

# 最大熵法新倒频谱分析——倒熵谱研究

应怀樵

(铁道部科学研究院)

**提要** 本文提出用最大熵法和最大熵法与富氏谱法相结合的综合变换方法求倒频谱——“倒熵谱”的新方法。给出了倒熵富谱法(CEFM)、倒富熵谱法(CFEM)和倒熵熵谱法(CEEM)等几种新倒谱算法。解决了以往倒谱分析中频率分辨率难以提高的困难,减小了窗函数产生的影响,使倒谱旁瓣大大减轻。文内给出了实际计算结果,并与常规倒谱(本文称之为倒富富谱 CFFS)进行了对比。

## 一、前言

倒频谱(Cepstrum)最早是1963年由B. P. Bogert等人提出并应用的<sup>[1,4,10]</sup>。与此相应还出现了倒频率(Quefreny)、倒相位(Saphe)、倒周期(Repod)等新名词概念。随着FFT在1965年问世以来,谱分析的应用不断扩大<sup>[5-11]</sup>,倒频谱分析方法逐渐引起人们的重视,如对机器和一些结构部件的故障诊断、波传递过程中的入射和反射延迟分析、以及语言分析等。特别是在故障诊断和振动控制中,因为在倒频谱上可以比较容易地识别信号的组成成分,所以它越来越居于重要地位。最近国外出品的新式信号分析仪,已具有倒频谱的分析功能。但是直到目前,国内外所采用的倒频谱计算方法和专用机的软件,都是建立在倒频谱原有定义富氏变换的基础上的,例如功率倒频谱,即是“功率谱的对数的功率谱”的倒频谱定义,其表达式为:

$$C(\tau) = |F\{\log |F(x(t))|^2\}|^2 \quad (1)$$

或者写成:

$$C(\tau) = \frac{2}{T} |F\{\log(G_x(f))\}|^2 \quad (2)$$

式中:自变量 $\tau$ 被称为倒频率(Quefreny)

$$G_x(f) = \frac{2}{T} |X(f)|^2 \quad (3)$$

$F$ 表示富里叶变换,频域函数 $X(f)$ 是时域函数 $x(t)$ 的富里叶变换,即:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4)$$

上面(1)、(2)式是常见的功率倒频谱(Power Cepstrum)表达式,它的流程方框图如图1所示。

另外,还有复倒频谱的概念<sup>[3,4,10]</sup>(Complex Cepstrum),其定义是富里叶变换对数的富里叶变换,表达式为:

本文于1984年8月20日收到。

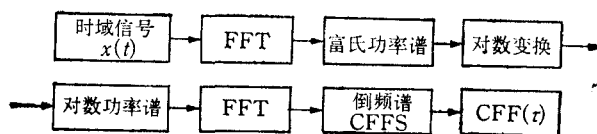


图1 常规定义的倒频谱流程图

$$K(\tau) = F^{-1}[\log(F(x(t)))] = F^{-1}[L(f)] \quad (5)$$

式中  $L(f)$  为时间信号  $x(t)$  的富里叶变换  $X(f)$  的复对数。

这两种国内外通用的倒频谱，都是建立在线性富里叶变换的基础上的，在实际计算中，受到了离散有限富里叶变换特性的限制，其中两点最为突出：(1) 频率分辨率受到时间信号长度  $T$  的影响，要提高频率分辨率十分困难；(2) 由于经过两次富里叶变换，因此，窗函数的影响严重，旁瓣很多，尽管可以选用不同的窗，但仍不可避免它们的影响。

一些学者，还试图采用细化“ZOOM”FFT 来提高频率分辨率，这对连续信号有一定的效果，但对短时间的瞬态信号，其细化后的数据值有效性变差，误差增大，因此，对提高频率分辨率仍感到困难。

本文提出一条计算倒频谱的新途径，即采用最大熵谱方法<sup>[2,3,7,9]</sup>与 FFT 方法两者相结合，或者采用两次最大熵变换，构成三类新的倒频谱，定义为倒熵富谱、倒富熵谱和倒熵熵谱。它可大大提高频率分辨率，特别是对短时间序列具有更良好的效果；同时，可大大消除窗函数的影响，克服了以往倒频谱分析中的两个困难。经过理论研究和对实际信号的计算分析，取得了良好的效果，成套的计算程序已可提供应用。

