第17卷 第4期
1985年7月

力学学报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 17, No. 4
July, 1985

柱体非线性散射问题的辐射条件[1)]

周清甫
（中山大学）

提要 本文证明了在无限水深情况下 Stokes 波对柱体的散射问题的辐射条件仍然是 Sommerfeld 条件.

近二十年来，非线性波对海洋结构物的作用问题一直受到学者们的重视，因为线性理论仅适用于波幅和波倾角较小的情形，如果波幅增大就应考虑非线性效应、非线性作用还会使结构产生二阶低频振荡力和平均二阶漂移力，这对于系泊浮体的作用力和大结构的共振有着重大的意义[1]. 此外，即使在波幅不大的情况下，对于相同的波幅和频率而言，非线性理论可得到比线性结果更大的波长，而这是符合海洋实际情况的[2]. 散射的线性问题在理论上已由 John[3] 等人解决，他证明在 Sommerfeld 辐射条件下，解是唯一的. 但对于非线性问题，其摄动解的二阶方程是带有非齐次自由表面条件的边值问题，无穷远处的辐射条件应如何提法呢？这是一个有争议的问题. 本文构造了一个满足方程和非齐次表面条件的特解，证明它在无穷远处是小于或等于 $O(r^{-\alpha})$，其导数小于或等于 $O(r^{-\gamma})$，$1>\alpha$，$\gamma>1/2$；$r^2=x^2+y^2$，即是水平距离. 可见它本身满足 Sommerfeld 条件；余下的齐次边值问题可仿效一阶问题提辐射条件，从而证明了二阶摄动方程在 Sommerfeld 辐射条件下，解是唯一确定的.

一、基本方程和边界条件

为了叙述得具体确切，我们假定柱体为圆柱. 但所得结论对任意截面的柱体都是成立的，坐标系如下图所示.

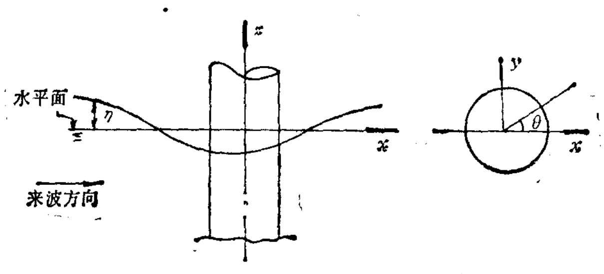

图 1

入射波为 Stokes 波，它的二阶表达式为

1）中国科学院科学基金资助的课题.
本文于1983年8月1日收到.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Phi_I = -\frac{\varepsilon\sigma}{k^2} i e^{kz} e^{i(kx-\sigma t)} \tag{1}$$

式中 σ、k 分别表示频率和波数，它们之间应满足色散关系

$$\sigma^2 = gk(1 + k^2a^2) \tag{2}$$

a 为入射波波幅. 由已知展式

$$e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^n J_n(kr) \cos n\theta$$

则入射波可表为

$$\Phi_I = \left\{ -\frac{\varepsilon\sigma}{k^2} e^{kz} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^{n+1} J_n(kr) \cos n\theta \right\} e^{-i\sigma t}. \tag{3}$$

其中 $\delta_0 = 1$; $\delta_n = 2$, $n > 0$. J_n 为柱函数. ε 为小参量: $\varepsilon = ka$. r 是径坐标，$r^2 = x^2 + y^2$ 散射问题的基本方程和边条件为 (η 为表面升高):

$$\nabla^2\Phi(r, \theta, z, t) = 0 \tag{4}$$

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}\left(\Phi_r^2 + \Phi_z^2 + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2 \right) = 0, \text{ 在 } z = \eta \tag{5}$$

$$\eta_t + \Phi_r\eta_r + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta\eta_\theta = \Phi_z, \quad \text{在 } z = \eta \tag{6}$$

$$\Phi_r = 0, \quad \text{当 } r = a \tag{7}$$

$$\Phi_z \to 0 \quad \text{当 } z \to -\infty \tag{8}$$

$r = a$ 为柱体半径，还有辐射条件，从物理意义来说，它规定散射波向外传播，从数学上而言它应使问题的解存在而且唯一，辐射条件将在各阶近似方程中分别给出.

