$ ,

$$\frac{x}{t} = -a_0.$$

在稀疏区中:

$$v(x, t) = \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma+1} a_0, \quad a(x, t) = v - \frac{x}{t}.$$

在稀疏区与常流区相交的弱间断上:  $v = 1$ ,

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma+1}{2} - a_0, \quad a = \frac{1-\gamma}{2} + a_0.$$

活塞面上(活塞后)  $v_{rp} = v_p = 1$ ,

$$a_{rp} = \frac{1-\gamma}{2} + a_0,$$

常流区中:  $v(x, t) = v_p = 1$ ,

$$a(x, t) = a_{rp} = \frac{1-\gamma}{2} + a_0.$$

### 三、结果与讨论

图 1 给出了在静止恒星大气中活塞球对称运动的图象, 与无引力的平面活塞运动类似, 按流动特征可将流场分为 5 个区域: I——激波前未受扰动的静止气体区。II——活塞前压缩区, 以激波和 I 区相联结。III——活塞后常流区, 以活塞面与压缩区分界, 活塞面为一接触间断面。IV——稀疏区, 稀疏区与常流区以一弱间断相结。V——活塞后未

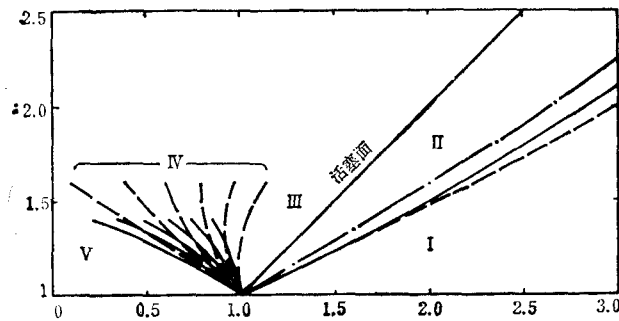


图 1 球面活塞运动图象

—  $\alpha = 3.375, \gamma = 5/3$     ---  $\alpha = 0, a_0 = 1.5, \gamma = 5/3$   
 - - -  $\alpha = 3.375, \gamma = 4/3$

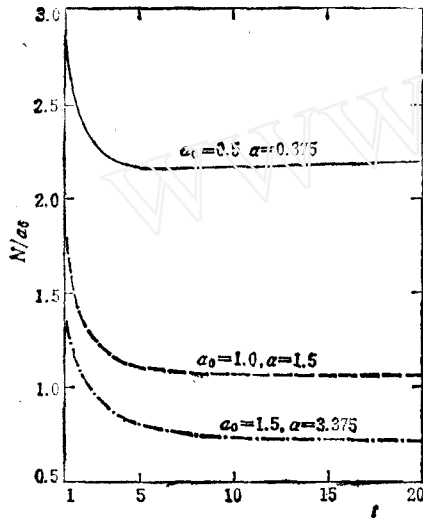


图 2 激波传播速度的演化

—  $a_0 = 0.5, \alpha = 0.375$     ---  $a_0 = 1.0, \alpha = 1.5$   
 - - -  $a_0 = 1.5, \alpha = 3.375$