## 二、新方法的原理和计算框图

本文把最大熵谱计算和富氏分析计算相结合，进行了四种型式的新倒频谱分析计算。

### 1. 倒熵富谱——CEFS( $\tau$ )

计算中根据物理模型，先把时域信号用最大熵方法 (MEM) 进行变换，求得熵谱(功率谱) EPS，然后对熵谱功率谱取对数，求得对数熵谱 (LEPS)，最后通过快速富里叶变换，求其富氏功率谱，得到倒熵富谱，本文称之为 CEFS (Cepstrum Entropy Fourier Spectrum)。其变换计算框图如图 2 所示。计算公式为：

$$\text{CEF}(\tau) = \frac{2}{T} |F\{\log(\text{EPS}(f))\}|^2 \quad (6)$$

其中最大熵谱  $\text{EPS}(f)$  是利用下面公式计算的：

$$\text{EPS}(f) = \frac{P_{m+1}\Delta t}{|1 - \sum a_{mn} \exp(-j2\pi fn\Delta t)|^2} \quad (7)$$

式中： $f$  为频率，( $f \leq$  奈奎斯特频率)， $P_{m+1}$  为截止阶数为  $m$  的  $m+1$  点预测误差滤波器的平均输出功率(在去均值时等于方差  $\sigma_m^2$ )， $P_{m+1}$  和系数  $a_{mn}$  由下面关系式给出：

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(m) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R(m) & R(m-1) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{m1} \\ \vdots \\ -a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

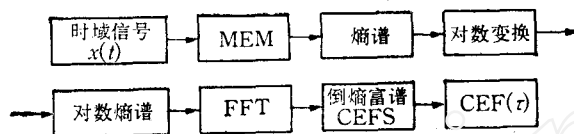


图 2 倒熵富谱(时域、频域、倒频域)流程图

式中  $a_{mn}$  称为自回归系数或线性预测系数。若采样值(样本函数)为  $x_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ , 时间间隔为  $\Delta t$ , 采样总数  $N$ , 有限富里叶变换公式为:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j(2\pi kn/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

它的逆变换公式为:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j(2\pi kn/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

取幅度谱为  $X_n = 2|C_n|$ , 取功率谱为  $P_n = \frac{1}{2} X_n^2$

本文计算 FFT 时,采用了文献[10]中的框图 6-22 和表 6-8 的 FFT 子程序,即在变换中取了柯立-杜开的计算方法。蝴蝶计算公式如下

$$X_n = \frac{1}{2} \{Y_n + W^n Z_n\}, \quad X_{n+N/2} = \frac{1}{2} \{Y_n - W^n Z_n\} \quad (11)$$

式中

$$W = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}\right]$$

## 2. 倒熵富谱——CEFS( $f^c$ )

倒熵富谱的另一种模式,是通过 MEM 把时域函数  $x(t)$  变换到周期域  $T(t)$ , 得到周期域上的频谱图——最大熵功率谱。然后取对数,把对数最大熵周期域功率谱再作 FFT 变换,变到倒频域,得到功率倒频谱。这时的倒频率具有频率的因子  $f^c$ , 它与常规的倒频谱分析的倒频率  $\tau$  的因子量纲不同( $\tau$  具有时间量纲),而得到了一种新的倒频谱概念。其计算流程框图见图 3。计算公式为:

$$\text{CEF}(f^c) = \frac{2}{T} |F\{\log[\text{MEM}(x(t))]\}|^2 \quad (12)$$

这种变换过程,从理论上讲可把倒频率的分辨率大大提高,使倒频率  $\tau$  达到无穷小,实现倒频谱的细化目的,这点是很有实用价值的。

在上述思路的启示下,计算中先不考虑物理模型,而从计算数学观点出发,做了另两种倒谱试算,称之为倒富熵谱(CFES)和倒熵熵谱(CEES),它们是通过下述两种方式

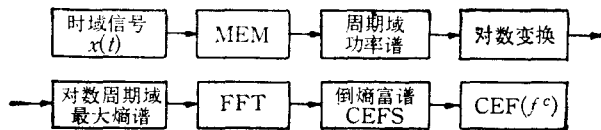


图 3 倒熵富谱(时域、周期域、倒频域)流程图

进行的。

### 3. 倒富熵谱——CFES

对时域信号先做富氏变换, 然后取对数功率谱, 最后作熵谱变换, 得到倒富熵谱, 其流程图见图 4 所示。计算公式为:

$$CFE(\tau) = \text{MEM} \left\{ \log \left[ \frac{2}{T} |F(x(t))|^2 \right] \right\} \quad (13)$$

