

# 带有任意条共线裂纹的无穷大板问题

王良国 林晓  
(华东工程学院)

**提要** 本文运用 Westergaard 方法和弹性体位移单值条件,提出了无穷大板内含任意条不等长共线裂纹的应力函数及  $K_I$  因子的统一表达式,着重讨论了无穷远处均匀受力、裂纹面上受集中力和分布力这三种加载方式的问题,通过例题还取得了一些精确解和数值解。

## 一

Willmore, T. J. 曾把 Durand, W. F. 在流体力学中的工作<sup>[1]</sup>加以推广,给出了带有两条共线等长裂纹的 Westergaard 函数<sup>[2]</sup>。后来 Barenblatt, G. I.<sup>[3]</sup> 和 Sih, G. C.<sup>[4]</sup> 都应用 Muskhelishvili 方法<sup>[5]</sup>分别求得带有两条和三条等长共线裂纹无限大板受均匀拉伸问题的应力强度因子。对于不等长两条或三条对称的共线裂纹问题,给出数值解<sup>[6]</sup>。本文讨论任意多条共线裂纹问题,求得应力函数和  $K$  因子的统一表达式。对于外载,讨论了受均匀拉伸和各裂纹上作用有一对集中力,而不同裂纹上的集中力又是不等值的情况。有了这些结果,通过积分并应用叠加法当然就可求得受各种不同载荷时的情况。

本文仅讨论 I 型裂纹问题,但其结果完全可以直接应用于 II 型和 III 型问题。因此对 II 型和 III 型问题这里就不再赘述。

## 二

带有任意多条共线裂纹的无限大板受均匀拉伸如图 1 所示,这些裂纹可以是既不等长也不等间距的。取该问题

$$Z_1(z) = \frac{\sigma \prod_j (z - c_j)}{\prod_j [(z - b_j)^2 - a_j^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

式中连乘号  $\prod_j$  遍及每一条裂纹,  $c_j$  为第  $j$  条裂纹上张开位移  $v$  的极值点,故  $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=c_j} = 0$ 。以下称  $c_j$  为驻点。(1)式是多值函数,规定初值取某一单值分支。本文中规定在  $y = 0, a_0 < x < (b_1 - a_1)$  这段实轴上取正的实数值,即

$$Z_1(x) = \frac{\sigma \prod_j |x - c_j|}{\prod_j |(x - b_j)^2 - a_j^2|^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

显然 (1) 式所示的  $Z_1(z)$  满足远处应力边条件。在裂纹面上  $Z_1(z)$ , 为纯虚数,故亦满足

裂纹面自由的边条件。剩下的是位移单值条件。若找到满足边条件的解析函数  $Z_I(z)$ , 即可求得应力场和位移场, 并且有(平面应力情况)

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{2}{E} I_m Z_I(x) \quad (3)$$

根据位移单值条件有:

$$\oint_{\Gamma} I_m Z_I(x) dx = 0 \quad (4)$$

其中  $\Gamma$  为任一裂纹表面的封闭回路。如果有  $n$  条裂纹, 则(1)式中有  $n$  个驻点  $c_j$ , 而(4)式中有  $n$  个回路  $\Gamma_j$ , 从而在满足位移单值条件的同时可以确定  $c_j$ , 至此就表明了(1)式是问题的解。

利用(1)式可求得  $K_I$  因子。令  $z$  落入第  $m-1$  条和第  $m$  条裂纹之间, 注意到这时共有  $2(m-1)$  个端点引起了幅角变化,  $Z_I(z)$  的分子上  $z$  跨过  $m-1$  个  $c_j$ 。经简化运算即可求得第  $m$  条裂纹的左端点  $A_m$  和右端点  $B_m$  处的应力强度因子分别为:

$$K_I^{A_m} = \sigma \sqrt{\pi a_m} \frac{\prod_j |b_m - a_m - c_j|}{a_m \prod_{j \neq m} |(b_m - a_m - b_j)^2 - a_j^2|^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

$$K_I^{B_m} = \sigma \sqrt{\pi a_m} \frac{\prod_j |b_m + a_m - c_j|}{a_m \prod_{j \neq m} |(b_m + a_m - b_j)^2 - a_j^2|^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