以 $\varepsilon = ka$ 为小参量，将 Φ、η 展开:

$$\begin{aligned} \Phi &= \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \cdots \\ \eta &= \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \cdots \\ \tau &= \sigma t \end{aligned} \tag{9}$$

在一般情况下(有限水深和三阶以上的近似中)应将 σ 展开: $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \cdots$. 不过在深水问题中，由(2)式可知 $\sigma_1 = 0$，这意味着当只计算到二阶时可不展开 σ. 再将 Φ_1、Φ_2 分解为两部分:

$$\Phi_1 = \Phi_I + \Phi_{1s}; \ \Phi_2 = \Phi_{2s} \tag{10}$$

其中 Φ_I 为入射波速势，Φ_{1s} 和 Φ_{2s} 是一阶和二阶散射速势. 一般情况下，入射波速势应有二阶项，但在深水情形，由(1)和(2)式可知二阶入射波项不存在.

将(9)、(10)代入基本方程 (4)—(8) 式，得到关于散射势 Φ_{1s}，Φ_{2s} 的方程和边界条件如下:

$$\begin{aligned} &\nabla^2\Phi_{1s} = 0; \ g\frac{\partial\Phi_{1s}}{\partial z} + \sigma^2\frac{\partial\Phi_{1s}}{\partial\tau^2} = 0, \text{ 当 } z = 0 \\ &\frac{\partial\Phi_{1s}}{\partial r} = -\frac{\partial\Phi_I}{\partial r}, \text{ 当 } r = a; \ \frac{\partial\Phi_{1s}}{\partial z} \to 0, \text{ 当 } z \to -\infty \end{aligned} \tag{11}$$

以及

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\nabla^2\Phi_{2s}=0;\ g\frac{\partial\Phi_{2s}}{\partial z}+\sigma^2\frac{\partial^2\Phi_{2s}}{\partial\tau^2}=F_2\ \text{当}\ z=0$$
$$\frac{\partial\Phi_{2s}}{\partial r}=0,\ \text{当}\ r=a;\ \frac{\partial\Phi_{2s}}{\partial z}\to 0;\ \text{当}\ z\to-\infty \tag{12}$$

对于一阶问题 John 已经证明在 Sommerfeld 辐射条件下:

$$\sqrt{r}\left(\frac{\partial\Phi_{1s}}{\partial r}-ik\Phi_{1s}\right)\to 0,\ \text{当}\ r\to\infty \tag{13}$$

问题(11)的解是唯一的.

对于这一问题，Maccamy[4] 等人已给出解析解

$$\Phi_{1s}=\phi_{1s}\exp(-i\tau)$$
$$\phi_{1s}=\frac{\sigma}{k^2}e^{kz}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n i^{n+1}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}H_n(kr)\cos n\theta. \tag{14}$$

式中 J_n, $H_n^{(1)}$ 为柱函数,右上角符号“′”表示对变元的导数.

对于二阶问题(12),其中的 F_2 是已知的,由上述一阶解 Φ_1 所决定:

$$F_2=\sigma\Phi_{1\tau}\left(\Phi_{1z}+\frac{\sigma^2}{g}\Phi_{1\tau\tau}\right)_z-\sigma\left(\Phi_{1r}^2+\Phi_{1z}^2+\frac{1}{r^2}\Phi_{1\theta}^2\right)_\tau \tag{15}$$

上式中的下标 $()_z$、$()_\tau$ 表示对 z 和 τ 的导数. 由(1)和(14)可知

$$\Phi_1=\left\{\frac{\sigma}{k^2}e^{kz}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(r)\cos n\theta\right\}e^{-i\tau} \tag{16}$$

$$P_n=-\delta_n i^{n+1}\left\{J_n(kr)-\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}H_n^{(1)}(kr)\right\} \tag{17}$$

