

带曲线裂纹圆柱体的 Saint-Venant 扭转

茹 重 庆

(北京大学力学系)

文[1]用 Melin 变换求解了带径向裂纹系圆柱体的扭转问题。本文改用 Cauchy 型积分的方法简洁地将其推广至带任意内曲线裂纹系圆柱体的扭转问题。

设挠曲函数 $W = K\varphi(x, y)$, K 为扭转率。若选取圆心为坐标原点, 则 φ 的定解问题为^[2]

$$\nabla^2 \varphi = 0, |\xi| < R, \xi \in L, \text{ 而 } \xi = x + iy$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma + L_{\pm} + L_{\pm}} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (x^2 + y^2)$$

其中 $\Gamma: |\xi| = R$, R 为圆半径; $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_m$ 为裂纹曲线, L_K 的始、末端点分别为 A_K, B_K , 且 L_K 不与 Γ 相交、也不形成闭路; n, τ 分别为 $(\Gamma + L_{\pm} + L_{\pm})$ 的法、切向, (n, τ) 构成右手螺旋。

以 $\varphi_{\pm}$ 分别表 φ 在裂纹左、右岸的极限值, 记 $(\varphi_{\pm} - \varphi_{\mp})|_L = 2F$, 设任一条裂纹的端点都不在其它裂纹线上, 则应有

$$F(A_K) = F(B_K) = 0 \quad (K = 1, 2, \cdots, m) \quad (1)$$

注意曲线的交点 c 处 F 发生间断, 但可证

$$\sum_i \pm F_i(c) = 0 \quad (2)$$

其中 i 表示对所有进、出于 c 点的裂纹线段求和, 进者取“+”, 出者取“-”, 而 $F_i(c)$ 表示该线段上 F 于 c 点的极限值。

现定义 L 外的调和函数 φ_1 :

$$\varphi_1(\xi) = \operatorname{Re} \Phi(\xi) \equiv \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2F}{z - \xi} dz \quad \xi \in L \quad (3)$$

注意 φ 在 L 两岸的法向导数等值反号, 则可证 φ 的共轭调和函数 ψ 在 L 两岸的值相等。再根据 Cauchy 型积分在端点、角点和交点邻域的简单性质^[3], 利用解析函数的熟知结论可以证明 $[\varphi + i\psi - \Phi]$ 必为圆内解析函数。于是其实部 $(\varphi - \varphi_1)$ 必为圆内调和函数, 记为 φ_2 , 即 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 。

先让 φ 满足 Γ 上的边界条件, 即:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma}$$

解此 Neumann 问题^[2], 最后解可写成

$$\varphi_2(\xi) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln(\xi - R^2/\bar{z}) 2f e^{-i\alpha(z)} dz \quad (4)$$

这里 $\alpha(z)$ 表 L 上 z 点正切向与 x 轴夹角, $f = dF/dS$, S 为 L 的弧长, 故 $dz = dS e^{i\alpha(z)}$. 其实, φ_2 显然是调和函数. 再利用(1)与(2)式可以证明

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \Big|_r = \operatorname{Re} \frac{\xi}{2\pi i R} \int_L \left(\frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{\xi - R^2/\bar{z}} \right) 2f e^{-i\alpha(z)} dz, \quad \xi \in \Gamma$$

注意 f 沿 L 的积分在交点处应分成两段.

继而因

$$\xi \left(\frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{\xi - R^2/\bar{z}} \right) = \left(-1 + 2\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z - \xi} \right) \right)$$

由上述立即得到

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) \Big|_r = 0$$

于是 φ_2 确实为所求解.

注意 f 是实函数, 则据 Сохоцкий-Plemely 公式^[3], 裂纹两岸的边界条件化为同一式子

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha(\xi)} \left(\frac{1}{z - \xi} + \frac{1}{\xi - R^2/\bar{z}} \right) \right] 2f e^{-i\alpha(z)} dz + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0, \quad \xi \in \tilde{L} \quad (5)$$

注意, 我们用 $\tilde{L}$ 表示除去端点, 角点和交点的 L . 此方程可写成通常形式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{z - \xi} 2f e^{-i\alpha(z)} dz + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{\xi - R^2/\bar{z}} - i \operatorname{Im} \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{z - \xi} \right] 2f e^{-i\alpha(z)} dz \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0 \quad \xi \in \tilde{L} \end{aligned} \quad (6)$$

求解时须把(1)与(2)换成 f 的形式作为补充条件. 例如 L 无交点时它们就是下列 m 个条件:

$$\int_{L_K} f(S) dS = 0 \quad (K = 1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

有交点存在时条件的个数将小于 m . 可以看出这个问题与 φ 的原问题等价, 所以存在唯一性成立. 其中唯一性即使在复值函数类中也是成立的.