从以上可知, 问题的求解关键在于确定(1)式中的驻点  $c_j$ 。在一些裂纹分布有规律时,  $c_j$  可直接确定。在一般情况下, 则可用数值方法定出, 而没有原则上的困难。以下举几个例子说明。

1) 有无穷多条中心间距皆为  $2b$  的共线裂纹, 裂纹长  $2a$  和  $2e$  交替变化的情况。由于对称性, 可知驻点在各裂纹中点。则  $b_j = c_j = 2jb$ ;  $a_m = a$ ;  $a_{2j-1} = e$ 。由(1)式简化可得<sup>[8]</sup>:

$$Z_I(z) = \frac{\sigma \sin \frac{\pi z}{4b} \cos \frac{\pi z}{4b}}{\left[ \left( \sin^2 \frac{\pi z}{4b} - \sin^2 \frac{\pi a}{4b} \right) \left( \cos^2 \frac{\pi z}{4b} - \sin^2 \frac{\pi e}{4b} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

在长为  $2a$  的裂纹尖端和长为  $2e$  的裂纹尖端的应力强度因子分别为:

$$K_I^{(a)} = \sigma \frac{\left[ 2b \sin \frac{\pi a}{2b} \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ \cos^2 \frac{\pi a}{4b} - \sin^2 \frac{\pi e}{4b} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

$$K_I^{(e)} = \sigma \frac{\left[ 2b \sin \frac{\pi e}{2b} \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ \cos^2 \frac{\pi e}{4b} - \sin^2 \frac{\pi a}{4b} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

当  $a = e$  时就可得熟知的结果。

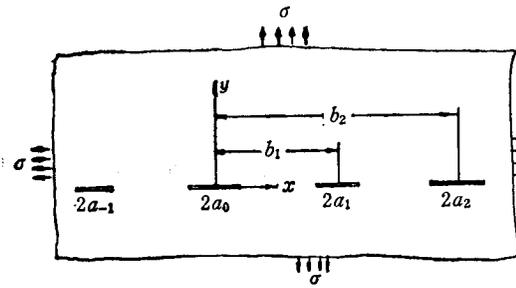


图 1

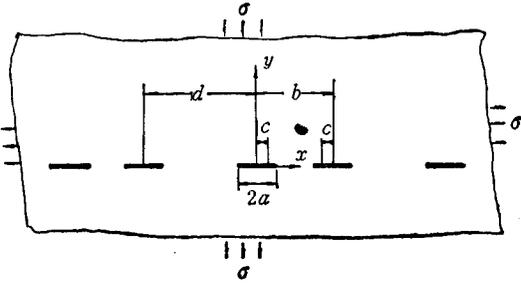


图 2

2) 当裂纹尺寸或间距有规律可循, 则驻点  $c_i$  也有一定规律. 如图 2 所示, 裂纹长皆为  $2a$ , 中心距以  $b$  和  $d$  交替变化. 这一问题曾被 Parihar, K. S. 用积分变换方法求解, 其结果相当复杂<sup>[7]</sup>. 由裂纹的双双对称性可知, 若第 0 条裂纹的驻点是  $c$ , 则第一条裂纹的驻点便是  $b - c$ , 在如图坐标下  $b_{2k+1} = b + (b + d)k$ ;  $b_{2k} = (b + d)k$ ;  $a_k = a$ ;  $c_{2k+1} = b - c + (b + d)k$ ;  $c_{2k} = c + (b + d)k$ . 从 (1) 式经简化运算可得<sup>[5]</sup>:

$$Z_1(z) = \frac{\sigma \sin \frac{\pi(z - b + c)}{b + d} \sin \frac{\pi(z - c)}{b + d}}{\left[ \sin^2 \frac{\pi(z - b)}{b + d} - \sin^2 \frac{\pi a}{b + d} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sin^2 \frac{\pi z}{b + d} - \sin^2 \frac{\pi a}{b + d} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

取第 0 条裂纹作积分

$$\int_{-a}^a I_m Z_1(x) dx = 0 \quad (11)$$

即可以定出驻点值  $c$ .