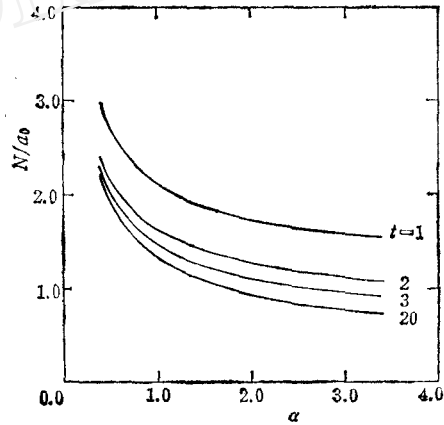


图 3 引力对激波传播速度的影响

受扰动的静止气体区,以边界特征线与稀疏区相联结。图 1 说明不计引力作用及强引力场中流动图象的差别。引力的作用将使激波传播速度减小,稀疏区的一族特征线向中心弯曲,常流区范围扩大。恒星引力场越强,上述变化越明显。图 1 还表明,在同一恒星引力场中,多方指数  $\gamma$  对压缩区流动图象的影响, $\gamma$  越大,相应的  $a_1$  值越大,对应有较快的激波传播速度  $N$ ,由于  $a_1$  值大,有较小的  $N/a_0$  值和较小的激波强度及较宽的压缩区范围。图 2 及图 3 给出了引力场对激波传播速度的影响。图 4 为在三种不同强度的引力场作用下激波传播速度随时间的变化规律,当活塞以同样速度匀速运动时,引力越弱, $\alpha$  值越小, $N/a_1$  值越大,激波越强,传播速度越快。随着时间的发展,活塞及活塞前压缩区越来越远离中心,引力作用越来越弱,在  $t > 4 \sim 5$  之后,激波传播速度逐渐接近于某一常数值, $\alpha$  越大, $N/a_0$  值越小。图 5 中给出  $N/a_0$  随  $\alpha$  的变化关系,在  $\alpha$  系数比较小时,随

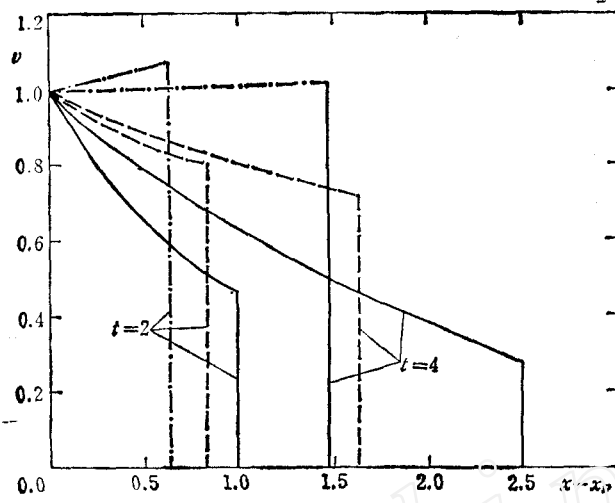


图 4 压缩区流速分布

—  $\alpha = 0, a_0 = 1.5, \gamma = 5/3$     ---  $\alpha = 3.375, \gamma = 5/3$   
 - · -  $\alpha = 3.375, \gamma = 4/3$

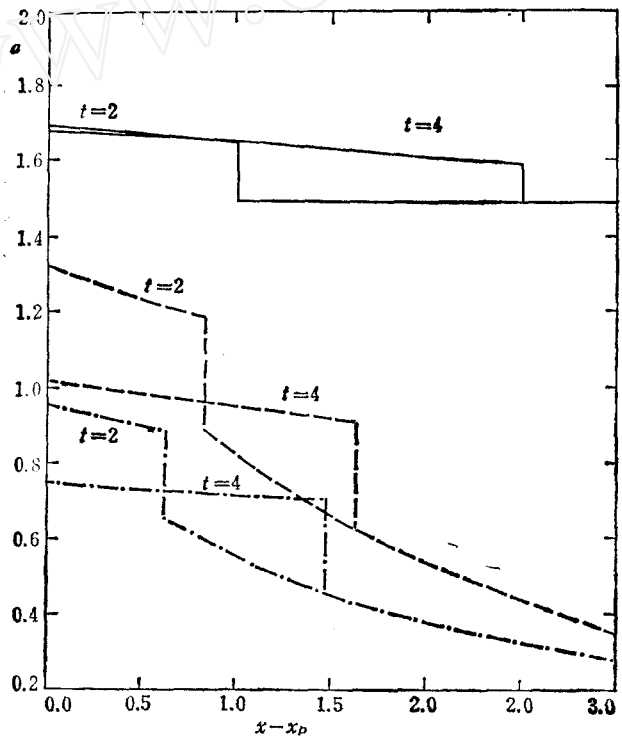


图 5 压缩区声速分布

—  $\alpha = 0, a_0 = 1.5, \gamma = 5/3$     ---  $\alpha = 3.375, \gamma = 5/3$   
 - · -  $\alpha = 3.375, \gamma = 4/3$

$\alpha$  减小,  $N/a_0$  增加很快, 在  $\alpha > 3$  之后,  $N/a_0$  变化不大.