根据奇异积分理论^[3]可知 f 在端点具 $1/2$ 阶奇性. 一般情形下可根据反演公式“正则化”, 变成 Fredholm 第二类积分方程. 这个方程中将包含一个 $(m-1)$ 次未知多项式, 它的 m 个未知系数应由条件(1)、(2)以及所得 Fredholm 方程的可解性条件补充确定. 另外也可根据奇异积分方程的数值理论直接处理方程(6). 文[1]中的数值例说明这常常也较方便.

根据 Cauchy 型积分在曲线端点邻域的性质^[3]可得应力强度因子的简单表达式

$$K_{III}(c) = K\mu \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \in L}} \sqrt{2|c - z|} f(z) \quad (8)$$

这里 c 为任一端点, μ 为剪切模量.

而扭转刚度 D 的表达式为

$$D = \frac{\mu\pi R^4}{2} + \operatorname{Re} \mu \int_L \bar{z}^2 f e^{i\alpha(z)} dz. \quad (9)$$

文 [1] 的基本结果不难由上述考虑径向裂纹的特例而得到。为此只需考查单裂缝基本解的情况, 又因记号一致, 我们只考查 φ_1 、 φ_2 用 f 来表达的式子就可以了。

对于沿负实轴的单裂缝, 本文结果是

$$\varphi_1 = \operatorname{Re} \frac{-1}{2\pi i} \int_L \ln(-r - \xi) 2f dr$$

$$\varphi_2 = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln(\xi + R^2/r) 2f dr$$

其中 $r(>0)$ 为矢径。文 [1] 的结果按其符号表为:

$$\varphi_1 = M^{-1} \left[\frac{\int_{a_1}^{b_1} f \rho^s d\rho}{S \sin S\pi} \sin S\theta, \rho \right]$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \arcsin \frac{\rho \sin \theta}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho u_* \cos \theta + u_*^2}} f(u) du$$

其中 $M^{-1}[\]$ 为 Melin 变换的逆变换, (ρ, θ) 为极坐标, $u_* = R^2/u$ 。容易看出两个 φ_2 完全相同。另外, 对 [1] 的 φ_1 利用卷积公式及残数理论可算得

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{-\sin \theta u}{u^2 + \rho^2 + 2u\rho \cos \theta} f(u) du$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{-\rho(\cos \theta u + \rho)}{u^2 + \rho^2 + 2u\rho \cos \theta} f(u) du$$

其实这从文 [1] 的结果中也可反推出。再求出本文所得 φ_1 的两个相应表达式易知其确实相等, 于是两者结果一致。

下面我们讨论两个简单例子。若 L 为共线直线段 (m 可大于 1), 则因

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{z - \xi} = \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{z - \xi}, \quad e^{i\alpha(\xi)} = e^{i\alpha(z)}$$

方程 (5) 此时简化为:

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{2f dz}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{Re} \frac{1}{\xi - R^2/\bar{z}} 2f dz + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0, \quad \xi \in \tilde{L} \quad (10)$$

当 L 为同心圆弧段 (m 可大于 1) 时则因

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{z - \xi} = \frac{i(\xi - z_0)}{l(z - \xi)}$$

方程 (5) 可变成

$$\frac{i(\xi - z_0)}{2\pi l} \int_L \frac{2f e^{-i\alpha(z)}}{z - \xi} dz + \frac{1}{2\pi l} \int_L \operatorname{Re} \left(\frac{i(\xi - z_0)}{\xi - R^2/\bar{z}} \right) 2f e^{-i\alpha(z)} dz$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0 \quad \xi \in \tilde{L} \quad (11)$$

这里 z_0 为圆心, l 为圆弧半径。

为了说明上述简化的好处, 我们注意对于圆心附近的微小裂纹, 记 $\varepsilon = \max_{z \in L} |z|$, 则

常有 $R^2 \gg \varepsilon^2$, 于是 (5) 式中便有

$$\frac{1}{|z - \xi|} \gg \frac{1}{|\xi - R^2/\bar{z}|}$$

于是此时近似地(5)式变成

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{2\pi} \int_L \frac{2fe^{-i\alpha(z)}}{z-\xi} dz + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0 \quad \xi \in \tilde{L}$$