以上是两条裂纹的尺寸呈周期性变化的情况, 一般地, 若每一周期中心距长为  $T$ , 周期内共有  $n$  条裂纹, 第  $k$  条裂纹驻点为  $b_k + c_k$ , 则可得:

$$Z_1(z) = \frac{\sigma \prod_{k=1}^n \sin \frac{\pi(z - b_k - c_k)}{T}}{\prod_{k=1}^n \left[ \sin^2 \frac{\pi(z - b_k)}{T} - \sin^2 \frac{\pi a_k}{T} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

对同一周期内的  $n$  条裂纹作积分就可求出  $n$  个驻点  $b_k + c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 从而求得问题的解.

3) 对有限多条裂纹 (设为  $n$  条,  $n > 1$ ), 只有通过数值方法来求驻点值. 为计算上方便, 把  $Z_1(z)$  写成如下形式:

$$Z_1(z) = \frac{\sigma \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k + z^n \right)}{\prod_{k=1}^n [(z - b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

这里  $b_k, a_k$  仍为裂纹中点坐标和裂纹半长, 但  $c_k$  不是驻点, 而是多项式系数. 裂纹两端点的位移  $v$  相等, 故

$$\int_{b_j-a_j}^{b_j+a_j} I_m Z_1(x) dx = 0 \quad (14)$$

即:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{b_j-a_j}^{b_j+a_j} I_m \frac{x^k dx}{\prod_{k=1}^n [(x-b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= - \int_{b_j-a_j}^{b_j+a_j} I_m \frac{x^n dx}{\prod_{k=1}^n [(x-b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (15)$$

完成积分后, 得到  $n$  个关于  $c_k$  的线性代数方程组, 求出  $c_k$ , 从而得到  $Z_1(z)$  函数. 这在数学处理上没有什么困难.

### 三

带有有限多条共线裂纹的无限大板, 裂纹面上集中力作用的情况如图 3 所示. 板内共有长度为  $2a_j$ , 中心位置为  $z = b_j$  的  $n+1$  条裂纹. 在离裂纹中心为  $c_j$  处受一对集中力  $P_j$  作用, 则  $Z_1(z)$  应选为:

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= \frac{1}{\prod_{k=0}^n [(z-b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j P_j \prod_{k=0}^n |(b_j+c_j-b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}}{\pi(z-b_j-c_j)} + f(z) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

由于其中根式函数的多值性, 本文规定其在  $a_0 < x < (b_1 - a_1)$ ,  $y = 0$  这段实轴上取正实数的那一支. 式中  $b_0 = 0$ ,  $f(z)$  为次数不高于  $n$  的实系数多项式:

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n \quad (17)$$

容易证明 (16) 式满足在远处和在裂纹上  $z = b_m + c_m$  时的边界条件. 当  $z \rightarrow b_m + c_m$  时, 把  $Z_1(z)$  的奇异项分离出来

$$Z_1(z) \approx \frac{-iP_m}{\pi(z-b_m-c_m)}$$

令  $\zeta = z - b_m - c_m = r e^{i\theta}$ , 然后算出在此局部坐标上的  $\sigma_r$ . 将  $\sigma_r$  沿以  $z = b_m + c_m$  为圆心的足够小的半圆上积分, 即可证明也满足集中力作用点处的边界条件. 关于位移单值条件, 将 (16) 式代入 (14) 式并令  $j = 0, 1, \dots, n$  即可确定  $f(z)$  中的  $n+1$  个常数. 故在确定  $n+1$  个常数的同时, 位移单值条件也得到了满足. 从而证实了 (16) 式所示的  $Z_1(z)$  就是问题的解. (16) 式代入 (14) 式时为奇异积分, 本文都是在 Cauchy 主值意义下讨论奇异积分, 从而积分是收敛的.

