第17卷 第4期 1985年7月
力学学报
ACTA MECHANICA SINICA
Vol. 17, No. 4
July, 1985

辐射流体力学计算中的一个特殊问题

张锁春
(中国科学院应用数学研究所)

1. 问题的提出

假定忽略粘性、体积力和能源项，Eulerian 形成的辐射流体力学方程组为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u}=0\\&\frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}=-\nabla p\\&\frac{\partial e}{\partial t}+\nabla\cdot e\boldsymbol{u}+\nabla\cdot p\boldsymbol{u}=-\nabla\cdot\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中∇是 Hamilton 算符，密度 $\rho=\rho(X,t)$，速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(X,t)$，温度 $T=T(X,t)$，X 为位置，t 为时间． 压力 $p=p_m(\rho,T)+\frac{1}{3}aT^4$，单位质量的能量 $e=C_v\rho T+\frac{1}{2}\times\rho\boldsymbol{u}^2+aT^4$，辐射能流 $\boldsymbol{J}=-K\nabla T$，辐射热传导系数 $K=\frac{4}{3}aclT^3$． l 是辐射平均自由程，a 是 Stefan-Boltzmann 常数，c 是光速，C_v 是热容量，$p_m(\rho,T)$ 是物质压．

假定是取直角坐标系中的长方体的拉氏网格，在网格中心建立差分，而且是基于方程组 (1) 的体积积分形式，得到相应的能量方程的差分方程为：（因本文不涉及质量守恒、动量守恒方程，故予省略）

$$\begin{aligned}\frac{\partial(e\tau)}{\partial t}=&-[Pu\sigma(x)]_{x_1}^{x_2}-[Pv\sigma(y)]_{y_1}^{y_2}-[Pw\sigma(z)]_{z_1}^{z_2}+\left[K\frac{\partial T}{\partial x}\sigma(x)\right]_{x_1}^{x_2}\\&+\left[K\frac{\partial T}{\partial y}\sigma(y)\right]_{y_1}^{y_2}+\left[K\frac{\partial T}{\partial z}\sigma(z)\right]_{z_1}^{z_2}\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u,v,w)$，$X=(x,y,z)$，$\tau=\Delta x\Delta y\Delta z$，$\sigma(x)=\Delta y\Delta z$，$\sigma(y)=\Delta x\Delta z$，$\sigma(z)=\Delta x\Delta y$，$\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=y_2-y_1$，$\Delta z=z_2-z_1$． 记号 $[f]_{x_1}^{x_2}$ 表示 $f(x_2)-f(x_1)$，$[\,]_{y_1}^{y_2}$，$[\,]_{z_1}^{z_2}$，意义相同．

对于高维问题通常可采用各种形式的 ADI (Alternating Direction Implicit) 方法或分数步长方法(The Method of Fractional Steps)，化高维问题为一维问题，得到的是一般具有对角优势的三对角线的代数方程组，用追赶法求解是十分有效的．因方程的左端 e 中含有 T^4 因子，右端 K 也是 T 的非线性函数，需要采用隐式差分格式，迭代方法求解．为此必须先解决如何线性化的问题．为叙述简便，突出方法的本质，着重分析以下的简化方程：

$$\frac{\partial T^4}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}K(x,t,T)\frac{\partial T}{\partial x}.\tag{3}$$

本文于1984年1月30日收到．

2. 采用的方法

列出方程 (3) 的全隐式的差分格式:

$$\frac{(T_j^4)^{n+1}-(T_j^4)^n}{\Delta t}=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left[K_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}\left(T_{j+1}^{n+1}-T_j^{n+1}\right)-K_{j-1/2}^{n+1}\left(T_j^{n+1}-T_{j-1}^{n+1}\right)\right] \tag{4}$$

其中 Δt 是时间步长, Δx 是空间步长, $K_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+1}=K\left(x_{j\pm\frac{1}{2}},\ t^{n+1},\ \frac{1}{2}\left(T_{j\pm1}^{n+1}+T_j^{n+1}\right)\right)$.