图 4 及图 5 表明引力对球面活塞压缩区流场的影响. 图中为  $x = 1$  处,  $a_0 = 1.5$ , 不

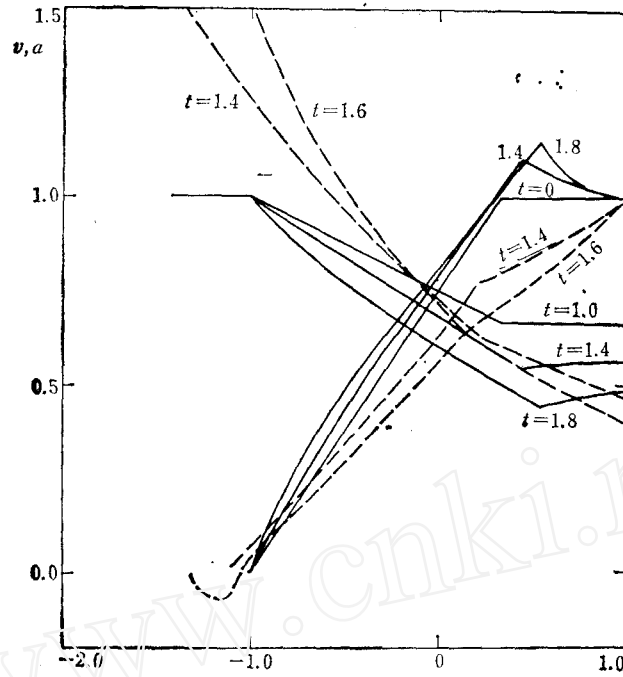


图 6 活塞后扰动区流场

—  $\alpha = 0, a_0 = 1.5, \gamma = 5/3$  ---  $\alpha = 1.5, \gamma = 5/3$

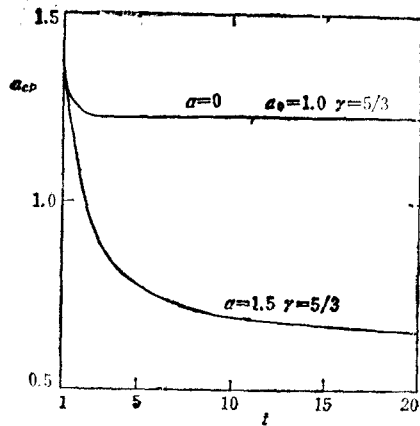


图 7 活塞面上声速(活塞前)

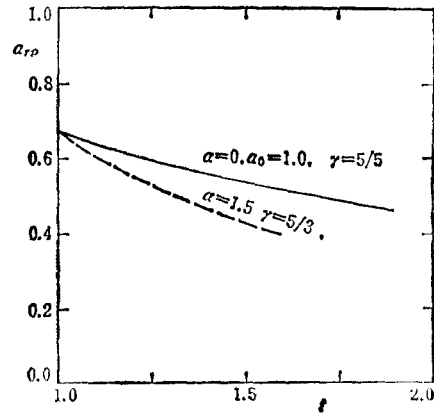


图 8 活塞面上声速(活塞后)

计引力  $\alpha = 0$  与  $x = 1$  处  $a_0 = 1.5, \alpha = 3.375$  两种情形的比较。不计引力时相应于某一时刻 ( $t = 2$  或  $t = 4$ ) 由于球面活塞前压缩区体积膨胀, 从活塞至激波面流体质点的流速及声速减少。引力的作用使压缩区及活塞面上声速减小很快, 流速增加。图 4 及图 5 还说明多方指数  $\gamma$  对压缩区流场的影响, 图中给出在  $x = 1$  处  $a_0 = 1.5, \alpha = 3.375$  时  $\gamma = 5/3$  及  $4/3$  两种结果。  $\gamma$  越小在压缩区对应有较小的声速和较大的流速。为说明这些结果, 我们从激波条件 (2.3) 式,