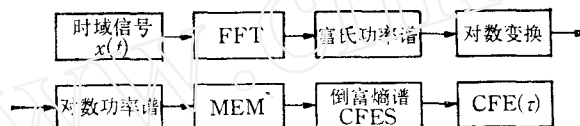


图 4 倒富熵谱流程图

### 4. 倒熵熵谱——CEES

两次均用最大熵方法进行变换, 其流程图如图 5 所示。计算公式为:

$$CEE(\tau) = \text{MEM} \{ \log [ \text{MEM}(x(t)) ] \} \quad (14)$$

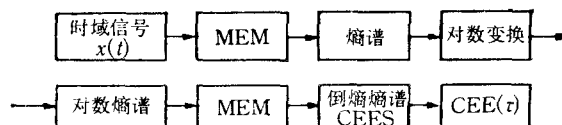


图 5 倒熵熵谱流程图

对上述两种倒谱的计算, 也取得了极其有趣的结果。所得到的倒频谱图频率分辨率可达到很细, 谱图旁瓣少, 曲线很光滑。

## 三、计算结果和分析

在国际饭店工地控制爆破工程中, 对地面和房屋进行了振动试验, 其实测时域波形图

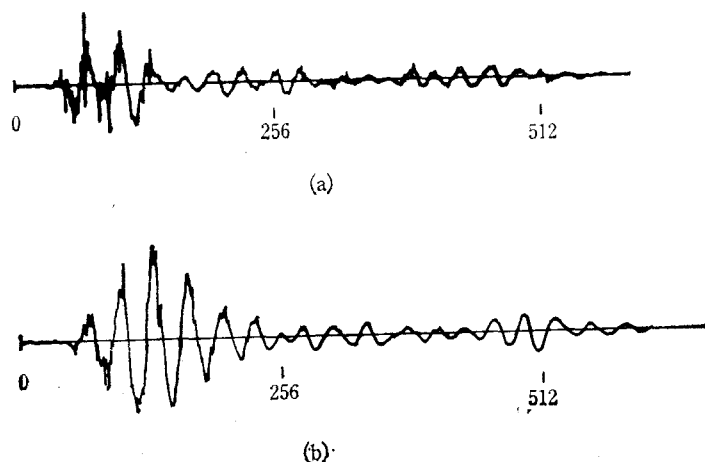


图 6 国际饭店工地控制爆破实测波形

(a) 地面速度波形, (b) 房屋结构速度波形

见图 6. 分析结果如下:

**1. 倒谱的卓越成分** 从计算结果中取前五个卓越成分列于表 1 中. 表中 QUE 项为倒频率值, CEP 项为倒谱值.

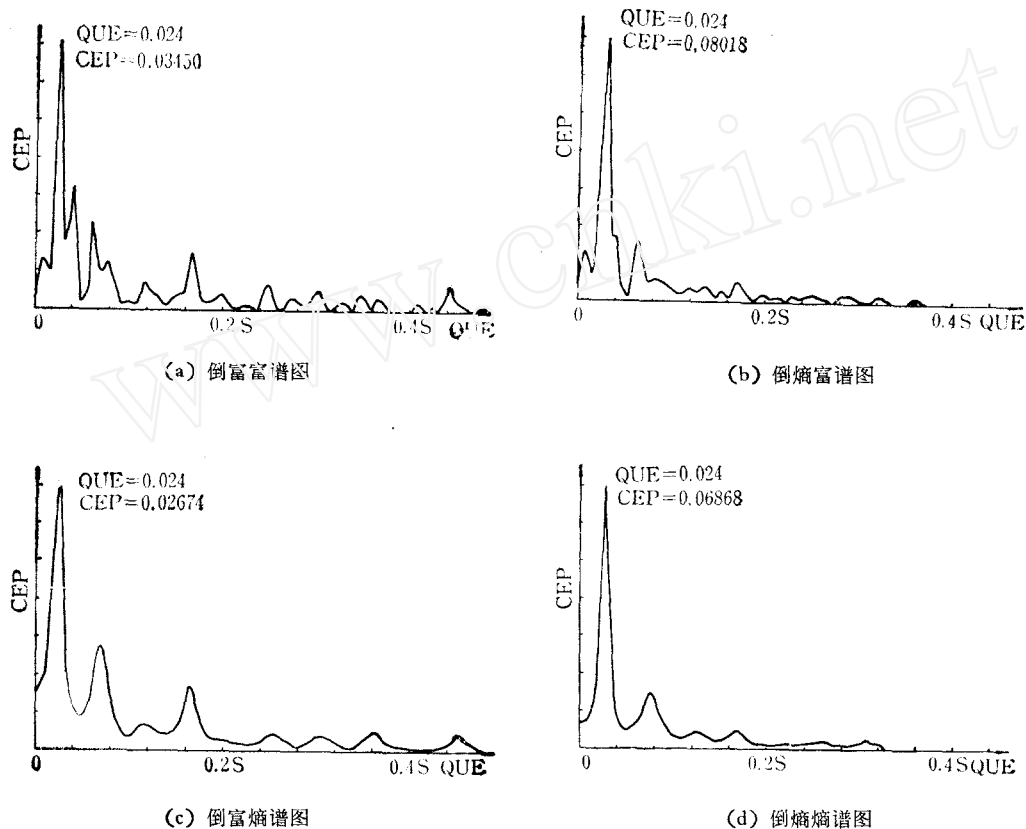
表 1

| 数据名称          | 分析方法 | 倒频率 (s)          | 降 值 序 号 |       |       |       |       |
|---------------|------|------------------|---------|-------|-------|-------|-------|
|               |      | 倒频谱( $10^{-2}$ ) | 1       | 2     | 3     | 4     | 5     |
| 地面振动图<br>6(a) | CFEM | QUE              | 0.024   | 0.040 | 0.064 | 0.168 | 0.248 |
|               |      | CEP              | 3.450   | 1.256 | 1.070 | 0.735 | 0.275 |
|               | CEFM | QUE              | 0.024   | 0.064 | 0.008 | 0.168 | 0.280 |
|               |      | CEP              | 8.018   | 1.850 | 1.467 | 0.549 | 0.214 |
|               | CFEM | QUE              | 0.024   | 0.068 | 0.168 | 0.120 | 0.364 |
|               |      | CEP              | 2.674   | 1.050 | 0.668 | 0.250 | 0.196 |
|               | CEEM | QUE              | 0.024   | 0.076 | 0.168 | 0.264 | 0.300 |
|               |      | CEP              | 6.869   | 1.400 | 0.510 | 0.179 | 0.159 |
| 房屋振动图<br>6(b) | CFEM | QUE              | 0.024   | 0.008 | 0.064 | 0.112 | 0.288 |
|               |      | CEP              | 5.180   | 3.450 | 1.430 | 0.690 | 0.630 |
|               | CEFM | QUE              | 0.024   | 0.008 | 0.064 | 0.040 | 0.112 |
|               |      | CEP              | 9.280   | 5.900 | 2.780 | 2.200 | 1.060 |
|               | CFEM | QUE              | 0.016   | 0.120 | 0.072 | 0.272 | 0.372 |
|               |      | CEP              | 6.917   | 0.940 | 0.890 | 0.810 | 0.280 |
|               | CEEM | QUE              | 0.016   | 0.120 | 0.068 | 0.268 | 0.184 |
|               |      | CEP              | 10.760  | 2.167 | 1.000 | 0.980 | 0.280 |

**2. 谱图** 国际饭店地面速度(图 6(a) 曲线)四种方法计算的倒谱图, 如图 7 所示; 国际饭店结构速度(图 6(b) 曲线)四种计算方法的倒谱图如图 8 所示.

**3. 对比分析** 对图 6(a) 和图 6(b) 曲线, 在相同条件和参数下, 分别用四种方法做了倒谱变换, 见图 7 和 8. 从这些图中看到, 若按谱图中频率成分的丰富程度从低到高排列, 其顺序为: (1) CEES; (2) CFES; (3) CEFS; (4) CFFS. 可以看出, 经过两次富氏变换的倒富富谱如图 7(a) 和 8(a) 谱图中的倒频谱成分最为丰富, 显然这是由于经两次窗函数引起的旁瓣效应作用所致. 说明窗函数旁瓣效应给分析结果带来了虚假成分, 使得真实成分难于辨别. 而 CEFS 或 CFES, CEES 都减小了这种不良效应, 突出了主要的、真实的部分, 因此, 应当认为它们比常规的倒频谱 CFFS 效果要好. 归纳一下其主要区别如表 2 所列.