为了不使附标造成混乱,在下面凡出现"$n+1$"之处,予以省略. 如用 T_j 表示 T_j^{n+1}, 用 $T_{j,n}$ 表示 T_j^n. 且令 $r=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. 则 (4) 式可写为:

$$T_j^4-T_{j,n}^4=r\left[K_{j+\frac{1}{2}}(T_{j+1}-T_j)-K_{j-1/2}(T_j-T_{j-1})\right]\quad j=1,2,\cdots,J-1. \tag{5}$$

$j=0$, J 为边界点. 加上边界条件, 则 (5) 是一个非线性的代数方程组. 用迭代方法求解. 用 (s) 表示第 s 次迭代值;对 (5) 中右端出现的非线性项, 这里假定是作简单的线性化处理,即 $K_{j+\frac{1}{2}}(T_{j+1}-T_j)$ 是取 $K_{j+1/2}^{(s)}(T_{j+1}^{(s+1)}-T_j^{(s+1)})$. 着重研究对 T_j^4 的处理, 这是辐射流体力学计算中才有的特殊问题. 可以有不同的处理方法, 我们数值试验了以下的七种方法:

(1) 简单的线性化方法:

$$T_j^{4(s+1)}\simeq T_j^{3(s)}T_j^{(s+1)} \tag{6}$$

(2) Newton 线性化方法:

$$T_j^{4(s+1)}\simeq T_j^{4(s)}+4T_j^{3(s)}\left(T_j^{(s+1)}-T_j^{(s)}\right) \tag{7}$$

(3) Richtmyer 线性化方法[1]:

实质上是将方程 (3) 的左端 $\frac{\partial T^4}{\partial t}$ 项写成 $4T^3\frac{\partial T}{\partial t}$, 然后建立差分,对应于 (5) 的左端应为:

$$T_j^{4(s+1)}-T_{j,n}^4\simeq 4T_j^{3(s)}\left(T_j^{(s+1)}-T_{j,n}\right) \tag{8}$$

(4) 因式分解线性化方法:

$$T_j^{4(s+1)}-T_{j,n}^4\simeq\left(T_j^{(s+1)}-T_{j,n}\right)\left(T_j^{(s)}+T_{j,n}\right)\left(T_j^{2(s)}+T_{j,n}^2\right) \tag{9}$$

表 1 系数 $A_j^{(s)}$, $B_j^{(s)}$, $C_j^{(s)}$, $D_j^{(s)}$ 的表达式

序号	$A_j^{(s)}$	$B_j^{(s)}$	$C_j^{(s)}$	$D_j^{(s)}$
1	$rK_{j-1/2}^{(s)}$	$T_j^{3(s)}+A_j^{(s)}+C_j^{(s)}$	$rK_{j+1/2}^{(s)}$	$T_{j,n}^4$
2	$rK_{j-1/2}^{(s)}$	$4T_j^{3(s)}+A_j^{(s)}+C_j^{(s)}$	$rK_{j+1/2}^{(s)}$	$T_{j,n}^4+3T_j^{4(s)}$
3	$rK_{j-1/2}^{(s)}$	$4T_j^{3(s)}+A_j^{(s)}+C_j^{(s)}$	$rK_{j+1/2}^{(s)}$	$4\cdot T_{j,n}\cdot T_j^{3(s)}$
4	$rK_{j-1/2}^{(s)}$	$(T_j^{(s)}+T_{j,n})(T_j^{2(s)}+T_{j,n}^2)+A_j^{(s)}+C_j^{(s)}$	$rK_{j+1/2}^{(s)}$	$T_{j,n}(T_j^{(s)}+T_{j,n})(T_j^{2(s)}+T_{j,n}^2)$
5	$rK_{j-1/2}^{(s)}$	$2(T_j^{3(s)}+T_{j,n}^3)+A_j^{(s)}+C_j^{(s)}$	$rK_{j+1/2}^{(s)}$	$2\cdot T_{j,n}(T_j^{3(s)}+T_{j,n}^3)$
6	$rK_{j-1/2}^{(s)}$	$4\left(\frac{T_j^{(s)}+T_{j,n}}{2}\right)^3+A_j^{(s)}+C_j^{(s)}$	$rK_{j+1/2}^{(s)}$	$4\cdot T_{j,n}\cdot\left(\frac{T_j^{(s)}+T_{j,n}}{2}\right)^3$

此外，还可将 $T_j^{(s+1)}$ 前的系数部分作某种加权平均，如对 (8) 中系数部分作算术平均则有：

(5) $$T_j^{4(s+1)} - T_{j,n}^4 \simeq 4\left(\frac{T_j^{3(s)} + T_{j,n}^3}{2}\right)(T_j^{(s+1)} - T_{j,n}) \quad (10)$$

(6) $$T_j^{4(s+1)} - T_{j,n}^4 \simeq 4\left(\frac{T_j^{(s)} + T_{j,n}}{2}\right)^3 (T_j^{(s+1)} - T_{j,n}) \quad (11)$$

将上述的 (6)—(11) 分别代入 (5)，经整理可写为：

$$-A_j^{(s)}T_{j-1}^{(s+1)} + B_j^{(s)}T_j^{(s+1)} - C_j^{(s)}T_{j+1}^{(s+1)} = D_j^{(s)} \quad (12)$$

其系数分别为表 1 所示.