$$v_r = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{N} (N^2 - a_0^2)$$

来讨论  $v_r$ 、 $\gamma$ 、 $N$ 、 $a_0$  各量之间的关系. 首先, 不计引力,  $a_0$  为常数,  $v_r$  与  $N$  成正比而与  $\gamma$  成反比, 压缩区流体体积膨胀, 消耗动能及内能,  $a_0$ 、 $v_r$  随  $x$  增大而不断下降, 形成图 4、图 5 中  $\alpha = 0$  的流速、声速分布. 考虑引力, 按(2.3)式从两方面分析, 一方面引力作用于压缩区流场, 压缩区流体质点向与引力作用相反方向流动, 克服引力作用, 消耗流体质点的动能及内能使传播过程中  $v_r$  及  $N$  逐渐减小. 另一方面, 在静止恒星大气中引力与压力相平衡所形成的声速分布使  $a_0$  沿  $x$  方向不断减小, 从(2.3)式可看出, 以  $N$  传播的激波, 由于边值  $a_0$  降低将使  $v_r$  增加. 这两方面作用的总效果, 决定了引力对压缩区流场的影响, 与无引力结果相比,  $N$  减少, 压缩区流速增加, 声速减少. 从(2.3)式可知  $\gamma$  的减少和加强引力的作用对流速及声速的影响是类似的. 图 7 说明活塞前面上声速随时间增加不断下降. 引力的作用将使活塞面上声速下降更快.

活塞后常流区及稀疏区流场: 图 6 给出在  $x = 1$ ,  $a_0 = 1.0$  时, 不计引力  $\alpha = 0$  及考虑引力  $\alpha = 1.5$  时活塞后扰动区流场的比较. 随着时间的发展稀疏区边界向中心推移, 在  $\alpha = 1.5$  时, 边界上声速增加很快, 因此边界特征线向中心弯曲. 此区的流体质点仍是向与引力作用相反的方向运动. 与  $\alpha = 0$  无引力情况相比较, 从稀疏波边界至活塞面流体质点的流速降低, 声速减小得更快, 用以克服引力做功. 当引力作用很强时, 在稀疏区边界上将会出现与活塞运动方向相反的流动区域. 图 8 表明球面活塞后面上, 声速随时间增加不断减少, 引力的作用将使其减小得更快.

综上所述, 恒星引力场将使激波传播速度、激波强度及活塞面上声速明显减少; 使压缩区流体声速下降, 流速增加; 使稀疏区流体质点动能及内能沿流动方向减小. 在研究恒星, 特别是高密恒星周围大气中的爆发现象时, 应该考虑到恒星引力场的影响. 我们的结果对这些问题的研究具有一定的参考价值.

感谢胡文瑞同志的指导.

### 参 考 文 献

- [1] 胡文瑞, Plenary Committee On space Research, p. 39 (1982), Ottawa. *Astrophysics & Space Sci.* (待印)
- [2] Седов, Л. И., 力学中的相似方法与量纲理论, 科学出版社 (1982).
- [3] Белова, А. В., 气体动力学讲义, 科学出版社, (1956).
- [4] 胡文瑞, 应用数学和力学, 待印.
- [5] 唐泽眉, 力学学报, 待印.

## THE SPHERIC-SYMMETRICAL SOLUTION FOR A PISTON MOVING IN STRONG FIELD OF GRAVITATION

Tang Zemei

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

### Abstract

The purpose of present paper is to study the spheric-symmetrical motion of a piston at a constant velocity in the strong field of gravitation. The gasdynamic equations have been solved numerically according to the characteristic method for three kinds of gravitational strength. Such kind of solution which satisfies the conditions at shock and boundary of rarefaction region is obtained. The trajectory of piston and shock, the propagating velocity of shock, the flow and sonic velocity fields in the disturbed region by moving piston and the sonic velocity distribution on the piston are described. The influence of strong gravity on spheric-symmetrical piston is discussed in present paper.