这里还有一个重要的特性, 即 (17) 式中的  $n$  次项的系数  $\alpha_n = 0$ . 关于这点, 只要取

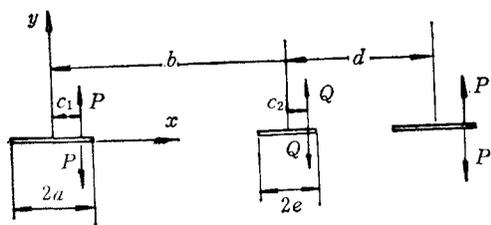


图 3

一个封闭回路  $\Gamma = \Gamma_R + \Gamma_x$ .  $\Gamma_R$  为  $|z|=R$  ( $0 < \theta < \pi$ ) 的半圆,  $R$  为包括所有裂纹的充分大值,  $\Gamma_x$  为  $x$  轴, 但在  $Z_1(z)$  的支点和极点处沿一个半径充分小的半圆绕过去. 将  $l_m Z_1(z)$  沿  $\Gamma$  积分即可证明  $\alpha_n \equiv 0$ . 由此可知对于  $n+1$  条裂纹,  $f(z)$  只是  $n-1$  次多项式, 任取  $n$  条裂纹回路来积分可决定  $n$  个常数. 这一性质对于数值计算是重要的.

当  $z$  落入第  $m-1$  和第  $m$  条裂纹之间时, 共有  $2m-2$  个支点的幅角值增加了  $(-\pi)$ . 据此由 (16) 式可得第  $m$  条裂纹左端点  $A_m$  和右端点  $B_m$  处的  $K$  因子为:

$$K_I^A = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n |(b_m - a_m - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}} \times \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{j+m} P_j \prod_{k=0}^n |(b_j + c_j - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}}{(\pi a_m)^{\frac{1}{2}} (b_j + c_j + a_m - b_m)} + (-1)^{m-1} \left(\frac{\pi}{a_m}\right)^{\frac{1}{2}} f(b_m - a_m) \right\} \quad (18)$$

$$K_I^B = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n |(b_m + a_m - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}} \times \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{j+m} P_j \prod_{k=0}^n |(b_j + c_j - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}}{(\pi a_m)^{\frac{1}{2}} (b_m + a_m - b_j - c_j)} + (-1)^m \left(\frac{\pi}{a_m}\right)^{\frac{1}{2}} f(b_m + a_m) \right\} \quad (19)$$

通过上面分析可知, 唯一需要确定的是多项式  $f(z)$ . 这里以一些例子加以说明.

1) 设有三条共线裂纹, 仅在第 0 条裂纹上有一集中力  $P$  作用. 则取

$$Z_1(z) = \frac{P \{(a^2 - c^2)[(c - b_1)^2 - a_1^2][(c - b_2)^2 - a_2^2]\}^{\frac{1}{2}}}{\pi \{(z^2 - a_0^2)[(z - b_1)^2 - a_1^2][(z - b_2)^2 - a_2^2]\}^{\frac{1}{2}}} \times \left\{ \frac{1}{z - c} + A_1 Z + A_0 \right\} \quad (20)$$

式中  $A_1$  和  $A_0$  可取两条裂纹作回路积分来决定. 为避免奇异积分, 可取第一条和第二条裂纹. 代入 (14) 式并完成积分后, 即可解方程组求得  $A_1$  和  $A_0$ , 于是  $Z_1(z)$  就确定了.

2) 设长为  $2a$ 、 $2c$  的共线裂纹交替分布, 中心距分别为  $b$  和  $d$ , 受力分别为  $P$  和  $Q$ , 力作用点离裂纹中心为  $c_1$ 、 $c_2$  (图 3), 则在如图坐标系下  $b_{2k} = (d + b)k$ ;  $b_{2k+1} = (b + d)k + b$ ;  $c_{2k} = c_1$ ;  $c_{2k+1} = c_2$ ;  $a_{2k} = a$ ;  $a_{2k+1} = c$ ;  $P_{2k} = P$ ;  $P_{2k+1} = Q$ . 由于这个问题的周期性并注意到  $\alpha_n = 0$  就可

知只有一个常数. 对  $Z_1(z)$  表达式作奇偶分解并进行简化运算<sup>[8]</sup>即可得:

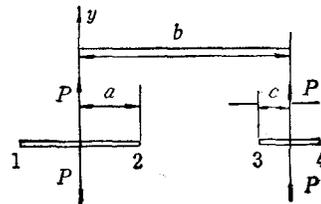


图 4

$$\begin{aligned}
 Z_I(z) = & \frac{1}{b+d} \cdot \frac{1}{\left[ \left( \sin^2 \frac{\pi z}{b+d} - \sin^2 \frac{\pi a}{b+d} \right) \left( \sin^2 \frac{\pi(z-b)}{b+d} - \sin^2 \frac{\pi e}{b+d} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \\
 & \cdot \left\{ P \left[ \left( \sin^2 \frac{\pi a}{b+d} - \sin^2 \frac{\pi c_1}{b+d} \right) \left( \sin^2 \frac{\pi(c_1-b)}{b+d} - \sin^2 \frac{\pi e}{b+d} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
 & \left. \left. \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-c_1)}{b+d} - Q \left[ \left( \sin^2 \frac{\pi(b+c_2)}{b+d} - \sin^2 \frac{\pi a}{b+d} \right) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \times \left( \sin^2 \frac{\pi e}{b+d} - \sin^2 \frac{\pi c_2}{b+d} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-b-c_2)}{b+d} + A \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

任取一条裂纹积分即可确定常数  $A$ 。

若  $d = b$ ;  $c_1 = c_2 = 0$ , 则  $A = 0$ , 故

$$\begin{aligned}
 Z_I(z) = & \left\{ P \sin \frac{\pi a}{2b} \cos \frac{\pi e}{2b} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2b} - Q \sin \frac{\pi e}{2b} \cos \frac{\pi a}{2b} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-b)}{2b} \right\} / \\
 & \left\{ 2b \left[ \left( \sin^2 \frac{\pi z}{2b} - \sin^2 \frac{\pi a}{2b} \right) \left( \sin^2 \frac{\pi(z-b)}{2b} - \sin^2 \frac{\pi e}{2b} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (22)
 \end{aligned}$$

特别是当  $P = Q$ ,  $a = e$  时则可得熟知的结果。

若  $P = Q$ ,  $a = e$ ,  $d = b$ ,  $c_1 = -c_2 = c$  则 (21) 可化为

$$Z_I(z) = \frac{P \cos \frac{\pi c}{b} \left( \sin^2 \frac{\pi a}{b} - \sin^2 \frac{\pi c}{b} \right)^{\frac{1}{2}}}{b \left( \sin^2 \frac{\pi z}{b} - \sin^2 \frac{\pi a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[ \frac{1}{\sin \frac{\pi z}{b} - \sin \frac{\pi c}{b}} + D_1 \right] \quad (23)$$

$D_1$  由位移单值条件决定:

$$D_1 = - \frac{\int_{-a}^a \frac{dx}{\left( \sin \frac{\pi x}{b} - \sin \frac{\pi c}{b} \right) \left( \sin^2 \frac{\pi a}{b} - \sin^2 \frac{\pi x}{b} \right)^{\frac{1}{2}}} }{\int_{-a}^a \frac{dx}{\left( \sin^2 \frac{\pi a}{b} - \sin^2 \frac{\pi x}{b} \right)^{\frac{1}{2}}} } = \frac{\pi_1(-l^2)}{K \sin \frac{\pi c}{b}} \quad (24)$$

上式中  $K$ 、 $\pi_1(-l^2)$  为第一种和第三种全椭圆积分, 其模为

$$k = \sin \frac{\pi a}{b}; \quad l = \frac{\sin \frac{\pi a}{b}}{\sin \frac{\pi c}{b}} \quad (25)$$

一般来说  $\pi_1$  是非零的。文献 [9] 给出的  $Z_I(z)$  函数及  $K_I$  因子没有写上  $D_1$  这一项, 显然是错误的。

假如裂纹是以  $n$  条一周重复排列, 则同样可以写出类似于 (21) 式的  $Z_I(z)$  表达式。

3) 半长分别为  $a$  和  $c$  的两条共线裂纹, 相距为  $b$ , 在两裂纹中点分别受一对集中力  $P$  的作用 (图 4)。这种情况下的 Westergaard 函数应为:

$$Z_{II}(z) = \frac{P}{\pi \{(z^2 - a^2)[(z-b)^2 - c^2]\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{a(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{z} - \frac{c(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{z-b} - D_0 a \right\} \quad (26)$$