二、二阶非齐次自由边界条件的特解和渐近性质

本节讨论二阶解求法. 将 Φ_{2s} 分解为两部分 $\Phi_{2s}=\phi_2+\Phi_2^{(0)}$、它们分别满足方程和边条件如下:

$$\nabla^2\phi_2=0;\ g\phi_{2z}+\sigma^2\phi_{2\tau\tau}=F_2,\ \text{当}\ z=0. \tag{18}$$

以及

$$\nabla^2\Phi_2^{(0)}=0;\ g\Phi_{2z}^{(0)}+\sigma^2\Phi_{2\tau\tau}^{(0)}=0,\quad \text{当}\ z=0$$
$$\Phi_{2r}^{(0)}=-\phi_{2r},\ \text{当}\ r=a. \tag{19}$$

(18)式表示非齐次自由表面条件所规定的特解，一般情况下 F_2 应含有一个与时间无关的项,它表示由于非线性引起的水位变动. 但在无限水深情况下,由(15)和(16)式可知 F_2 不含有与时间无关的项,此点与深水 Stokes 波的性质相同. F_2 均由含有因子 $e^{-2\tau i}$ 的项组成,因此可写为

$$F_2=f\exp(-2\tau i) \tag{20}$$

对应地将 ϕ_2 表为 $\phi_2=\chi\exp(-2\tau i)$. χ 满足:

$$\nabla^2\chi=0;\ g\chi_z-4\sigma^2\chi=f,\ \text{当}\ z=0. \tag{21}$$

我们通过在自由表面上分布源点的办法求(21)的特解,源点密度为 f/g. 如果记 $\lambda=4\sigma^2/g$，则 χ 可表为

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\chi=\frac{g^{-1}}{2\pi}\iint_{\bar{r}\geqslant a}G(x,y,z;\ \xi,\eta,0)f(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{22}$$

其中 $\bar{r}=(\xi^2+\eta^2)^{1/2}$，$G$ 为格林函数

$$G=\frac{1}{r_1}+\lambda\int_0^\infty\frac{e^{kz}}{k-\lambda}J_0(KR)dK+\pi\lambda Y_0(\lambda R)e^{\lambda z} \tag{23}$$

$$r_1=\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\}^{1/2}$$

$$R=\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{1/2}$$

式中的积分为哥西主值积分．J_0、Y_0 为零阶柱函数．

(22)式中 f 可通过(15)求得，它们是

$$f(x,y)=\frac{i\sigma^3}{k^4}(A_1^2+A_2^2+A_3) \tag{24}$$

$$A_1^2=\frac{1}{2}\left(P_{0r}^2+\sum_{n=0}^{\infty}P_{nr}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}P_{ir}P_{jr}-P_{m/2,r}^2+\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=0}^{\infty}P_{n,r}P_{n+m,r}\right)\cos m\theta,$$

$$A_2^2=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2P_n^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 1}}ijP_iP_j+\frac{m^2}{4}P_{m/2}^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+m)P_nP_{n+m}\right]\cos m\theta\right\},$$

$$A_3^2=k^2\left\{\frac{1}{2}\left(P_0^2+\sum_{n=0}^{\infty}P_n^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}P_iP_j-P_{m/2}^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\sum_{n=0}^{\infty}P_nP_{n+m}\right)\cos m\theta\right\}.$$

现在证明 ϕ_2 是(18)的解．显然 ϕ_2 满足 Laplace 方程及底部条件．其次利用公式

$$\int_0^\infty e^{kz}J_0(KR)dK=r_1^{-1}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\lambda G\right)_{z=0}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{\lambda}{r_1}+\lambda\int_0^\infty e^{kz}J_0(KR)\,dK$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)$$

可得到

$$g\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}-\lambda\chi\right)_{z=0}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z<0}}\frac{1}{2\pi}\iint_{\bar{r}\geqslant a}f(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\xi d\eta$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi}\iint_{(\bar{r}\geqslant a)-S_0}\frac{-zf(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\}^{3/2}}$$

$$+\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi}\iint_{S_0}f(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\xi d\eta.$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\bar{r}=(\xi^2+\eta^2)^{1/2}.$$