从实际计算结果还可看出, 国际饭店地面振动信号的倒谱分析图(图 7)上, 四种倒谱的主倒频率 QUE( $\tau$ ) 都为 0.024 s. 而从工地楼房结构振动的倒谱分析图(图 8)上看出,



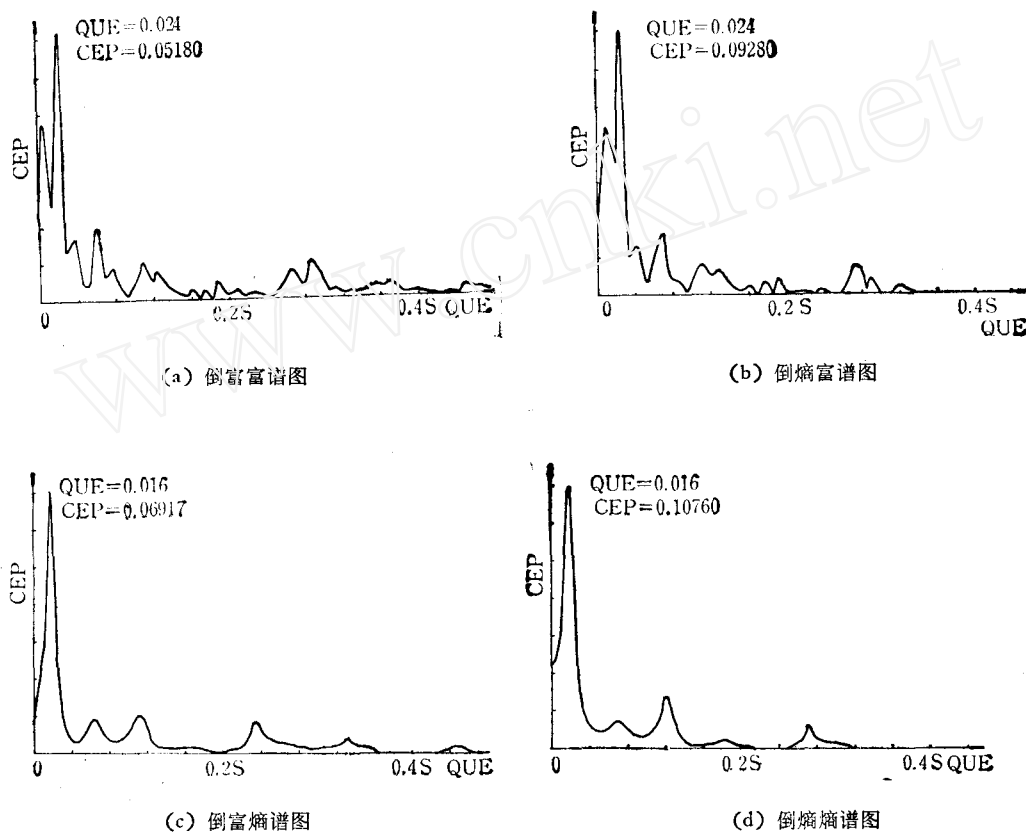
$$\Delta t = 0.004s, \Delta QUE = 0.004s, N = 512$$

图 7 对国际饭店地面速度用四种方法计算的倒谱图

表 2

| 分 析 方 法          | 频 率 分 辨 率 | 渗 漏     | 倒 频 率                         |
|------------------|-----------|---------|-------------------------------|
| CEFM             | $1/T$     | 旁 瓣 多   | $\tau$ (时间量纲)                 |
| CEEM, CFEM, CEFM | 无 穷 小     | 旁 瓣 很 小 | $\tau$ (时间量纲)<br>$f^*$ (频率量纲) |