$D_0$  可取左裂纹计算：

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\{(a^2 - x^2)[(x - b)^2 - c^2]\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{a(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{c(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{x - b} - D_0 a \right\} dx = 0$$

令  $x = a \sin t$ ,  $B = b/a$ ,  $C = c/a$ , 则上式化为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{[(B - \sin t)^2 - C^2]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{(B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{\sin t} - \frac{C(B^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{B - \sin t} - D_0 \right\} dt = 0 \quad (27)$$

第一项为奇异积分, 取其 Cauchy 主值, 不难推得:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} dt}{[(B - \sin t)^2 - C^2]^{\frac{1}{2}} \sin t} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$$

其中

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}}{[(B - \sin t)^2 - C^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} & (t \neq 0) \\ \frac{B}{(B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}} & (t = 0) \end{cases}$$

完成 (27) 式的积分后便可得  $D_0$ , 于是可求出 4 个裂纹端点的应力强度因子:

$$\left. \begin{aligned} K_1^{(1)} &= \frac{P}{(\pi a)^{\frac{1}{2}} [(B+1)^2 - C^2]^{\frac{1}{2}}} \left\{ (B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} - C \left( \frac{B-1}{B+1} \right)^{\frac{1}{2}} + D_0 \right\} \\ K_1^{(2)} &= \frac{P}{(\pi a)^{\frac{1}{2}} [(B-1)^2 - C^2]^{\frac{1}{2}}} \left\{ (B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} + C \left( \frac{B+1}{B-1} \right)^{\frac{1}{2}} - D_0 \right\} \\ K_1^{(3)} &= \frac{P}{(\pi c)^{\frac{1}{2}} [(B-C)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left( \frac{B+C}{B-C} \right)^{\frac{1}{2}} - (B^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - D_0 \right\} \\ K_1^{(4)} &= \frac{P}{(\pi c)^{\frac{1}{2}} [(B+C)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}} \left\{ - \left( \frac{B-C}{B+C} \right)^{\frac{1}{2}} + (B^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + D_0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