其中 S_0 是包含点 (x, y) 的小区域．上式右边第一个积分为零．而由位势理论可知

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi}\iint_{S_0} f\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\xi d\eta=f(x, y)$$

从而证明了 χ 满足非齐次边界条件(21)．

现在分析 ϕ_2 在无穷远处的渐近性质．文献[5]给出了计算式

$$\int_0^\infty \frac{K+\lambda}{K-\lambda}e^{kz}J_0(KR)dK=\lambda e^{\lambda z}\left\{\frac{1}{\lambda R}-\pi(H_0(\lambda R)-y_0(\lambda R))\right.$$
$$\left.-\int_0^{-\lambda z}\frac{Se^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{3/2}}-\int_0^{-\lambda z}\frac{e^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{1/2}}\right\}$$

H_0 是零阶 Struve 函数．由此则 G 可表为

$$G=\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda z}\left\{\frac{1}{\lambda R}-\pi(H_0(\lambda R)+y_0(\lambda R))-\int_0^{-\lambda z}\frac{se^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{3/2}}\right.$$
$$\left.-\int_0^{-\lambda z}\frac{e^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{1/2}}\right\}+\frac{1}{2r_1}+\pi\lambda y_0(\lambda R)e^{\lambda z}.$$

注意到

$$\int_0^{-\lambda z}\frac{se^s}{(s^2+\lambda^2R^2)^{3/2}}=\frac{1}{\lambda R}-\frac{e^{-\lambda z}}{\lambda r_1}+\int_0^{-\lambda z}\frac{e^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{1/2}}$$

代人前式得到

$$G=\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda z}\left\{-\pi(H_0(\lambda R)+y_0(\lambda R))-2\int_0^{-\lambda z}\frac{e^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{1/2}}\right\}$$
$$+\pi\lambda y_0(\lambda R)e^{\lambda z}+\frac{1}{r_1} \tag{25}$$

考察同一水平面上的波形，即令 z 固定．当 $R\to\infty$ 时有渐近展式

$$H_0(\lambda R)\sim y_0(\lambda R)+\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda R}+\frac{8\Gamma(3/2)}{\pi\Gamma(-1/2)}\frac{1}{\lambda^3R^3}+O(\lambda^{-5}R^{-5})$$

因此有

$$G\sim\left(\frac{1}{r_1}-\frac{e^{\lambda z}}{R}\right)+\frac{4\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)}\frac{\lambda}{\lambda^3R^3}e^{\lambda z}-\lambda e^{\lambda z}\int_0^{-\lambda z}\frac{e^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{1/2}}$$
$$+O(\lambda^{-5}R^{-5}).$$

另一方面

$$\lambda e^{\lambda z}\int_0^{-\lambda z}\frac{e^s ds}{(s^2+\lambda^2R^2)^{1/2}}=\lambda e^{\lambda z}\frac{1}{\lambda R}\int_0^{-\lambda z}e^s ds+O(\lambda^{-3}R^{-3})$$
$$=\frac{1}{R}-\lambda e^{\lambda z}\frac{1}{\lambda R}+O(\lambda^{-3}R^{-3}).$$
$$\frac{1}{r_1}\sim\frac{1}{R}+O(R^{-3})$$

由此可得 G 在 $R\to\infty$ 的渐近估计：

$$G\sim O(\lambda^{-3}R^{-3}),\ \text{当}\ R\to\infty \tag{26}$$

f 的渐近展式可由 J_n 和 Y_n 的渐近展式得到，因 f 是由 J_n 和 Y_n 的乘积项所组成．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以

$$f(x,y)\sim O(\lambda^{-1}r^{-1}) \quad 当\ r\to\infty. \tag{27}$$

现在估计 G 在 $R\to 0$ 时的性态. 已知 $H_0(\lambda R)\to 0$ 和 $Y_0(\lambda R)\sim \ln R$, 当 $R\to 0$ 时. 由此可得