将 (12) 写成追赶迭代形式：

追：
$$\left.\begin{aligned} w_j^{(s)} &= \frac{C_j^{(s)}}{B_j^{(s)} - A_j^{(s)}w_{j-1}^{(s)}} \\ v_j^{(s)} &= \frac{D_j^{(s)} + A_j^{(s)}v_{j-1}^{(s)}}{B_j^{(s)} - A_j^{(s)}w_{j-1}^{(s)}} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

赶：
$$T_j^{(s+1)} = w_j^{(s)}T_{j+1}^{(s+1)} + v_j^{(s)} \quad (14)$$

一般取 $T_j^{(0)} = T_{j,n}$，若相对误差：

$$|(T_j^{(s+1)} - T_j^{(s)})/T_j^{(s+1)}| < \varepsilon$$

有时亦可用绝对误差控制，ε 为迭代误差控制限，则 $T_{j,n+1} = T_j^{(s+1)}$.

在这些不同的处理方法中，迭代收敛的情况是不相同的，为了有一个定性上的概念，下面列举一个数值试验的例子.

3. 数值实验结果

将求解区间 [0,1] 分为十等分，即 $\Delta x = 0.1$，若取 $r = 1/2$，此时 $\Delta t = 0.005$. 设初边界条件取为：

x_j	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$T_{j,0}$	0.0	10000	1000	1000	100	100	10	10	1.0	1.0	1.0

这是为模拟在同一个计算模型中有不同的温度段，若取 $\varepsilon = 10^{-5}$. 此时迭代误差集中在低温度段. 但对表一中序号为 1 的方法，必须特别指出，它迭代不收敛. 当迭代到 29 次时，溢出停机，且不满足迭代误差限的点几乎遍及各点. 在前 28 次迭代中，各点不满足误差的次数情况为：

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
S	0	14	20	18	27	25	28	28	28	28	0

在表 2 中列举了其它方法在前十排迭代次数的情况：

表 2

序号 \ 排数 / 迭代次数	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
2	5	3	3	3	3	2	2	2	2	2
3	41	12	8	6	5	5	4	4	4	4
4	21	7	5	4	4	3	3	3	3	3
5	27	7	5	4	4	4	3	3	3	3
6	18	6	5	4	4	3	3	3	3	3

由于有 T^4 因子存在，在高温时它起着主导作用，为此，进一步考察方法在高温下的情形取初边界条件为：$T_{j,0} = 10000\, x_j\,(1 - x_j)$ 即为：

x_j	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$T_{j,0}$	0.0	900	1600	2100	2400	2500

由于对 $x = 0.5$ 具有对称性，故只列出一半的数据．取 $\varepsilon = 0.4 \times 10^{-11}$ 进行数值试验．发现序号为 2—6 的各种方法均可适用，而且迭代次数在 1—3 次．综合而言，方法 1 是不可取的，因为它迭代不收敛，方法 2 是最可取的，因为它对高温、低温迭代次数均较少．其它的方法也是可以用的，但有时迭代次数较多一些．理论上在某种假定的条件下是可以证明的．我们将方法 2 实际应用于方程 (2)[2]． 编制了二维的多种介质的计算程序，对柱对称模型、球对称模型以及球柱结合模型进行了实际的数值计算，表明这种方法是可行的．故我们将方法 2 命名为 Newton-追赶迭代方法．

最后，周宏同志参加了部分数值试算工作，特致谢．

参 考 文 献

[1] Smith, G. D., Numerical Solution of Partial Differential Equation Second edition 1978.
[2] 张锁春，抛物型方程的定解问题的有限差分数值计算，全国第二次"计算物理"讲座讲义，1982. 4.

A SPECIAL PROBLEM IN THE CALCULATION OF FLUID DYNAMIC EQUATIONS WITH RADIATION

Zhang Souchun
(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

By focusing attention on the feature of the T^4 factor, a numerical method to solve the fluid dynamic equations with radiations, known as the Newton-chasing method (double sweep), is presented in this paper. This method appears to be practical and effective.