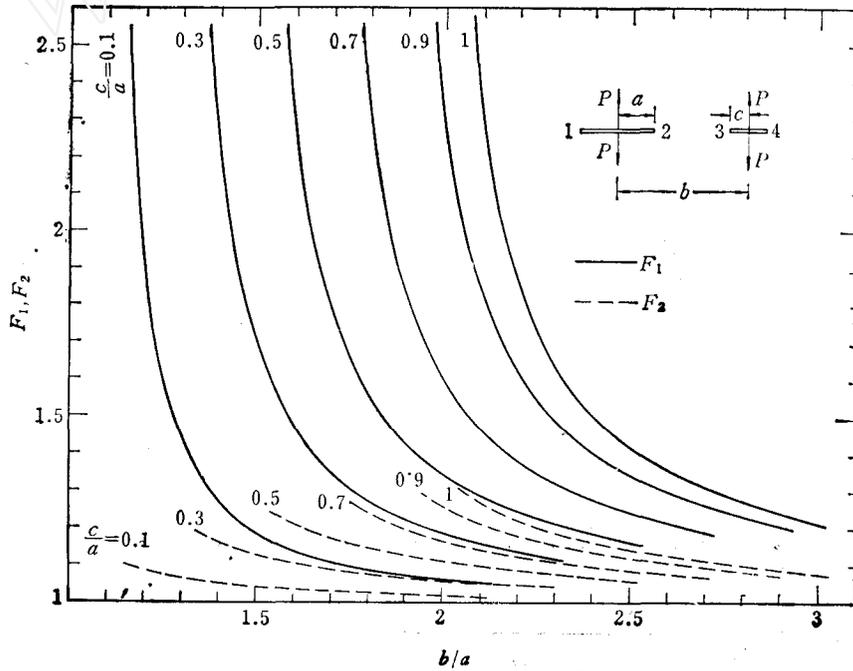


图 5

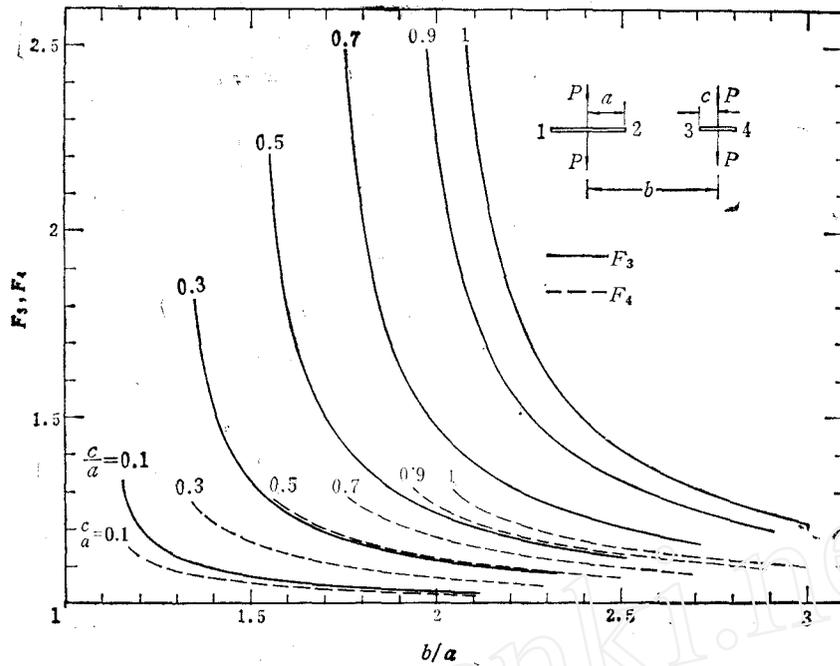


图 6

上式中  $B > C + 1$ ,  $0 < C \leq 1$ . 若令:

$$F_1 = \frac{K_1^{(1)}(\pi a)^{\frac{1}{2}}}{P} \quad F_2 = \frac{K_1^{(2)}(\pi a)^{\frac{1}{2}}}{P} \quad F_3 = \frac{K_1^{(3)}(\pi c)^{\frac{1}{2}}}{P} \quad F_4 = \frac{K_1^{(4)}(\pi c)^{\frac{1}{2}}}{P}$$

则  $F_1, F_2, F_3, F_4$  的四组曲线如图 5、图 6 所示。

#### 四

以下来讨论裂纹面上作用有分布力的情况。根据叠加原理可知在远处作用的任意载荷, 可以化成在裂纹面上作用有分布力来处理。

首先看裂纹面上受多个集中力作用的情况。由 (16) 式可知,  $Z_1(z)$  函数对载荷  $P_i$  是可以叠加的。如果在第  $m$  条裂纹上除了在  $z = b_m + c_m$  上作用有  $P_m$  力外, 还在  $z = b_m + c'_m$  处作用有  $Q_m$ , 则只需把

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^n [(z - b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-1)^m Q_m \prod_{k=0}^n |(b_m + c'_m - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}}{\pi(z - b_m - c'_m)}$$

加进 (16) 式即可。这样就立即可得各裂纹面上为分布力作用的表达式。即把 (16) 式的  $P_j$  换为  $p_j(\xi)d\xi$  并积分

$$Z_1(z) = \frac{1}{\prod_{k=0}^n [(z - b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \sum_{j=0}^n \left\{ (-1)^j \int_{b_j-a_j}^{b_j+a_j} \frac{p_j(\xi) \prod_{k=0}^n |(\xi - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}}{\pi(z - \xi)} d\xi + \alpha_j z^j \right\} \quad (29)$$

由前面分析可知  $\alpha_n = 0$ , 其余的  $n$  个常数由位移单值条件确定.

前面所举的有关例子也可直接推广为分布力的情况.