$$G\sim O\left(\frac{1}{R}\right), \quad 当\ R\to 0,\ z\to 0 \tag{28}$$

$$G\sim O(\ln R), \quad 当\ R\to 0,\ z\neq 0 \tag{29}$$

综合估计式(26)、(28)、(29),可知在整个平面 $r\geqslant a$ 内可将 G 表为:

$$G=\frac{\tilde{G}(x,y,z;\xi,\eta,0)}{(\lambda R)^{1+\alpha}} \tag{30}$$

其中 $\tilde{G}$ 为有界:

$$|\tilde{G}|\leqslant M,\ 对于\ R>0$$

$$1>\alpha>\frac{1}{2} \tag{31}$$

因 f 在平面 $r\geqslant a$ 内连续. 而当 $r\to\infty$ 时有估计式(27), 因此可将它表为

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{N}{\lambda(x^2+y^2)^{1/2}},\ 当\quad r\geqslant a. \tag{32}$$

有了估计式(30)、(32),则可得 ϕ_2 的估计式如下:

$$|\phi_2|=|x|\leqslant\frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{\bar{r}\geqslant a}\frac{(NM)/\lambda^{1+\alpha}d\xi d\eta}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{(1+\alpha)/2}(\xi^2+\eta^2)^{1/2}}$$

现在研究 ϕ_2 在 $r\to\infty$ 时 $(r^2=x^2+y^2)$ 的性态. 由于对称性, 显然可令 $y=0$ 而不失一般性. 记 $\theta_1=x/r$, 并引入变换 $\xi_1=\xi/r$, $\eta_1=\eta/r$, 则

$$|\phi_2|\leqslant\frac{g^{-1}}{2\pi}[(MN)/\lambda^{1+\alpha}]\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi_1^2+\eta_1^2)^{-1/2}d\xi_1d\eta_1}{r^{\alpha}\{1+\xi_1^2+\eta_1^2-2\theta_1\xi_1\}^{(1+\alpha)/2}}$$

利用一个不等式

$$x^2-2\theta x+1\geqslant\frac{1}{2}(x-1)^2, \quad 如果\ 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

则上式可改写为

$$|\phi_2|\leqslant\frac{g^{-1}}{2\pi}[(MN)/\lambda^{1+\alpha}]\frac{1}{r^{\alpha}}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2^{(1+\alpha)/2}d\xi_1d\eta_1}{\{(\xi_1-1)^2+\eta_1^2\}^{(1+\alpha)/2}\{\xi_1^2+\eta_1^2\}^{1/2}}$$

可见上式中的积分在它所有的奇点处(包括无穷远点)都是收敛的. 所以当 $r\to\infty$, 则

$$|\phi_2|\leqslant\frac{A}{r^{\alpha}},\ 1>\alpha>1/2 \tag{33}$$

A 为常数. (33)式不仅证明了积分(22)的存在性,也证明了: 与一阶波幅相比(一阶波幅为 $O(r^{1/2})$), ϕ_2 的波幅当 $r\to\infty$ 时是高阶小量.

下面推导当 $r\to\infty$ 时 ϕ_{2r} 的估计式. 这只要对 ϕ_{2x} 估计就足够了. 首先让我们来改写 f 和 G_x 的表达式. 根据(32)式, f 可改写为

$$f(\xi,\eta)=\frac{f_1(\xi,\eta)}{(\xi^2+\eta^2)^{1/2}},\ |f_1|<M_1 \tag{34}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 $f_1(\xi, \eta)$ 为有界函数，这个式子只在 $r \geqslant a$ 的区域上成立. 不过可以将它扩充到整个平面上成立. 由(24)式，我们补充定义 $A_i(r, \theta)$ 在圆 $r \leqslant a$ 时取 $A_i(a, \theta)$ 值，这就完成了扩充工作，此时(34)式在整个平面成立. f_1 在全平面为有界的.