这样(10)式近似地为

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{2fdz}{z-\xi} + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0$$

(11)式近似地为

$$\frac{i(\xi - z_0)}{2\pi l} \int_L \frac{2fe^{-i\alpha(z)}}{z-\xi} dz + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0$$

这样便可利用条件(7)反演获得 f 的解析表达式。为简单计考虑单裂缝, 此时反演式中的未定常数按(7)式确定为 0, 因此时可以证明

$$\int_{L_1} \frac{1}{\sqrt{(\xi - A_1)(\xi - B_1)(\xi - z)}} d\xi = 0 \quad z \in \tilde{L}$$

于是单直线裂缝(非径向)时有

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{(\xi - A_1)(\xi - B_1)}} \int_{L_1} \frac{\sqrt{(z - A_1)(z - B_1)} \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (z \bar{z})}{z - \xi} dz$$

$\xi \in \tilde{L}$

单圆弧形裂缝有

$$f(\xi) = \frac{\xi - z_0}{\pi \sqrt{(\xi - A_1)(\xi - B_1)}} \int_{L_1} \frac{\sqrt{(z - A_1)(z - B_1)} \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (z \bar{z})}{(z - \xi)(z - z_0)} dz$$

$\xi \in \tilde{L}$

将其代之(8)、(9)式便可获得 K_{III} 和 D 的近似表达式。

应当指出, 上述内容可推广至弯曲^[9]及圆筒。例如对圆筒: $R_1 < |\xi| < R_2$, 沿用本文符号此时主要结论有

$$\varphi_1 = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2F}{z-\xi} dz \quad \xi \in L$$

$$\varphi_2 = \operatorname{Re} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{a_K \xi^K}{K} \quad R_1 < |\xi| < R_2$$

其中

$$a_K = \frac{i}{2\pi(1 + (R_1/R_2)^{2K})} \int_L \left[\left(\frac{\bar{z}}{R_2^2} \right)^K - \left(\frac{R_1^2}{z R_2^2} \right)^K \right] 2fe^{-i\alpha(z)} dz$$

$$a_{-K} = \frac{i}{2\pi(1 + (R_1/R_2)^{2K})} \int_L \left[\left(\frac{R_1^2}{\bar{z}} \right)^K + \left(\frac{R_1^2 z}{R_2^2} \right)^K \right] 2fe^{-i\alpha(z)} dz$$

$K = 1, 2, \dots, +\infty$

f 的奇异积分方程为

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha(\xi)}}{2\pi} \int_L \frac{2fe^{-i\alpha(z)}}{z-\xi} dz + \operatorname{Re} \left[i e^{i\alpha(\xi)} \sum_{K=0}^{+\infty} a_K \xi^{K-1} \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dS} (\xi \bar{\xi}) = 0 \quad \xi \in \tilde{L}$$

注意 K 充分大时 $(R_1/R_2)^{2K}$ 迅速趋于零, 上述方程中的无穷级数恰好趋于等比级数, 所以求和较方便。

最后指出, 本文所作关于 L 不形成闭路和任意 L_K 之端点不在其它裂纹线上的假定只是为了讨论时简明, 去掉它本文结论稍作修改后全部成立。特别, 所用方法结合保形映照似乎为处理一般截面柱体扭转提供了一种可能途径。

本文曾作为作者在兰州大学时本科毕业论文的内容之一。在提出并完成此项工作过程中承蒙汤任基老师热情鼓励和指导, 在此谨表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 汤任基, 带裂纹圆柱体的 Saint-Venant 扭转, 力学学报, 4(1982).
- [2] Мухелишвили, Н. И., 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社 (1958).
- [3] Мухелишвили, Н. И., 奇异积分方程, 上海科技出版社 (1966).
- [4] 郭仲衡, 有偏心圆弧裂缝的圆柱体扭转, 北京大学学报, 1(1973).
- [5] 郭仲衡, 有同心圆弧裂缝的圆柱体和圆管的弯曲, 力学学报, 4(1980).

SAINT-VENANT TORSION PROBLEM FOR A CIRCULAR CYLINDER WITH CURVED CRACKS

Ru Chongqing

(Department of Mechanics, Beijing University)

Abstract

In this note, using Cauchy-type integrals, we treated the torsion problem for a circular cylinder with curved cracks. This problem is reduced to a singular-integral equation of Cauchy-type Kernel, and a formula for the stress-intensity factor is given.