实行位移单值条件时, 可以用 Cauchy 主值方法处理奇异积分, 也可以用叠加法避开奇异积分. 当  $n+1$  条裂纹都有作用力时, 可以把  $Z_1(z)$  分解为  $n+1$  个  $Z_{1j}(z)$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ) 之和, 每个  $Z_{1j}$  只在第  $j$  条裂纹上受力, 其余裂纹上不受力. 于是

$$Z_{1j}(z) = \frac{(-1)^j}{\prod_{k=0}^n [(z - b_k)^2 - a_k^2]^{\frac{1}{2}}} \times \left\{ \int_{b_j-a_j}^{b_j+a_j} \frac{p_j(\xi) \prod_{k=0}^n |(\xi - b_k)^2 - a_k^2|^{\frac{1}{2}}}{\pi(z - \xi)} d\xi + \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{lj} z^l \right\} \quad (30)$$

这时, 利用不受力的  $n$  条裂纹作积分来决定  $n$  个常数  $\alpha_{lj}$ , 这样就不需要处理奇异积分了.

例如图 9 所示的带有两条等长裂纹的板. 在第一条裂纹上作用有分布力  $p(t)$ . 第二条裂纹上作用有分布力  $q(t)$ , 则选

$$Z_{11}(z) = \frac{1}{\pi[(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{-b}^{-a} \frac{p(t)[(b^2 - t^2)(t^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}}{z - t} dt - A_1 \right\} \quad (31)$$

用第二条裂纹决定  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{b}{K} \int_a^b \frac{dx}{[(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_{-b}^{-a} \frac{p(t)[(b^2 - t^2)(t^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}}{x - t} dt \quad (32)$$

同理可得

$$Z_{12}(z) = \frac{1}{\pi[(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ - \int_a^b \frac{q(t)[(b^2 - t^2)(t^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}}{z - t} dt - A_2 \right\} \quad (33)$$

$$A_2 = \frac{-b}{K} \int_{-b}^{-a} \frac{dx}{[(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_a^b \frac{q(t)[(b^2 - t^2)(t^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}}{x - t} dt \quad (34)$$

在  $z = a$  点的应力强度因子为:

$$K_I = \frac{1}{[\pi a (b^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \int_{-b}^{-a} \frac{p(t)[(b^2 - t^2)(t^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}}{a - t} dt - \int_a^b \frac{q(t)[(b^2 - t^2)(t^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}}{a - t} dt - A_1 - A_2 \right\} \quad (35)$$

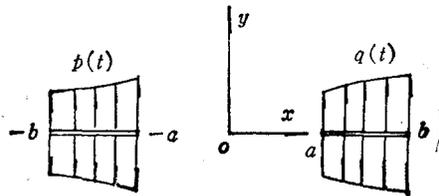


图 7

若  $p(x) = q(x)$  时, 则有  $A_1 = A_2$ , 这时退化为:

$$K_I = \frac{2}{[\pi a(b^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_a^b p(x) x \left( \frac{b^2 - x^2}{x^2 - a^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx - A_1 \right\} \quad (36)$$

据上所述, 关于无限大板带任意多条共线裂纹问题已全部可以求得解决。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Durand, W. F., *Aerodynamic Theory*, Vol ii.
- [ 2 ] Willmore, T. J., The distribution of stress in the neighborhood of a crack, *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.*, 2(1949).
- [ 3 ] Barenblatt, G. I., *Advances in Applied Mechanics*, 7(1962).
- [ 4 ] Sih, G. C., Boundary problems for longitudinal shear cracks, Proceeding, Second Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Pergaman Press, New York (1964).
- [ 5 ] Н. И. Мусхелишвили, 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社 (1958).
- [ 6 ] Isida, M., *Methods of Analysis and Solutions of crack Problems*, edit sih, G. C. (1973).
- [ 7 ] Parihar, K. S., *Proc. Sec. Edinburgh*, A69 (1971).
- [ 8 ] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社.
- [ 9 ] Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook* (1973), Del Research. Corp, Hellertown, Pa.

## PROBLEMS ON INFINITE PLATE WITH ARBITRARY COLLINEAR CRACKS

Wang Lianguo, Lin Xiao  
(East China Engineering Institute)

### Abstract

In this paper, Westergaard's method and the uniqueness condition on displacement of an elastic body are used to get general expressions for the stress function and the  $K_I$  factors of an infinite plate, in which there are several collinear straight cracks of different lengths. The discussions are concentrated to three cases of loading: uniform tension at infinity, a pair of colinear concentrated forces, or self equilibrating distributed forces normal to crack surfaces. Several exact and numerical solutions are shown as examples.