其次，重复对 G 估计的步骤，可得以下关于 G_x 的估计式:

$$G_x \sim O(\lambda^{-4}R^{-4}),\quad 当\ R \to \infty$$
$$G_x \sim O((x-\xi)/r_1^3),\quad 当\ R \to 0,\ z \to 0$$
$$G_x \sim O((x-\xi)/R^2),\quad 当\ R \to 0,\ z \neq 0$$

由此可将 G_x 表为下面的形式

$$G_x = \frac{x-\xi}{r_1^3}\widetilde{G}_1(x, y, z; \xi, \eta, 0) + \frac{x-\xi}{R^{2+\gamma}}\widetilde{G}_2(x, y, z, \xi, \eta, 0)$$

$\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$ 对所有的变量是有界的. $1 > \gamma > 1/2$.

将(22)式对 x 微商，代入以上各式，得到

$$\begin{aligned}\chi_x &= \frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{\bar r \geqslant a}\frac{(x-\xi)f_1(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\}^{3/2}(\xi^2+\eta^2)^{1/2}}\widetilde{G}_1\,d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{\bar r \geqslant a}\frac{(x-\xi)f_1(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{(2+\gamma)/2}\{\xi^2+\eta^2\}^{1/2}}\widetilde{G}_2 d\xi d\eta. \\ &= \frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)f_1(\xi, \eta)}{r_1^3\bar r}\widetilde{G}_1\,d\xi d\eta + \frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)f_1}{\bar r R^{(2+\gamma)/2}}\widetilde{G}_2\,d\xi d\eta \\ &\quad - \frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{\bar r \leqslant a}\frac{(x-\xi)f_1}{r_1^3\bar r}\widetilde{G}_1\,d\xi d\eta - \frac{g^{-1}}{2\pi}\iint\limits_{\bar r \leqslant a}\frac{(x-\xi)f_1}{\bar r R^{(2+\gamma)/2}}\widetilde{G}_2\,d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{35}$$

上式第三、四项是在有限区域的积分. 作变换 $\xi_1 = \xi/r$, $\eta_1 = \eta/r$, 记 $\theta_1 = x/r$, $\theta_2 = y/r$, $\theta_3 = z/r$ 则 χ_x 改写为

$$\begin{aligned}\chi_x &= \frac{g^{-1}}{2\pi r}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\theta_1-\xi)\,f_1\widetilde{G}_1\,d\xi_1 d\eta_1}{\{(\theta_1-\xi_1)^2+(\theta_2-\eta_1)^2+\theta_3^2\}^{3/2}\{\xi_1^2+\eta_1^2\}^{1/2}} \\ &\quad + \frac{g^{-1}}{2\pi r^\gamma}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\theta_1-\xi)f_1\widetilde{G}_2 d\xi_1 d\eta_1}{\{(\theta_1-\xi_1)^2+(\theta_2-\eta_1)^2\}^{(2+\gamma)/2}\{\xi_1^2+\eta_1^2\}^{1/2}} \\ &\quad + \frac{g^{-1}}{2\pi r}\iint\limits_{\xi_1^2+\eta_1^2 \leqslant a^2/r^2}\frac{(\theta_1-\xi_1)f_1\widetilde{G}_1\,d\xi_1 d\eta_1}{\{(\theta_1-\xi_1)^2+(\theta_2-\eta_1)^2+\theta_3^2\}^{3/2}\{\xi_1^2+\eta_1^2\}^{1/2}} \\ &\quad + \frac{g^{-1}}{2\pi r^\gamma}\iint\limits_{\xi_1^2+\eta_1^2 \leqslant a^2/r^2}\frac{(\theta_1-\xi_1)f_1\widetilde{G}_2 d\xi_1 d\eta_1}{\{(\theta_1-\xi_1)^2+(\theta_2-\eta_1)^2\}^{(2+\gamma)/2}\{\xi_1^2+\eta_1^2\}^{1/2}}\end{aligned} \tag{36}$$