倒富富谱和倒熵富谱的主倒频率为 0.024s, 而倒富熵谱和倒熵熵谱的分析结果为 0.016s。这是因为地面振动的影响因素较单纯, 地面自由场介质本身特性变化不大, 所以四种倒谱分析结果相同。而对于楼房结构的振动, 从其功率谱中发现, 振动前后结构频率已发生了变化, 说明结构已有了非线性变化, 因此, 四种倒谱中发生倒频率有两两相同的结果不是偶然的, 倒富熵谱和倒熵熵谱是在谱上又作了最大熵的外推, 使分析结果产生了很有意义的差别, 这可能会对今后的故障诊断等倒谱分析的应用开拓积极的和富有意义的前景, 并可以通过这种多样化的和不同方法的新倒谱分析, 从中找出有用的规律来。



$\Delta T = 0.004s$ ,  $\Delta QUE = 0.004s$ ,  $N = 512$

图 8 对国际饭店结构速度用四种方法计算的倒谱图

#### 四、结 语

1. 报告中提出的倒熵谱计算是一种新的构思,提供了倒谱分析的新途径,可建立有频率量纲的新倒频率。本方法使倒频谱的分辨率大大提高,解决了原有倒谱分析中的主要困难。

2. 文中提出的新倒频谱分析方法,减小了窗函数的影响,使得旁瓣大大降低,倒频谱图形光滑,这在故障诊断中,对寻找故障频率是十分有利的。

3. 文中所提到的倒熵富谱法 (Cepstrum Entropy Fourier Method) CEFM 是一种既符合物理概念,又有良好效果的方法,值得研究推广。

4. 倒熵富谱法 CFEM 和倒熵谱法 CEEM 也取得了极为有趣的结果,谱曲线光滑,分析效果比倒熵富谱还要好,尤其是倒熵谱。但对其物理应用需进一步研究和探讨,开拓应用前景。

5. 由对比分析可以看出,常规的倒频谱法 CFFM 的分析效果不如本文中所提出的倒熵谱效果好,特别是倒熵谱在对短时间序列分析长周期的倒频率成分时,具有更明显的效果。因此建议在今后的专用机中,加入倒熵谱程序块,以供应用研究。

## 参 考 文 献

- [1] Bogert, B. P., Healy W. J. R. and Tukey, J. W., The Frequency Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking, Proc. Symp. Time Series Analysis, M. Rosenblatt, Ed., New York, John Wiley & Sons. Inc., New York (1963), 209—243.
- [2] Ulrych, T. J., Bishop, T. N., Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition, *Reviews of Geophysics and Physics*, **13**, 1 (1975).
- [3] 日野幹雄, スペクトル解析, 朝倉書店 (1977).
- [4] Randall, R. B. et al., Application of B & K Equipment to Frequency Analysis (1977).
- [5] 应怀樵, 频谱分析在抗爆结构动力学参数分析中的应用, 1979 年防护工程学术会议论文集, 战士出版社.
- [6] 应怀樵, 振动测试和分析, 中国铁道出版社 (1979).
- [7] Edited by S. Haykin, *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1979).
- [8] 应怀樵, 信号处理技术与结构系统识别和模态分析, 宇航计测技术, 2, 4(1982).
- [9] 钱学森, 朱锺, 工程控制论, 上, 下册, 科学出版社 (1980).
- [10] 应怀樵, 波形和频谱分析与随机数据处理, 中国铁道出版社 (1983).
- [11] 应怀樵, 徐慧, 王振河, 动态测试波形相位谱值的判别, 计量学报, 1(1984).

## NEW CEPSTRUM ANALYSIS BY MAXIMUM ENTROPY METHOD

Ying Huaiqiao

(China Academy of Railway Science, Beijing, China)

### Abstract

This paper presents a new way which employs the max. entropy method (MEM) and the combinative transform of MEM and FFT to obtain the cepstrum. The new algorithm for CEFM, CFEM and CEEM is given in the paper which leads to a solution of increasing the frequency resolution and weakening the effect of window function in the cepstrum analysis. The cepstrum sidelobes is decreased to a great extent. Some calculation results are demonstrated and compared with the normal cepstrum which is usually called CFFS in the text.