显然 $\theta_1^2+\theta_2^2 = r^2$, $\theta_3 \to 0$, 当 $r \to \infty$. 这说明上式第三、四两个积分中，$(\xi_1, \eta_1) = (\theta_1, \theta_2)$ 不是积分的奇点. 唯一的奇点在 $(\xi_1, \eta_1) = (0, 0)$, 不过奇异性为 $(\xi_1^2+\eta_1^2)^{-1/2}$, 根据[5]中第七章的优函数判别法，可知它们在 $\theta_1^2+\theta_2^2 = r^2$ 和 $\theta_3 \to 0$ 的有限区域上连续，因而是有界的. 这就证明了第三、四积分是 $O(r^{-1})$ 和 $O(r^{-\gamma})$ 阶，$1 > \gamma > 1/2$. 再作变换 $\xi_2 = \xi_1 - \theta_1$, $\eta_2 = \eta_1 - \theta_1$. 则 χ_x 变为下式

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\chi_x = -\frac{g^{-1}}{2\pi r}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_2 f_1 \widetilde{G}_1 d\xi_2 d\eta_2}{\{\xi_2^2+\eta_2^2+\theta_3^2\}^{3/2}\{(\xi_2+\theta_1)^2+(\eta_2+\theta_2^2)^2\}^{1/2}}$$
$$-\frac{g^{-1}}{2\pi r^{\gamma}}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_2 f_1 \widetilde{G}_2 d\xi_2 d\eta_2}{\{\xi_2^2+\eta_2^2\}^{(2+\gamma)/2}\{(\xi_2+\theta_1)^2+(\eta_2+\theta_2)^2\}^{1/2}}$$
$$+O(r^{-1})+O(r^{-\gamma}). \tag{37}$$

第一个积分的奇点有两个：$\xi_2=\eta_2=0$，$\theta_3=0$；和 $\xi_2=-\theta_1$，$\eta_2=-\theta_2$．对于第一个奇点，其积分可能不收敛．但文献[5]中第十五章指出这是一个可去奇点，即当 $\theta_3\to 0$ 时，这个积分有确定的极限．只要以此极限值定义它在 $\theta_3=0$ 时的积分值，则此积分对参数 θ_3 连续．当应用文献 [5] 中第十五章有关定理时，要求单层势的密度函数满足一定条件，此条件相当于要求：设 E 为包围原点 $(\xi_2,\eta_2)=(0,0)$ 的一个充分小的邻域，对于任何属于 E 的两点 $(\xi_2^{(1)},\eta_2^{(1)})$ 和 $(\xi_2^{(2)},\eta_2^{(2)})$，满足关系

$$|\{(\xi_2^{(1)}+\theta_1)^2+(\eta_2^{(1)}+\theta_2)^2\}^{-1/2}-\{(\xi_2^{(2)}+\theta_1)^2+(\eta_2^{(2)}+\theta_2)^2\}^{-1/2}|$$
$$\leqslant K\{(\xi_2^{(1)}-\xi_2^{(2)})^2+(\eta_2^{(1)}-\eta_2^{(2)})^2\}^{\delta_1/2}$$

式中 K,δ_1 为常数，$\delta_1>0$．由于 $\theta_1^2+\theta_2^2=1$，此条件是成立的．对于积分中的第二个奇点，由于奇异性为$(-1/2)$阶，根据[5]中第七章的判别法，它对参数 θ_1,θ_2 是连续的．由此可知(37)的第一个积分对 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 是连续的，有连续性的区域为 $\theta_1^2+\theta_2^2=1$ 和 θ_3 充分小的闭区域．即这个积分对 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 一致有界．至于第二个积分的两个奇点都是使积分收敛的奇点，在上述闭区域上对 θ_1,θ_2 连续因而也是有界的．综合上述可得 χ_x 的估计式

$$|\phi_{2x}|=|\chi_x|\leqslant M_2O(r^{-\gamma}),\ 1>\gamma>1/2 \tag{38}$$

此式也就是 ϕ_{2r} 的估计式．

三、二阶近似的辐射条件

本节将给出本文的主要结果．先叙述二阶齐次方程的解．因为 $\Phi_{2s}=\phi_2e^{-2\tau i}+\Phi_2^{(0)}$．如果 $\Phi_2^{(0)}$ 表示为 $\Phi_2^{(0)}=\phi_2e^{-2\tau i}$，则 ϕ_2 应满足的方程和边界条件如下：

$$\begin{aligned}&\nabla^2\phi_2=0;\ \phi_{2z}-\lambda\phi_2=0,\ 在\ z=0\\&\phi_{2r}=-\chi_r,\ 在\ r=a\end{aligned} \tag{39}$$

边界条件中缺少了无穷远处的辐射条件．因为 John 已证明上述问题在 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}(\phi_{2r}-i\lambda\phi_2)=0 \tag{40}$$

下，解是唯一的．所以(40)式应是问题(39)的辐射条件．

现在证明本文的结论．根据 ϕ_2 和 ϕ_{2r} 的估计式(33)和(38)可知 ϕ_2 也满足(40)式．这就证明了满足辐射条件(40)的非齐次自由表面条件的二阶解 Φ_2 是存在的．至于唯一性是很明显的：设 $\Phi_2^{(1)},\Phi_2^{(2)}$ 为两个解，则它们的差

$$\Phi_2^{(0)}=\Phi_2^{(1)}-\Phi_2^{(2)}=\phi_2^{(0)}e^{-2\tau i}$$

则 $\phi_2^{(0)}$ 满足 Laplace 方程、辐射条件(40)以及条件：$\phi_{2r}^{(0)}=0$，当 $r=a$；$\phi_{2z}^{(0)}-\lambda\phi_2^{(0)}=0$，当 $z=0$．显然由 John 的唯一性证明，可得到 $\phi_2^{(0)}\equiv 0$．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参　考　文　献

[1] 顾樊祥，海洋工程中的流体力学问题，海洋工程，1(1984).

[2] Turgut Sarpkaya and Michael Isaacson, Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures, Chapter. 6, Published by VNB.

[3] John, F., On the Motion of Floating Bodies, II, *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 3 (1950), pp. 45—101.

[4] Maccamy, R. C. and Fucks, R. A., "Wave Forces on Piles: A Diffraction Theory", Beach Erosion Board, Technical Memo, 69, (1954), pp. 1—17.

[5] Grant, E. Heam, *J. Ship Research*, Vol. 21(1977), pp. 89—93.

[6] 索波涅夫，数学物理方程(中译本).

ON THE RADIATION CONDITION OF NONLINEAR WAVE SCATTERING PROBLEM FOR A VERTICAL CYLINDER*

Zhou Chinpu

(Department of Mechanics, Zhongshan University)

Abstract

In this paper, we show that if a Sommerfeld radiation condition

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{1}{2}}(\phi_{2r} - i\lambda\phi_2) = 0, \quad r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$\lambda = 4\sigma^2/g.$$

is added to the second-order approximation equation of the Stokes wave scattering problem for a vertical cylinder in deep water, the second-order solution exists and is unique. After representing the scattered velocity potential as the sum of two parts $\Phi_2 = \phi_2 e^{2\sigma ti} = \Phi_2^{(0)} + \psi_2$, where ψ_2 is particular solution of the boundary value problem with nonhomogeneous free surface condition, $g\psi_{2z} - 4\sigma^2\psi_2 = fe^{-2\sigma ti}$, we find that ψ_2 can be witten as

$$\psi_2 = \frac{e^{-2\sigma ti}}{2\pi}\iint_{\bar{r}\geq a} Gfd\xi d\eta, \quad \bar{r} = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \tag{2}$$

$$G = \frac{1}{r_1} + \lambda\int_0^\infty \frac{e^{kz}}{k-\lambda} J_0(KR)dK + \pi\lambda Y_0(\lambda R)e^{\lambda z}$$

$$r_1 = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{1/2}, \quad R = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{1/2}, \quad \lambda = 4\sigma^2/g.$$

And we obtain that $|\psi_2| \leqslant M_1 O(r^{-\alpha})$, $|\psi_{2r}| \leqslant M_2 O(r^{-\gamma})$, $1 > \alpha$, $\gamma > \frac{1}{2}$. In other words, ψ_2 satisfies the radiation condition (1). Our conclusion then follows by John's results (Comm. Pure and Applied Math. Vol. 3. pp. 45—101.).

* Project supported by the Chinese Academy of Sciences.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net